Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2013-2014

Luc Robbiano

Propriétés spectrales des valeurs propres intérieures de transmission

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2013-2014), Exposé n° XVII, 9 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2013-2014____A17_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2013-2014.

Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2013-2014
Exposé n$^{\mathrm{o}}$ XVII, 1-9

Propriétés spectrales des valeurs propres intérieures de transmission

Luc Robbiano*

1 Introduction

Nous présentons ici quelques résultats concernant les valeurs propres intérieures de transmission et nous donnons, sous certaines hypothèses une asymptotique de la fonction de comptage de Weyl.

Rappelons le problème. Soit Ω un domaine à bord régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $n(x)$ une fonction régulière définie dans $\overline{\Omega}$. Cette fonction est appelée indice de réfraction. On dit que $k \neq 0$ est une valeur propre intérieure de transmission s'il existe $(w, v) \neq (0, 0)$ tels que

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 n(x) w = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \Omega, \\ w = v \text{ sur } \partial\Omega, \\ \partial_\nu w = \partial_\nu v \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où ∂_ν est la dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$. Nous considérons des fonctions $n(x)$ à valeurs complexes. En fait dans les modèles venant de la physique on a $n(x) = n_1(x) + i n_2(x)/k$ où les n_j sont à valeurs réelles. La partie imaginaire est une façon de modéliser des matériaux dissipatifs.

En posant $u = w - v$ et $\tilde{v} = k^2 v$, on obtient le system équivalent suivant si $k \neq 0$,

$$\begin{cases} \big(\Delta + k^2(1 + m)\big)u + mv = 0 \text{ dans } \Omega, \\ (\Delta + k^2)v = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où pour simplifier les écritures on a remplacé $\tilde{v}$ par v et n par $1 + m$.

Le problème (1) est relié, quand $k \in \mathbb{R}$, à un problème de scattering comme l'ont démontrés Colton, Kirsch et Päivärinta [6], on trouve aussi le résultat dans le livre de Colton et Kress [7, Theorem 8.9]. Le lien est le suivant, soit $n(x)$ défini comme ci-dessus dans Ω et prolongé par 1 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On suppose $n(x) \neq 1$ dans Ω. Pour $k \in \mathbb{R}$, soit u la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 n(x) u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, \\ u = u^i + u^s, \\ \lim_{r\to+\infty} r^{(n-1)/2}\big(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\big) = 0, \end{cases}$$

où u^iest une solution de $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, et on a noté $r = |x|$. On a $u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(n-1)/2}} u_\infty(\widehat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^{(n+1)/2}}\right)$, où on a noté $\widehat{x} = x/|x|$.

Si $u^i(x) = e^{ikxd}$, où $d \in \mathbb{S}^{n-1}$, on note la fonction u_∞ associée par $u_\infty(\widehat{x}, d)$. Si on suppose Ω connexe et contenant 0, l'espace engendré par les $u_\infty(\cdot, d)$ quand on fait varier $d \in \mathbb{S}^{n-1}$ est dense dans $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ si et seulement si $(0, 0)$ est la seule solution de (1). Rappelons qu'on peut interpréter $u_\infty(\widehat{x}, d)$ comme le premier terme pertinent créé par par l'onde plane en présence d'une perturbation $n(x)$ dans Ω. L'objet du scattering inverse est, à partir de la connaissance des fonctions $u_\infty(\widehat{x}, d)$ de reconstruire $n(x)$. Dans les algorithmes itératifs pour reconstruire $n(x)$ la densité $u_\infty(\widehat{x}, d)$ est utilisée. Sur ce sujet le lecteur pourra consulter l'article de synthèse de Cakoni et Haddar [5].

*Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles St Quentin, CNRS UMR 8100, 45, Avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France. e-mail : `luc.robbiano@uvsq.fr`.

