



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2014-2015

Hajer Bahouri

Sur le comportement des solutions d'équations de Schrödinger non linéaires à croissance exponentielle

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2014-2015), Exposé n° X, 11 p.

http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2014-2015____A10_0

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2014-2015.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

SUR LE COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRES À CROISSANCE EXPONENTIELLE

HAJER BAHOURI

RÉSUMÉ. On se propose dans cet exposé de décrire le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire à croissance exponentielle, où la norme d'Orlicz joue un rôle crucial. Notre analyse qui est basée sur les décompositions en profils met en lumière le rôle distingué de la composante **1**-oscillante de la suite des données initiales. Ce phénomène est complètement différent de ceux obtenus dans le cadre des équations semi-linéaires dispersives critiques, où toutes les composantes oscillantes créent le même effet non linéaire, à un changement d'échelle près.

1. INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail à l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$(NLS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f(u), \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

où la fonction u à valeurs dans \mathbb{C} dépend de $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, et où la non linéarité $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$f(u) = \phi_p(\sqrt{4\pi}|u|)u,$$

avec $p > 1$ et $\phi_p(s) = e^{s^2} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{s^{2k}}{k!}$.

Cette équation modélise des problèmes d'optique non linéaires en dimension trois d'espace (propagation des faisceaux laser dans différents milieux). Pour plus de détails, on peut par exemple consulter [31].

Notons que les solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) satisfont formellement la conservation de la masse et du Hamiltonien

$$(1) \quad M(u, t) = \int_{\mathbb{R}^2} |u(t, x)|^2 dx = M(u_0) \quad \text{et}$$

$$(2) \quad H(u, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u(t, x)|^2 + F_p(u(t, x)) \right) dx = H(u_0),$$

où

$$(3) \quad F_p(u) = \frac{1}{4\pi} \phi_{p+1}(\sqrt{4\pi}|u|).$$

Rappelons aussi que les questions d'existence globale et de scattering pour ce problème de Cauchy ont été traitées dans [19, 8, 27], à la fois dans les cas sous-critique et critique. Ici la notion de criticalité dépend de la taille du Hamiltonien $H(u_0)$ par rapport à 1. Plus précisément, le problème de Cauchy concerné est dit sous-critique si $H(u_0) < 1$, critique si $H(u_0) = 1$ et supercritique si $H(u_0) > 1$.

En désignant par

$$W^{1,4}(\mathbb{R}^2) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} < \infty\},$$

il vient en vertu des résultats cités ci-dessus que les solutions de (NLS) dans les cas sous-critique et critique appartiennent à l'espace fonctionnel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap L^4(\mathbb{R}, W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$.

Dans ce travail, nous abordons la question de l'étude qualitative des solutions de (NLS) : basée sur les décompositions en profils, l'approche qu'on a adoptée consiste à comparer des suites de solutions des équations de Schrödinger linéaire et non linéaire issues de la même suite de données de Cauchy, moyennant un terme de reste petit à la fois en norme de Strichartz et d'Orlicz. La norme de Strichartz dont il est question ici est définie comme suit :

$$(4) \quad \|v\|_{ST(\mathbb{R})} := (\|v\|_{L^4(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^2))} + \|\nabla v\|_{L^4(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^2))}).$$

Celle d'Orlicz, en étroite relation avec l'inégalité de Trudinger-Moser (voir [1, 36, 39, 40, 43]) :

$$(5) \quad \sup_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi|u(x)|^2} - 1) dx = \kappa < \infty,$$

est spécifique au cadre exponentiel et intervient dans notre travail à travers l'injection de Sobolev critique :

$$(6) \quad \|u\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

où $L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)$ désignant l'espace d'Orlicz associé à la fonction ϕ_p , est muni de la norme :

$$(7) \quad \|u\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\mathbb{R}^2} \phi_p\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \leq \kappa \right\}.$$

Une vaste série de travaux s'est attachée à étudier les espaces d'Orlicz (pour une présentation complète, nous renvoyons le lecteur à [38]). Ici, on va se limiter à rappeler qu'une fonction mesurable $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)$, s'il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_p\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty.$$

Il est également important de souligner que l'inégalité de Trudinger-Moser (5) est optimale, dans le sens où si $\beta > 4\pi$, alors

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta|u(x)|^2} - 1) dx = \infty.$$

Cependant, si $\alpha \in [0, 4\pi[$ et $q \geq 2$, alors il existe une constante $C(\alpha, q)$ telle que

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha|u(x)|^2} |u(x)|^q dx \leq C(\alpha, q) \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^q dx, \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \text{ satisfaisant } \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1.$$

L'inégalité (8), qui explose lorsqu'on fait tendre α vers 4π (pour une preuve de ce fait, consulter par exemple [5, 32, 33]), illustre le fait que le facteur exponentiel n'est pertinent que pour la valeur 4π . Pour conclure cet aperçu général sur les inégalités de type Trudinger-Moser, notons que dans [8] les auteurs ont établi, pour la valeur $\alpha = 4\pi + \epsilon$ (ϵ assez petit), une estimation similaire à (8) pour toute fonction u dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1$ et $\|u\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} \leq (1 - \delta)/\sqrt{4\pi}$. Ce type d'estimation qui tient compte de la taille de la norme d'Orlicz s'est avéré très utile dans notre propos.