Ce problème a été très étudié ces dernières années par les spécialistes des problèmes inverses et plus récemment par les spécialistes de l'analyse spectrale des problèmes elliptiques. La première réaction devant les problèmes (1) ou (2) est de se demander pourquoi les résultats ne sont pas des conséquences directes des théories elliptiques usuelles. Il y a deux difficultés, la première est que le problème n'est pas auto-adjoint même si $n(x)$ est à valeurs réelles. Cela a pour conséquence que l'existence des valeurs propres et des fonctions propres n'est pas assurée, qu'on ne peut pas utiliser la formule du mini-max et de tous les outils liés au caractère auto-adjoint des problèmes. La deuxième difficulté, qui n'est pas non plus visible directement sur l'écriture des équations (1) ou (2) est que la résolvante n'est pas compact. On verra plus loin que cette difficulté peut être contournée mais il reste que le problème n'est pas elliptique au sens suivant, si on met des second membre à droite des équations (1) ou (2) les solutions obtenues pour k^2 dans l'ensemble résolvant ne gagnent pas deux crans de régularité comme pour un problème elliptique usuel.

Un grand nombre de résultats ont été obtenus ces dernières années. Si $n(x)$ est à valeurs réelles, Päivärinta et Sylvester [20] ont prouvé qu'il existe des valeurs propres intérieurs de transmission. Ce résultat a été généralisé par la suite par Cakoni, Gintides, et Haddar [4] qui ont prouvé qu'il existait une infinité de valeurs propres intérieurs de transmission réelles. Pour $n(x)$ à valeurs complexes Sylvester [25] a prouvé que l'ensemble des valeurs propres intérieurs de transmission est discret fini ou infini, mais sans prouver qu'il existait de telles valeurs propres intérieurs de transmission. Suivant la façon d'écrire le problème le fait que $n(x)$ prenne la valeur 1 dans certaine partie de Ω peut-être gênant. Ces zones sont appelées des cavités puisqu'elles ont le même indice de réfraction que l'extérieur. Ces cas ont été étudiés par Cakoni, Çayören, et Colton [2], Cakoni, Colton, et Haddar [3]. Des cas où les laplaciens sont remplacés par des opérateurs d'ordre $m > 2$ ont été étudiés par Hitrik, Krupchyk, Ola, et Päivärinta [10, 11].

Dans le prolongement de [4], Lakshtanov et Vainberg ont étudié la fonction de comptage des valeurs propres intérieurs de transmission réelles. Dans [14, 15, 16], ils ont étudié un problème analogue à (1) mais avec d'autres conditions au bord, ce qui rend le problème elliptique. Dans [17] et [18], ils donnent des informations sur la fonction de comptage associée au problème (1). or real interior transmission eigenvalues.

De nombreux résultats récents ont été prouvés sur la fonction de comptage. Citons Dimassi et Petkov [8], Pham et Stefanov [22], Faierman [9], Petkov et Vodev [21].

Les résultats principaux sont les théorèmes 4 et 5. Le théorème 4 énonce que la fonction de comptage est majoré par Ct^n et on a la formule de trace si on note λ_j les valeurs propres comptées avec multiplicité

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_j^p - z^p} = (2\pi)^{-n}|z|^{-p+n/2}\int_\Omega\int\big(((1+m(x)^{-p}|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1} + (|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1}\big)\,d\xi dx + o(|z|^{-p+n/2}),$$

quand $|z|$ tend vers $+\infty$ et est sur une demi-droite hors d'un certain domaine lié à l'image de $n(x)$.

Dans le cas où $n(x) > 0$ est à valeurs réelles cette formule permet en appliquant un théorème taubérien d'obtenir un équivalent à la fonction de comptage ce qui fait l'objet du théorème 5. Ce résultat a aussi été démontré par Faierman [9] dans une prépublication et plus récemment étendu par Petkov et Vodev [21] qui donne une estimation plus précise du reste.

2 Notations et résultats

Soit Ω un domaine à bord $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ et soit $n(x) \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ une fonction à valeurs complexes. On note $m(x) = n(x) - 1$. Dans les articles [23] et [24] nous avons considéré aussi le cas où $n(x) = n_1(x) + in_2(x)/k$ avec les $n_j(x)$ sont à valeurs réelles, mais les résultats sont essentiellement identiques à ceux avec $n_2(x) = 0$, ce terme n'intervenant que comme une perturbation du terme principal. Pour simplifier les énoncés nous ne considérons pas ce cas ici.