L'analyse que nous avons menée dans ce travail met en évidence le fait que l'effet non linéaire dans le cadre d'une non linéarité à croissance exponentielle ne provient que de la composante 1-oscillante de la suite des données de Cauchy, ce qui correspond en gros à la troncature en fréquences de taille 1 de la suite des données initiales (pour une définition plus précise de cette notion, consulter la référence [24] ou Définition 2.7 dans ce texte). Ce phénomène est complètement différent de ceux obtenus dans le cadre des équations semi-linéaires dispersives critiques, où toutes les composantes oscillantes créent le même effet non linéaire, à un changement d'échelle près. Par ailleurs comme on le verra par la suite, cet effet est produit à la fois dans les cas sous-critique et

critique, ce qui relance le débat dans l'analyse des solutions des équations semi-linéaires dispersives sous-critiques entreprises par exemple dans [25], pour des suites sans composante **1**-oscillante.

Les théorèmes de structure ont fait leur apparition dans le cadre elliptique dans les travaux de H. Brézis et J.- M. Coron dans [15] et M. Struwe dans [42], puis dans le cadre des équations d'évolution non linéaires dans les travaux de H. Bahouri et P. Gérard dans [4] et F. Merle et L. Vega dans [35]. Mais c'est depuis le remarquable résultat de C. E. Kenig et F. Merle dans [29], que les techniques de décomposition en profils ont été utilisées dans l'objectif d'étudier l'éventuelle explosion des solutions, leur existence globale ou leur complétude asymptotique : entre autres, on peut mentionner [2, 10, 11, 12, 14, 20, 21, 22, 23, 29, 30, 34, 41].

Pour mener à bien l'étude qualitative des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), on a été amené à développer une décomposition en profils des suites de solutions de l'équation de Schrödinger linéaire, moyennant un terme de reste petit à la fois en norme de Strichartz et d'Orlicz. Il s'est avéré que même dans le cas linéaire, la composante **1**-oscillante joue un rôle distingué. En fait, la composante **1**-oscillante engendre un seul type d'éléments dont les normes de Strichartz et d'Orlicz sont toutes les deux significatives, tandis que la composante étrangère à l'échelle **1**, qui est en gros constituée des basses et hautes fréquences de la suite des données initiales (voir [24] ou Définition 2.7 plus loin pour une introduction à cette notion), donne naissance à deux types d'éléments très différents. Pour le premier type, il n'y a que la norme de Strichartz qui est significative et inversement, pour le second type, il n'y a que la norme d'Orlicz qui est significative. Un des arguments clefs de cette sorte d'orthogonalité entre les normes d'Orlicz et de Strichartz pour l'évolution de la composante étrangère à l'échelle **1** repose sur des estimations précisées faisant intervenir les espaces de Bourgain introduits dans [17].

Rappelons que depuis les travaux [15, 42, 4, 35], les décompositions en profils sont utilisées avec beaucoup de succès dans des contextes très variés, mais toujours relevant de problèmes invariants par scaling. Dans ce travail, on est confronté à des équations sans invariances par scaling où deux normes distinctes jouent un rôle crucial. Comme il l'a été souligné ci-dessus, deux types d'éléments interviennent dans notre analyse. Ces éléments ont en fait des comportements très différents dans l'espace des fréquences : le premier type est localisé en fréquences alors que le second est étalé (voir [7, 9] pour plus de détails). La majeure difficulté dans ce travail a été de développer une stratégie permettant d'extraire des éléments de natures très différentes.

2. RÉSULTATS ET IDÉES DE PREUVE

2.1. Énoncé du résultat linéaire. Comme mentionné ci-dessus, pour étudier le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), on a été amené à établir un théorème de structure pour l'équation de Schrödinger linéaire, moyennant un terme de reste petit à la fois en norme de Strichartz et d'Orlicz. Il est bien connu que les solutions de l'équation de Schrödinger linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} i \partial_t v + \Delta v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ v|_{t=0} = v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

satisfont la conservation de la masse et de l'énergie

$$(9) \quad M_0(v, t) = \|v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = M_0(v_0),$$

$$(10) \quad E_0(v, t) = \|\nabla v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|\nabla v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = E_0(v_0),$$

et pour $t \neq 0$ l'inégalité dispersive

$$(11) \quad \|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim \frac{1}{|t|} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

En combinant les estimations (9) et (11) conjointement avec l'interpolation entre les espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^2)$, on déduit que

$$(12) \quad \forall t \neq 0, \forall q \in [2, \infty], \quad \|v(t, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \frac{1}{|t|^{(1-2/q)}} \|v_0\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)},$$

où q' désigne l'exposant conjugué de q , défini par :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \text{avec la convention } \frac{1}{\infty} = 0.$$

L'argument fonctionnel TT^* (pour une présentation de cet argument, consulter par exemple Chapitre 8 dans [3]) permet alors d'obtenir les estimations suivantes appelées estimations de Strichartz (voir [18]) :

Proposition 2.1. *Soient (q, r) et (\tilde{q}, \tilde{r}) deux couples de Strichartz, i.e.,*

$$(13) \quad 2 \leq r, \tilde{r} < \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{2}.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que si v est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t v + \Delta v = G(t, x), \\ v|_{t=0} = v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

alors pour $m \in \{0, 1\}$

$$(14) \quad \|\nabla^m v\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^2))} \leq C \left(\|\nabla^m v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla^m G\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{r}'}(\mathbb{R}^2))} \right).$$

L'approche qu'on a adoptée dans ce travail pour atteindre notre objectif est basée sur les décompositions en profils. La nouveauté ici réside dans le fait que l'étude du comportement des solutions se fait à la fois dans le cadre des normes de Strichartz et d'Orlicz.