On suppose que pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on a $n(x) \neq 0$ ou d'un façon équivalente $m(x) \neq -1$. On suppose qu'il existe un voisinage W de $\partial\Omega$ tel que pour $x \in \overline{W}$, $n(x) \neq 1$ ou d'une façon équivalente $m(x) \neq 0$. Comme $n(x)$ est une fonction régulière, si $n(x) \neq 1$ pour tout $x \in \partial\Omega$ un tel voisinage W existe.

On note C_e le cone de $\mathbb{C}$ defini par

$$C_e = \{z \in \mathbb{C},\ \exists x \in \overline{\Omega},\ \exists \lambda \geq 0,\ \text{tel que } z = \lambda(1+\overline{m}(x))\}.$$

L'intérêt de l'introduction de ce cone sera expliqué ci-dessous.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $B_z(u,v) = (f,g)$ l'application définie de $H_0^2(\Omega) \oplus \{v \in L^2(\Omega),\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ dans $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{-1}{1+m}\Delta - z\right)u - \frac{m}{1+m}v = f \text{ dans } \Omega \\ (-\Delta - z)v = g \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{3}$$

Si $z \notin C_e$ alors le symbole de $\frac{-1}{1+m}\Delta - z$, c'est-à-dire $\frac{1}{1+m}|\xi|^2 - z$, est non nul. Cette propriété permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 1. *Supposons $C_e \neq \mathbb{C}$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que B_z est une bijection de $H_0^2(\Omega) \oplus \{v \in L^2(\Omega),\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ sur $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$.*

Si pour $z \in \mathbb{C}$ la solution $B_z(u,v) = (f,g)$ existe, on note cette solution $R_z(f,g) = (u,v)$.

Théorème 2. *Supposons $C_e \neq \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que la résolvante R_z de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ sur lui-même est compact.*

En particulier, en appliquant la théorie de Riesz, le spectre est fini ou infini dénombrable. Si $\lambda \neq 0$ est dans le spectre, alors λ est une valeur propre et son espace propre généralisé (c'est-à-dire $\ker(R_z - \lambda I)^k$ pour k assez grand) est de dimension fini.

Remarque 1. On peut préciser le résultat précédent, si $z_0 \notin C_e \cup [0,\infty)$ alors pour tout $\lambda > 0$ assez grand on peut prendre $z = \lambda z_0$ dans les théorèmes 1 et 2. En fait on estime la résolvante à l'extérieur d'un voisinage conique de $C_e \cup [0,\infty)$. En particulier si $n(x) > 0$ les valeurs propres sont toutes dans tout voisinage conique de $(0,+\infty)$, sauf pour un nombre fini de valeurs propres.

En général pour un problème non auto-adjoint, on ne peut pas assurer que le spectre est non vide. Le théorème suivant, où l'hypothèse sur C_e va être renforcée, affirme que le spectre n'est pas vide

Nous dirons que C_e est contenu dans un secteur d'angle inférieur à θ s'il existe $\theta_1 < \theta_2$, tel que $C_e \subset \{z \in \mathbb{C},\ z = 0 \text{ ou } \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi},\ \text{où } \theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2\}$, et $\theta_2 - \theta_1 \leq \theta$.

Théorème 3. *Supposons que C_e est contenu dans un secteur d'angle inférieur à θ avec $\theta < 2\pi/p$ où $4p > n$ et $\theta < \pi/2$. Alors il existe z tel que le spectre de R_z est infini et l'espace engendré par les sous espaces propres généralisés est dense dans $H_0^2(\Omega) \oplus \{v \in L^2(\Omega),\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$.*

Remarque 2. Ces résultats utilisent la théorie qu'on trouve dans le livre de Agmon [1] et qui s'appuie sur les résultats spectraux des opérateurs de Hilbert-Schmidt. On déduit que le spectre est infini en prouvant que les espaces propres généralisés engendrent un espace dense dans l'adhérence de l'image de R_z. Dans [23] on a prouvé sous les conditions données dans le théorème que R_z^p est un opérateurs de Hilbert-Schmidt. On peut également déduire la décomposition spectrale de R_z de celle de R_z^p.

Soit z_j les élément du spectre de R_z et E_j l'espace propre généralisé associé. On note $N(t) = \sum_{|z_j|^{-1} \leq t^2} \dim E_j$.

Si z_j est une valeur propre de R_z, $\lambda_j = -z + 1/z_j$ est une valeur propre de B_0 et on a $N(t) \sim \sharp\{j,\ |\lambda_j| \leq t^2\}$, où λ_j est compté avec sa multiplicité, c'est-à-dire autant de fois que la dimension de E_j.

Nous noterons ω_j pour $j = 1, \ldots, p$, les racines de $z^p = 1$.

Théorème 4. *On suppose comme dans le théorème 3 que $\theta < 2\pi/p$ and $\theta < \pi/2$ où p vérifie $2p > n$ et $4p > 4 + n$. Alors il existe $C > 0$ tel que $N(t) \leq Ct^n$.*

De plus, soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = 1$ et on suppose que $\omega_j\mu \notin C_e \cup (0,+\infty)$ pour $j = 1, \ldots, p$. On défini $a(x) = (1+m(x))^{-1}$. On fixe z_0 tel que la résolvante R_{z_0} existe et soit μ_j tels que $1/\mu_j$ soit les valeurs propres de R_{z_0} comptées avec leur multiplicité. Alors on a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu_j^p - z^p} = (2\pi)^{-n}|z|^{-p+n/2}\int_\Omega\int \big((a^p|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1} + (|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1}\big)\,d\xi dx + o(|z|^{-p+n/2}), \quad (4)$$

où $z = r\mu$ et r tend vers $+\infty$.

Remarque 3. La première partie du théorème a été prouvée dans [24] ce qui améliore le résultat obtenu précédemment ([23, Theorem 7]). Voir également les articles [8] et [9] pour des résultats analogues.

Théorème 5. *Supposons $n(x) = 1 + m(x) > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors*

$$N(t) = \alpha t^n + o(t^n) \text{ où } \alpha = (2\pi)^{-n}\, \mathit{Vol}(B_1)\int_\Omega ((1+m(x))^{n/2}+1)dx.$$

Remarque 4. Par une étude plus précise au voisinage du bord, on peut obtenir un reste plus petit dans la formule (4) mais cette estimation ne permet pas d'obtenir un résultat meilleur pour la fonction de comptage $N(t)$. Malliavin [19] a prouvé un théorème tauberien permettant d'avoir un reste meilleur mais cela demande d'avoir une estimation du reste $\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_j^p - z^p}$ dans un domaine du plan complexe hors d'une zone parabolique entourant $(0,\infty)$. Ici nous ne pouvons estimer le reste que dans un domaine hors d'un voisinage conique de $(0,\infty)$. Des résultats plus précis que ceux présentés ici on été donné par Hitrik, Krupchyk, Ola et Päivärinta [12] sur la localisation des valeurs propres et très récemment Petkov et Vodev [21] ont donné des résultats sur la fonction de comptage avec une estimation meilleure du reste.

3 Quelques éléments de démonstration

Le résultat techniquement essentiel pour démontrer les théorèmes cités dans la partie précédente est un résultat de régularité que nous allons maintenant citer.

Les théorèmes de régularité sont énoncés dans les espaces de Sobolev semi-classique où le paramètre semi-classique est relié au paramètre spectral.

On note la norme semi-classique de $H^s(\mathbb{R}^n)$ par $\|w\|^2_{H^s_{sc}} = \int (1+h^2|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi$. Si w est une distribution sur Ω on note $\|w\|_{\overline{H}^s_{sc}(\Omega)} = \inf\{\|\beta\|_{H^s_{sc}}$, où $\beta_{|\Omega} = w\}$. Si s est un entier positif alors $\sum_{|\alpha|\le s}\|(h\partial)^\alpha w\;\|^2_{L^2(\Omega)}$ est une quantité équivalente à $\|w\|^2_{\overline{H}^s_{sc}(\Omega)}$ uniformément par rapport à h. Quand $h=1$ on note l'espace associé $\overline{H}^s(\Omega)$.