Pour formuler notre théorème de manière claire, commençons par introduire quelques objets comme dans [5, 6, 9, 13] où le défaut de compacité de l'injection de Sobolev (6) a été caractérisé.

Définition 2.2. On appellera échelle toute suite $\underline{\alpha} := (\alpha_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels positifs tendant vers l'infini et par profil toute fonction ψ appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{P} := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}, e^{-2s} ds); \quad \psi' \in L^2(\mathbb{R}) \text{ and } \psi|_{]-\infty, 0]} = 0 \right\}.$$

Deux échelles $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ seront dites orthogonales si $|\log(\beta_n/\alpha_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Le résultant linéaire qu'on a obtenu s'énonce comme suit :

Théorème 2.3. *Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite de solutions de l'équation de Schrödinger linéaire (S) issues de $(\varphi_n)_{n \geq 0}$, où $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe alors une suite $(\varphi^{(k)})_{k \geq 0}$ de fonctions dans $L_{rad}^2(\mathbb{R}^2)$, une suite de profils $(\psi^{(j)})_{j \geq 1}$ dans \mathcal{P} , une suite d'échelles $(\underline{\alpha}^{(j)})_{j \geq 1}$ dans le sens de la définition 2.2, une suite $((h_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}})_{k \geq 0}$ de suites de nombres réels positifs, et deux suites réelles $((t_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}})_{j \geq 1}$ et $((\tilde{t}_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}})_{k \geq 0}$ tels que*

$$(15) \quad \forall j \neq i, \quad |\log(\alpha_n^{(j)}/\alpha_n^{(i)})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ ou bien } \alpha_n^{(j)} = \alpha_n^{(i)} \text{ et } -\frac{\log|t_n^{(j)} - t_n^{(i)}|}{2\alpha_n^{(j)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in [-\infty, +\infty[,$$

avec dans le cas où $a \in]0, +\infty[$ $\psi^{(j)}(s)$ ou $\psi^{(i)}(s)$ nulle pour $s < a$,

$$(16) \quad \text{pour tout } k \neq m, \quad \left| \log(h_n^{(k)}/h_n^{(m)}) \right| + \frac{|\tilde{t}_n^{(k)} - \tilde{t}_n^{(m)}|}{h_n^{(k)2}} \rightarrow \infty, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

et, quitte à extraire une sous-suite, on a pour tout $\ell \geq 1$ ¹

$$(17) \quad v_n(t, \cdot) = \sum_{k=0}^{\ell} \langle D \rangle^{-1} \frac{1}{h_n^{(k)}} e^{i(t-\tilde{t}_n^{(k)})\Delta} \varphi^{(k)} \left(\frac{\cdot}{h_n^{(k)}} \right) \\ + \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{\frac{\alpha_n^{(j)}}{2\pi}} e^{i(t-t_n^{(j)})\Delta} \psi^{(j)} \left(\frac{-\log |\cdot|}{\alpha_n^{(j)}} \right) + r_n^{(\ell)}(t, \cdot),$$

avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|r_n^{(\ell)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^{\phi_p}) \cap ST(\mathbb{R})} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

De plus, on a les estimations de stabilité suivantes lorsque n tend vers l'infini

$$(18) \quad M_0(v_n) = \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} \|\langle D \rangle^{-1} \varphi^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \sum_{k \in \Lambda_\infty^\ell(\mathbf{1})} \|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|r_n^{(\ell)}(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + o(1),$$

et

$$(19) \quad E_0(v_n) = \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} \|\nabla \langle D \rangle^{-1} \varphi^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \sum_{k \in \Lambda_0^\ell(\mathbf{1})} \|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ + \sum_{j=1}^{\ell} \|\psi^{(j)'}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + E_0(r_n^{(\ell)}) + o(1),$$

où on a noté $\Gamma^\ell(\mathbf{1}) := \{k \in \{0, \dots, \ell\} / h_n^{(k)} = \mathbf{1}\}$, $\Lambda_0^\ell(\mathbf{1}) := \{k \in \{1, \dots, \ell\} / h_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$ et $\Lambda_\infty^\ell(\mathbf{1}) := \{k \in \{1, \dots, \ell\} / h_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}$, et désigné par $\mathbf{1}$ la suite dont tous les termes sont égaux au nombre réel 1.

Remarques 2.4.

– Dans ce qui suit, on va considérer les notations suivantes :

$$(20) \quad g_n^{(j)}(t, \cdot) := \sqrt{\frac{\alpha_n^{(j)}}{2\pi}} e^{i(t-t_n^{(j)})\Delta} \psi^{(j)} \left(\frac{-\log |\cdot|}{\alpha_n^{(j)}} \right) \text{ et}$$

$$(21) \quad f_n^{(k)}(t, \cdot) := \langle D \rangle^{-1} \frac{1}{h_n^{(k)}} e^{i(t-\tilde{t}_n^{(k)})\Delta} \varphi^{(k)} \left(\frac{\cdot}{h_n^{(k)}} \right).$$

– En désignant par

$$w_n^{(j)}(x) := \sqrt{\frac{\alpha_n^{(j)}}{2\pi}} \psi^{(j)} \left(\frac{-\log |x|}{\alpha_n^{(j)}} \right),$$

il est important de rappeler que la suite $(w_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ appelée généralisation de l'exemple de Moser illustre le défaut de compacité de l'injection de Sobolev (6) et vérifie (pour une preuve de cette propriété, voir Proposition 1.15 dans [5]) :

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n^{(j)}\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \max_{s>0} \frac{|\psi^{(j)}(s)|}{\sqrt{s}}.$$

– Rappelons aussi que l'exemple de Moser introduit dans [36] est défini par :

$$w_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha_n}{2\pi}} \mathbf{L} \left(\frac{-\log |x|}{\alpha_n} \right),$$

où

$$\mathbf{L}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0, \\ s & \text{si } 0 \leq s \leq 1, \\ 1 & \text{si } s \geq 1, \end{cases}$$

1. On a utilisé la notation classique $\langle D \rangle = (1 + |D|^2)^{\frac{1}{2}}$.

et $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels positifs tendant vers l'infini. Conformément à l'estimation (22), il est facile de voir que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

- Il est également connu que l'exemple de Moser est la fonction d'énergie minimale qui vaut $\sqrt{\alpha_n/2\pi}$ sur le disque $D(0, e^{-\alpha_n})$ et qui s'annule en dehors du disque unité (voir par exemple [26]). Cette remarque a joué un rôle crucial dans [6] où le défaut de compacité de l'injection de Sobolev (6) a été décrit dans le cas général, en utilisant des arguments de compacité.
- En fait, depuis les travaux de P.-L. Lions dans [32, 33], on sait que le défaut de compacité de l'injection de Sobolev (6) est dû à deux phénomènes. Le premier est de type concentration comme le montre l'exemple de la suite $(w_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessus. Le second est un défaut de compacité à l'infini : un exemple typique est donné par $f_n(x) := f(x - x_n)$, où f est une fonction non nulle appartenant à l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de points de \mathbb{R}^2 vérifiant $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
- Soulignons qu'il a été établi dans [7] que les éléments $w_n^{(j)}$ et f_n définis ci-dessus sont de natures très différentes : le premier type d'éléments est étalé en fréquences alors que le second type est **1**-oscillant, donc localisé en fréquences. Ceci entraîne facilement que la composante **1**-oscillante ne génère que des éléments du second type avec $(h_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \equiv \mathbf{1}$ et donc avec à la fois des normes de Strichartz et d'Orlicz significatives.
- Par exemple, il a été démontré dans [7] que l'exemple de Moser rappelé ci-dessus s'écrit sous la forme :

$$w_n(x) = \widetilde{w}_n(x) + r_n(x),$$

avec $\|r_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et

$$\widetilde{w}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_n}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i x \cdot \xi} \frac{1}{|\xi|^2} \varphi\left(\frac{\log |\xi|}{\alpha_n}\right) d\xi,$$

où $\varphi(\eta) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\eta)$, ce qui montre que le spectre de w_n est étalé dans le disque centré à l'origine et de rayon e^{α_n} .

- Contrairement au cas de la composante **1**-oscillante, la composante étrangère à l'échelle **1** donne lieu aux deux types d'éléments $g_n^{(j)}$ et $f_n^{(k)}$ définis respectivement par les formules (20) et (21), avec une forme d'orthogonalité comme l'illustrent les deux propositions suivantes :

Proposition 2.5. *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout j dans \mathbb{N}*

$$\|g_n^{(j)}\|_{ST(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|g_n^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))} \gtrsim 1.$$

Proposition 2.6. *En désignant par $\Lambda^\ell(\mathbf{1}) = \Lambda_\infty^\ell(\mathbf{1}) \cup \Lambda_0^\ell(\mathbf{1})$, on a dans le cas où $h_n^{(k)}$ appartient à $\Lambda^\ell(\mathbf{1})$*

$$\|f_n^{(k)}\|_{ST(\mathbb{R})} \gtrsim 1 \quad \text{et} \quad \|f_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Notons que la proposition 2.6 s'obtient par des calculs élémentaires, tandis que la preuve de la proposition 2.5 est plus difficile. En effet comme $\|\nabla g_n^{(j)}(t_n^{(j)}, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \gtrsim 1$, le résultat ne découle pas de l'estimation de Strichartz classique (14). Pour surmonter cette difficulté, on a couplé la propriété d'étalement spectral de $g_n^{(j)}(t_n^{(j)}, \cdot)$ rappelé ci-dessus avec l'estimation de Strichartz précisée suivante établie dans [16, 17, 37] :

$$(23) \quad \|\nabla^m e^{it\Delta} v_0\|_{L^4(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^2))} \leq C \|\widehat{\nabla^m v_0}\|_{\mathcal{X}_r}, \quad \forall r \geq \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad m \in \{0, 1\},$$

avec

$$(24) \quad \|f\|_{\mathcal{X}_r} := \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{C}_j} 2^{4j} \left(\frac{1}{2^{2j}} \int_{\tau} |f|^r \right)^{4/r} \right)^{1/4},$$

où τ désigne un carré de côté 2^j et \mathcal{C}_j un correspondant réseau du plan.