En multipliant l'équation (3) par h^2, en posant $a(x) = (1+m(x))^{-1}$, $V(x) = m(x)(1+m(x))^{-1}$ et $\mu = h^2 z$, on obtient

$$\begin{cases} \big(-ah^2\Delta - \mu\big)u - h^2Vv = h^2 f \text{ in } \Omega,\\ (-h^2\Delta-\mu)v = h^2 g \text{ in } \Omega.\end{cases} \quad (5)$$

Le résultat de régularité est le suivant.

Théorème 6. *Supposons que pour tout $x\in\overline{\Omega}$, et tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, $a(x)|\xi|^2-\mu\neq 0$ et $|\xi|^2-\mu\neq 0$. Soit $s\ge 0$, il existe $h_0>0$ tel que pour $f\in\overline{H}^{2+s}_{sc}(\Omega)$, $g\in\overline{H}^{s}_{sc}(\Omega)$, $u\in\overline{H}^{1+s}_{sc}(\Omega)\cap H^2_0(\Omega)$ and $v\in\overline{H}^{s}_{sc}(\Omega)$ alors, pour $h\in]0,h_0[$, la solution du système (5) vérifie, $u\in\overline{H}^{4+s}_{sc}(\Omega)$, $v\in\overline{H}^{2+s}_{sc}(\Omega)$ et de plus*

$$\|u\|_{\overline{H}^{4+s}_{sc}(\Omega)} \lesssim h^2\|f\|_{\overline{H}^{2+s}_{sc}(\Omega)} + h^4\|g\|_{\overline{H}^{s}_{sc}(\Omega)} \quad (6)$$

$$\|v\|_{\overline{H}^{2+s}_{sc}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\overline{H}^{2+s}_{sc}(\Omega)} + h^2\|g\|_{\overline{H}^{s}_{sc}(\Omega)}. \quad (7)$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin d'un décalage de deux dans la régularité de f et g. Néanmoins nous avons aussi besoin de considérer des seconds membres où $f\in L^2(\Omega)$. Le résultat de régularité est le suivant où nous allons prendre $g=0$ puisque le théorème 6 traite déjà le cas où $g\in L^2(\Omega)$.

Théorème 7. *Supposons que pour tout $x \in \overline{\Omega}$, et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a(x)|\xi|^2 - \mu \neq 0$ et $|\xi|^2 - \mu \neq 0$. Il existe $h_0 > 0$ tel que pour $h \in]0, h_0[$, $f \in \overline{H}^s_{sc}(\Omega)$, $g = 0$, la solution du système (3) où $u \in \overline{H}^{s+1}_{sc}(\Omega) \cap H^2_0(\Omega)$, $v \in \overline{H}^s_{sc}(\Omega)$ et $\Delta v \in L^2(\Omega)$, de plus on a*

$$\|u\|_{\overline{H}^{s+2}_{sc}(\Omega)} \lesssim h^2 \|f\|_{\overline{H}^s_{sc}(\Omega)}$$
$$\|v\|_{\overline{H}^s_{sc}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{\overline{H}^s_{sc}(\Omega)}.$$

Dans les estimations des théorèmes 6 et 7 les espaces de régularité sont importants mais aussi nous utiliserons par la suite les puissances de h dans les preuves des résultats sur la fonction de comptage.

Les théorèmes 1 et 2 sont essentiellement des conséquences du théorème 6. En effet, théorème 6 implique que l'image de B_z est fermé et injectif si $|z|$ assez grand et est hors de l'ensemble caractéristique des symboles. On vérifie aussi que l'adjoint de B_z a la même structure que B_z, d'où B_z^* est injectif, ce qui implique que l'image de B_z est dense d'où l'opérateur est inversible.