– En fait, grâce à l'estimation précisée suivante démontrée dans [35] :

$$(25) \quad \|f\|_{\mathcal{X}_r} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{r}{2}} \left(\sup_{j, \tau \in \mathcal{C}_j} 2^j \left(\frac{1}{2^{2j}} \int_{\tau} |f|^r \right)^{1/r} \right)^{1-\tau/2}, \text{ for } 1 \leq r < 2,$$

Proposition 2.5 se déduit facilement de la propriété d'étalement spectral qui entraîne que

$$(26) \quad \|\nabla g_n^{(j)}(t_n^{(j)}, \cdot)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^0(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où $\dot{B}_{2,\infty}^0(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace de Besov homogène (voir par exemple Chapitre 2 dans [3] pour plus de détails sur les espaces de Besov et les travaux [7, 24] pour une preuve de l'estimation (26)).

– Observons également que l'interaction entre les différents éléments intervenant dans la décomposition (17) est négligeable. Tout d'abord, les conditions d'orthogonalité (15) et (16) assurent par des arguments classiques que deux éléments de même type n'interagissent presque pas. D'autre part, comme les éléments $f_n^{(k)}$ sont localisés en fréquences tandis que les éléments $g_n^{(j)}$ sont étalés, on obtient facilement

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (f_n^{(k)}(t, \cdot) | g_n^{(j)}(t, \cdot))_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pour tous entiers k et j , ce qui achève la preuve du résultat désiré.

2.2. Énoncé du résultat non linéaire. Le résultat non linéaire qu'on a établi dans ce travail met en lumière le fait que l'effet non linéaire ne provient que de la composante 1-oscillante. Pour introduire clairement notre théorème, on va commencer par rappeler les notions de (h_n) -oscillante et d'étrangère à l'échelle (h_n) introduites par P. Gérard dans [24] :

Définition 2.7. Soit $f := (f_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\underline{h} := (h_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs²

– La suite f est dite \underline{h} -oscillante si

$$(27) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{h_n |\xi| \leq \frac{1}{R}} |\widehat{f_n}(\xi)|^2 d\xi + \int_{h_n |\xi| \geq R} |\widehat{f_n}(\xi)|^2 d\xi \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

– La suite f est dite étrangère à l'échelle \underline{h} si pour tous réels $b > a > 0$,

$$(28) \quad \int_{a \leq h_n |\xi| \leq b} |\widehat{f_n}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Remarque 2.8. Il est facile de voir qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est $(h_n)_{n \geq 0}$ -oscillante si, moyennant un terme arbitrairement petit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, elle est localisée en fréquences dans une couronne de taille $1/h_n$, et qu'elle est étrangère à $(h_n)_{n \geq 0}$ si ce n'est pas le cas.

Notre résultat non linéaire se formule comme suit :

Théorème 2.9. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) issues de $(\varphi_n)_{n \geq 0}$, où $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant $H(\varphi_n) \leq 1$. Supposons que la suite $(\langle D \rangle \varphi_n)_{n \geq 0}$ n'est pas étrangère à l'échelle $\mathbf{1}$, dans le sens de la définition 2.7. Alors, avec les notations du Théorème 2.3, on a pour tout $\ell \geq 1$

$$(29) \quad u_n(t, \cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}(t, \cdot) + \sum_{k \in \Lambda^\ell(\mathbf{1})} f_n^{(k)}(t, \cdot) + \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} U_k(t - \tilde{t}_n^{(k)}, \cdot) + \tilde{\Gamma}_n^{(\ell)}(t, \cdot),$$

2. où \widehat{u} désigne la transformée de u définie par $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i x \cdot \xi} u(x) dx$.

où $\Lambda^\ell(\mathbf{1}) = \Lambda_0^\ell(\mathbf{1}) \cup \Lambda_\infty^\ell(\mathbf{1})$, où $g_n^{(j)}$ et $f_n^{(k)}$ sont respectivement définies par (20) et (21), où $\tilde{r}_n^{(\ell)}$ vérifie

$$(30) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{r}_n^{(\ell)} - e^{it\Delta} r_n^{(\ell)}(0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap ST(\mathbb{R})} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

où U_0 désigne la solution de (NLS) issue de la limite faible de $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ et où pour $k \geq 1$ dans $\Gamma^\ell(\mathbf{1})$, U_k désigne la solution de (NLS) satisfaisant

$$(31) \quad \|U_k(s, \cdot) - e^{is\Delta} \langle D \rangle^{-1} \varphi^{(k)}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{s \rightarrow \mp \infty} 0, \text{ si } \tilde{t}_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty.$$

Remarques 2.10.

- L'existence et l'unicité des solutions U_k vérifiant l'estimation asymptotique (31) sont assurés par les résultats de scattering obtenus dans [8] et [27].
- Le point clef dans Théorème 2.9 se base sur la propriété suivante

$$(32) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^2))} < \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

pour tout entier $\ell \geq 1$. Cette propriété cruciale découle de la Proposition 2.6, de l'estimation de stabilité (19) et des hypothèses $H(\varphi_n) \leq 1$ et $(\langle D \rangle \varphi_n)_{n \geq 0}$ étrangère à l'échelle $\mathbf{1}$.

- Théorème 2.9 montre que la composante $\mathbf{1}$ -oscillante de la suite des données de Cauchy engendre un effet non linéaire même dans le cas sous-critique. Le problème d'analyse des solutions des équations semi-linéaires dispersives sous-critiques se pose alors.
- Notons que notre résultat est complètement différent de ceux obtenus dans le cadre des équations semi-linéaires dispersives critiques, où toutes les composantes oscillantes créent le même effet non linéaire, à un changement d'échelle près.
- Observons que le cas $p = 1$ n'est pas traité dans ce travail. En fait, notre analyse repose entre autres sur la compacité de l'injection de Sobolev de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^2)$ dans l'espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^2)$, pour $2 < q < \infty$.

2.3. Idées des preuves.

2.4. Schéma de preuve du théorème linéaire. Comme souligné ci-dessus, la difficulté principale provient de la différence du comportement des éléments responsables du défaut de compacité de l'injection de Sobolev (6) dans l'espace des fréquences : un premier type d'éléments qui est $\mathbf{1}$ -oscillant, comme le montre l'exemple $f_n(x) := f(x - x_n)$, avec $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, et un second type d'éléments qui est étalé en fréquences comme l'illustre l'exemple de Moser $\sqrt{\frac{\alpha_n}{2\pi}} \mathbf{L}\left(\frac{-\log|x|}{\alpha_n}\right)$ défini ci-dessus et dont les propriétés spectrales ont été étudiées dans [7].

Pour surmonter cette difficulté, on a développé une stratégie pour extraire ces éléments qui sont complètement différents. Pour ce faire, on a commencé (conformément à la proposition 2.5 dans [24]) par décomposer la suite de données de Cauchy en trois parties : sa limite faible, sa composante $\mathbf{1}$ -oscillante et un terme de reste qui est étranger à l'échelle $\mathbf{1}$. Par la suite, pour établir Théorème 2.3, on a traité séparément l'évolution de chaque partie sous le flot de l'équation de Schrödinger. Et enfin, on a regroupé les différentes décompositions.

Le point clef pour étudier la suite des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire (S) associées à la composante $\mathbf{1}$ -oscillante consiste à démontrer que le reste dans les décompositions dans les cadres des normes de Strichartz et d'Orlicz coïncident. Il s'agit pour cette partie de montrer que le reste donné par le Théorème 2 de F. Merle et L. Vega dans [35] et dont la norme de Strichartz tend vers zéro, tend également vers zéro dans l'espace d'Orlicz lorsque la donnée de Cauchy est $\mathbf{1}$ -oscillante. Pour ce faire, on a tiré profit de l'estimation radiale suivante valable pour $2 \leq q < \infty$ (pour une preuve détaillée, on peut par exemple consulter [5])

$$(33) \quad |u(x)| \leq \frac{C_q}{r^{2/(2+q)}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^{2/(q+2)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2/(q+2)},$$

avec $r = |x|$, ainsi que des propriétés du reste obtenu dans [35].

Mais, contrairement au cas de la composante $\mathbf{1}$ -oscillante, l'étude de la suite des solutions de (S) engendrées par la composante étrangère à l'échelle $\mathbf{1}$ donne lieu à deux décompositions distinctes. Celle dans le cadre de la norme d'Orlicz est basée sur le fait qu'on a affaire pour cette partie à une suite convergeant vers zéro dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^{2p}(\mathbb{R}^2))$.

Pour conclure la preuve du résultat linéaire en regroupant les deux décompositions, on a été amené à mettre en lumière une sorte d'orthogonalité entre les normes de Strichartz et d'Orlicz pour l'évolution de la composante étrangère à l'échelle $\mathbf{1}$, dans le sens des propositions 2.5 et 2.6.

2.5. Schéma de preuve du théorème non linéaire. Les estimations de stabilité interviennent de manière cruciale dans la preuve du Théorème 2.9 en permettant de se ramener à un nombre fini ℓ d'éléments. En écrivant $u_n = u_n^{\text{ap},(\ell)} + \tilde{r}_n^{(\ell)}$, avec

$$u_n^{\text{ap},(\ell)}(t, \cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}(t, \cdot) + \sum_{k \in \Lambda^\ell(\mathbf{1})} f_n^{(k)}(t, \cdot) + \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} U_k(t - \tilde{t}_n^{(k)}, \cdot),$$

on vérifie facilement que $(i\partial_t + \Delta)\tilde{r}_n^{(\ell)} = G_n^{(\ell)}$, où

$$G_n^{(\ell)}(t, \cdot) = f(u_n(t, \cdot)) - \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} f(U_k(t - \tilde{t}_n^{(k)}, \cdot)).$$

Donc sur tout intervalle $[0, T]$, le terme de reste $\tilde{r}_n^{(\ell)}$ prend la forme :

$$\tilde{r}_n^{(\ell)}(t, \cdot) - e^{it\Delta} \tilde{r}_n^{(\ell)}(0, \cdot) = e^{it\Delta} (\tilde{r}_n^{(\ell)} - r_n^{(\ell)})(0, \cdot) - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} G_n^{(\ell)}(s, \cdot) ds.$$

Grâce des arguments de continuité ainsi que le fait que $\|(\tilde{r}_n^{(\ell)} - r_n^{(\ell)})(0, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ qui découle de l'estimation asymptotique (31), il suffit alors de montrer que pour T assez petit

$$(34) \quad \|G_n^{(\ell)}\|_{ST^*([0, T])} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

où $ST^*([0, T])$ désigne le dual de la norme de Strichartz (4).