De plus la résolvante R_z opère de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ dans $H^4(\Omega) \oplus H^2(\Omega)$ ce qui implique que R_z est compact.

Par une autre méthode et avec des hypothèses différentes les résultats des théorèmes 1 et 2 ont été pour l'essentiel prouvés par Sylvester [25].

Le théorème 3 est basé sur un résultat sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt qu'on peut trouver dans le livre de Agmon [1].

Proposition 3.1. *Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$. On suppose qu'il existe, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N < 2\pi$ tels que $\theta_k - \theta_{k-1} < \pi/2$ pour $k = 2, \ldots, N$ et $2\pi - \theta_N + \theta_1 < \pi/2$. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\sup_{r \geq r_0} \|T_{re^{i\theta_k}}\|_0 \leq C$, pour $k = 1, \ldots, N$. De plus on suppose qu'il existe (λ_j) tels $|\lambda_j| \to +\infty$ vérifiant pour tout (f, g) de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$, $(T_{\lambda_j} f|g) \to 0$. Alors l'espace engendré par les fonctions propres généralisées associées à une valeur propre non nulle de T est dense dans l'adhérence de l'image de T.*

Le lemme suivant donne un critère de type régularité pour qu'un opérateur soit de Hilbert-Schmidt.

Lemma 3.2. *Soit $m > n/2$, il existe $C > 0$ tel que si T est un opérateur borné de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \to \overline{H}^{m+2}(\Omega) \oplus \overline{H}^m(\Omega)$, alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt et*

$$|||T||| \leq C \|T\|_m^{n/(2m)} \|T\|_0^{1-n/(2m)}.$$

Nous avons noté $|||T|||$ la norme Hilbert-Schmidt de T et $\|T\|_m$ la norme de T de $\overline{H}^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \to \overline{H}^{m+2}(\Omega) \oplus \overline{H}^m(\Omega)$.

De la proposition 3.1 et du lemme 3.2 on déduit que $T = R_z^p$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt où p vérifie les hypothèses du théorème 3. Il suffit alors de relier la décomposition spectrale de R_z^p à celle de R_z.

La preuve du théorème 4 est basée sur les lemmes 3.3 et 3.4 données ci-dessous. Mais tout d'abord introduisons quelques notations.

On pose $S = R_{z_0}$ et $T = S^p$ où p satisfait les hypothèses du théorème 4. On pose $T_\lambda = T(I - \lambda T)^{-1}$. Comme T_λ est une matrice d'opérateurs on pose

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix},$$

le noyau de T_{z^p}.

Lemma 3.3. *Sous les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème 4, il existe $C > 0$ tel que $N(t) \leq Ct^n$.*

De plus, soit V un voisinage conique de $C_e \cup [0, \infty)$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, vérifiant $|z| \geq R$ et $\omega_j z \notin \overline{V}$, on a

$$\int_\Omega K_{11}(x,x)dx + \int_\Omega K_{22}(x,x)dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_j^p - z^p}.$$

Lemma 3.4. *Sous les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème 4, on a*

$$|z|^{p-n/2}\left(\int_\Omega K_{11}(x,x)dx + \int_\Omega K_{22}(x,x)dx\right)$$

converge vers

$$(2\pi)^{-n}\int_\Omega\int \left((a^p|\xi|^{2p} - \mu^p)^{-1} + (|\xi|^{2p} - \mu^p)^{-1}\right) d\xi dx$$

quand $|z|$ tend vers $+\infty$ où on a noté $z = r\mu$ et $|\mu| = 1$.

Clairement les lemmes 3.3 et 3.4 implique le théorème 4.

La preuve du lemme 3.3 repose sur les estimations de la résolvante, en particulier la prise en compte précise des puissances de h. Un des problèmes est que les puissances de h ne sont pas les mêmes dans les estimations (6) et (7) devant les termes f et g. Cela pose des problèmes pour estimer en fonction de h la norme des produits de R_z.