Pour atteindre notre objectif, on a décomposé le terme source en trois parties comme suit :

$$G_n^{(\ell)} = G_n^{(\ell),1} + \mathcal{L}(u_n^{\text{ap},(\ell)})\tilde{r}_n^{(\ell)} + \mathcal{R}_n^{\text{ap},(\ell)},$$

avec

$$\begin{cases} G_n^{(\ell),1} = f(u_n^{\text{ap},(\ell)}) - \sum_{k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})} f(U_k(\cdot - \tilde{t}_n^{(k)}, \cdot)) \text{ et} \\ \mathcal{L}(u_n^{\text{ap},(\ell)})\tilde{r}_n^{(\ell)} = (\tilde{\phi}_p(u_n^{\text{ap},(\ell)})\tilde{r}_n^{(\ell)} - \phi_p^b(u_n^{\text{ap},(\ell)})\tilde{r}_n^{(\ell)}). \end{cases}$$

En fait, on a

$$\|G_n^{(\ell),1}\|_{ST^*(\mathbb{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Cette propriété est démontrée en partitionnant l'ensemble des réels \mathbb{R} comme suit :

$$I_k^A = \{|t - \tilde{t}_n^{(k)}| \leq A\} \text{ pour } k \in \Gamma^\ell(\mathbf{1}) \text{ et } J^A = \{|t - \tilde{t}_n^{(k')}| \geq A, \forall k' \in \Gamma^\ell(\mathbf{1})\},$$

où A est un nombre réel convenablement choisi. Le choix de cette partition est motivée par le fait qu'en vertu des résultats de scattering, le terme $f(U_k(\cdot - \tilde{t}_n^{(k)}, \cdot))$ est uniquement pertinent sur l'intervalle I_k^A . Cette information combinée avec (8) et (32) permet de conclure la démonstration du résultat grâce à des inégalités de type Trudinger-Moser.

Enfin par des arguments similaires, on montre que pour T assez petit et n assez grand, on a

$$\|\mathcal{L}(u_n^{\text{ap},(\ell)})\tilde{r}_n^{(\ell)}\|_{ST^*([0, T])} \leq o(1) + c\|\tilde{r}_n^{(\ell)}(t, \cdot) - e^{it\Delta} \tilde{r}_n^{(\ell)}(0, \cdot)\|_{L^\infty([0, T], H^1) \cap ST([0, T])} \text{ et}$$

$$\|\mathcal{R}_n^{\text{ap},(\ell)}\|_{ST^*([0, T])} \leq o(1) + \|\tilde{r}_n^{(\ell)} - e^{it\Delta} \tilde{r}_n^{(\ell)}(0, \cdot)\|_{ST([0, T])}^{1+\gamma} + c\|\tilde{r}_n^{(\ell)}(t, \cdot) - e^{it\Delta} \tilde{r}_n^{(\ell)}(0, \cdot)\|_{L^\infty([0, T], H^1)}^2,$$

où c est une petite constante pour n assez grand, ce qui achève la preuve du théorème par des arguments standards.

RÉFÉRENCES

- [1] S. Adachi and K. Tanaka, Trudinger type inequalities in \mathbb{R}^N and their best exponents, *Proceedings in American Mathematical Society*, **128** (2000), 2051-2057.
- [2] Adimurthi and O. Druet, *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*, *Communications in Partial Differential Equations*, **29** (2004), 295–322.
- [3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer*, (2011).
- [4] H. Bahouri and P. Gérard, High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Math*, **121** (1999), 131-175.
- [5] H. Bahouri, M. Majdoub and N. Masmoudi, On the lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, *Journal of Functional Analysis*, **260** (2011), 208-252.
- [6] H. Bahouri, M. Majdoub and N. Masmoudi, Lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, the general case, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **101** (2014), 415-457.
- [7] H. Bahouri, On the elements involved in the lack of compactness in critical Sobolev embedding, *Concentration Analysis and Applications to PDE*, *Trends in Mathematics*, (2013), 1-15.
- [8] H. Bahouri, S. Ibrahim and G. Perelman, Scattering for the critical 2-D NLS with exponential growth, *Journal of Differential and Integral Equations*, **27** (2014), 233-268.
- [9] H. Bahouri and G. Perelman, A Fourier approach to the profile decomposition in Orlicz spaces, *Mathematical Research Letters*, **21** (2014), 33-54.
- [10] H. Bahouri and I. Gallagher, On the stability in weak topology of the set of global solutions to the Navier-Stokes equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **209** (2013), 569-629.
- [11] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and I. Gallagher, Stability by rescaled weak convergence for the Navier-Stokes equations, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Ser. I* **352** (2014), 305-310.
- [12] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and I. Gallagher, Stability by rescaled weak convergence for the Navier-Stokes equations, [arXiv:1310.0256](https://arxiv.org/abs/1310.0256).
- [13] I. Ben Ayed and M. K. Zghal, Characterization of the lack of compactness of $H_{rad}^2(\mathbb{R}^4)$ into the Orlicz space, *Communications in Contemporary Mathematics*, **16** (2014), 1-25.
- [14] L. Berlyand, P. Mironescu, V. Rybalko and E. Sandier, Minimax critical points in Ginzburg-Landau problems with semi-stiff boundary conditions : existence and bubbling, *Communications in Partial Differential Equations*, **39** (2014), 946-1005.
- [15] H. Brézis and J.-M. Coron, Convergence of solutions of H-Systems - or how to blow bubbles, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **89** (1985), 21-86.
- [16] J. Bourgain, A remark on Schrödinger operators, *Israel Journal of Mathematics*, **77** (1992), 1-16.
- [17] J. Bourgain, Some new estimates on oscillatory integrals, *Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein, Princeton Math*, **42** (1995), 83-112.
- [18] T. Cazenave, Equations de Schrödinger non linéaires en dimension deux, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A*, **84** (1979), 327-346.
- [19] J. Colliander, S. Ibrahim, M. Majdoub and N. Masmoudi, Energy critical NLS in two space dimension, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **6** (2009), 549-575.
- [20] R. Côte, C. Kenig, A. Lawrie, W. Schlag, Characterization of large energy solutions of the equivariant wave map problem : I [arXiv:1209.3682](https://arxiv.org/abs/1209.3682).
- [21] R. Côte, C. Kenig, A. Lawrie, W. Schlag, Characterization of large energy solutions of the equivariant wave map problem : II [arXiv:1209.3684](https://arxiv.org/abs/1209.3684).
- [22] O. Druet, *Multibumps analysis in dimension 2 - Quantification of blow up levels*, *Duke Math. Journal*, **132** (2006), 217-269.
- [23] I. Gallagher, G. Koch and F. Planchon, A profile decomposition approach to the $L_t^\infty(L_x^3)$ Navier-Stokes regularity criterion, *Mathematische Annalen*, **355** (2013), 1527-1559.
- [24] P. Gérard, Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3** (1998), 213-233.
- [25] P. Gérard, Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *Journal of Functional Analysis*, **133** (1996), 50–68.
- [26] A. Henrot and M. Pierre, *Variations et optimisation de formes*, *Mathématiques et applications*, Springer, **48**, (2005).
- [27] S. Ibrahim, M. Majdoub, N. Masmoudi and K. Nakanishi, Scattering for the two dimensional NLS with exponential nonlinearity, *Nonlinearity*, **25** (2012), 1843-1849.

- [28] S. Ibrahim, M. Majdoub and N. Masmoudi, Double logarithmic inequality with a sharp constant, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135** (2007), 87–97.
- [29] C. E. Kenig and F. Merle, Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy critical focusing nonlinear wave equation, *Acta Mathematica*, **201** (2008), 147-212.
- [30] S. Keraani, On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equation, *Journal of Differential equations*, **175** (2001), 353-392.
- [31] J. F. Lam, B. Lippman, and F. Tappert, *Self trapped laser beams in plasma*, *Physics of Fluids*, **20** (1977), 1176-1179.
- [32] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I., *Revista Matematica Iberoamericana* **1(1)** (1985), 145-201.
- [33] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II., *Revista Matematica Iberoamericana* **1(2)** (1985), 45-121.
- [34] G. Mancini, K. Sandeep, and C. Tintarev, Trudinger-Moser inequality in the hyperbolic space \mathbb{H}^N , *Advances in Nonlinear Analysis* **2** (2013), 309-324.
- [35] F. Merle and L. Vega, Compactness at Blow-up Time for L2 Solutions of the Critical Nonlinear Schrödinger Equation in 2D, *International Mathematics Research Notices*, **8** (1998), 399-425.
- [36] J. Moser, A sharp form of an inequality of N. Trudinger, *Indiana University Mathematics Journal*, **20** (1971), 1077-1092.
- [37] A. Moyua, A. Vargas and L. Vega, Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in \mathbb{R}^3 , *Duke Mathematical Journal*, **96** (1999), 1-28.
- [38] M.-M. Rao and Z.-D. Ren, *Applications of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **250** (2002), Marcel Dekker Inc.
- [39] B. Ruf and F. Sani, Sharp Adams-type inequalities in \mathbb{R}^n , *Transactions of the American Mathematical Society*, **2** (2013), 645-670.
- [40] B. Ruf, A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in \mathbb{R}^2 , *Journal of Functional Analysis*, **219** (2005), 340-367.
- [41] I. Schindler and K. Tintarev, An abstract version of the concentration compactness principle, *Revista Matematica Complutense*, **15** (2002), 417-436.
- [42] M. Struwe, A global compactness result for boundary value problems involving limiting nonlinearities, *Mathematische Zeitschrift*, **187** (1984), 511-517.
- [43] N.S. Trudinger, On imbedding into Orlicz spaces and some applications, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **17** (1967), 473-484.

(H. Bahouri) LABORATOIRE D'ANALYSE ET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES UMR 8050, UNIVERSITÉ PARIS-EST CRÉTEIL, 61, AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE, 94010 CRÉTEIL CEDEX, FRANCE
E-mail address: hbahouri@math.cnrs.fr