Nous noterons ω_j pour $j = 1, \dots, p$, les racines de $z^p = 1$. De cela on déduit que

$$T_{z^p} = S^p \prod_{j=1}^p (1 - \omega_j z S)^{-1} = \prod_{j=1}^p S_{\omega_j z}.$$

Pour obtenir des estimations sur T_{z^p} à partir de celles obtenues sur R_z remarquons que, en notant $S = R_{z_0}$, on a

$$S_z = (R_{z_0})_z = R_{z_0}(I - zR_{z_0})^{-1} = (R_{z_0}^{-1} - z)^{-1} = (B_{z_0} - z)^{-1} = (B_0 - z_0 - z)^{-1} = R_{z_0+z},$$

si la résolvante R_{z_0+z} existe. La translation de z_0 ne joue aucun rôle dans la preuve car nous travaillons dans un cône et pour une grande valeur de $|z|$. Pour préciser les estimations obtenues aux théorèmes 6 et 7, notons

$$S_z = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

et nous obtenons,

$$\begin{aligned}
&S_{11} : \overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega) \to \overline{H}_{sc}^{2k+2}(\Omega) \text{ with } \|S_{11}\|_{\overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega)\to\overline{H}_{sc}^{2k+2}(\Omega)} \leq C|z|^{-1} \\
&S_{12} : \overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega) \to \overline{H}_{sc}^{2k+4}(\Omega) \text{ with } \|S_{12}\|_{\overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega)\to\overline{H}_{sc}^{2k+4}(\Omega)} \leq C|z|^{-2} \\
&S_{21} : \overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega) \to \overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega) \text{ with } \|S_{21}\|_{\overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega)\to\overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega)} \leq C \\
&S_{22} : \overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega) \to \overline{H}_{sc}^{2k+2}(\Omega) \text{ with } \|S_{22}\|_{\overline{H}_{sc}^{2k}(\Omega)\to\overline{H}_{sc}^{2k+2}(\Omega)} \leq C|z|^{-1},
\end{aligned} \tag{8}$$

où $k \geq 0$ et le paramètre h est relié à z par la relation $zh^2 = \mu$ avec $|\mu| = 1$. Pour pallier le fait que le normes de ces opérateurs sont estimés avec des puissances de $|z|$ différentes, nous introduisons,

$$\Lambda_z = \begin{pmatrix} \sqrt{|z|} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|z|} \end{pmatrix}.$$

Cela permet d'obtenir, à partir de la formule

$$\Lambda_z A \Lambda_z^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & |z|A_{12} \\ (1/|z|)A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

On déduit de (8) que $\Lambda_z S_{\omega_j z}\Lambda_z^{-1} : L^2(\Omega)\oplus L^2(\Omega) \to \overline{H}^2_{sc}(\Omega)\oplus L^2(\Omega)$ avec une norme d'opérateur inférieure à $C|z|^{-1}$ et $\Lambda_z S_{\omega_j z}\Lambda_z^{-1} : \overline{H}^{2k+2}_{sc}(\Omega)\oplus \overline{H}^{2k}_{sc}(\Omega) \to H^{2k+4}_{sc}(\Omega)\oplus \overline{H}^{2k+2}_{sc}(\Omega)$ avec une norme d'opérateur inférieure à $C|z|^{-1}$. Comme

$$\Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1} = \prod_{j=1}^{p} \Lambda_z S_{\omega_j z}\Lambda_z^{-1},$$

on en déduit que

$$\Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1} : L^2(\Omega)\oplus L^2(\Omega) \to \overline{H}^{2p}_{sc}(\Omega)\oplus \overline{H}^{2p-2}_{sc}(\Omega),$$

avec une norme d'opérateur inférieure à $C|z|^{-p}$.

On peut appliquer l'estimation suivante,

$$|||D||| \le C\|D\|_m^{n/(2m)}\|D\|_0^{1-n/(2m)},$$

où $\|D\|_m$ est la norme opérateur de l'application $L^2(\Omega)\oplus L^2(\Omega) \to \overline{H}^m(\Omega)\oplus\overline{H}^m(\Omega)$ (attention les notations ne sont pas ici les mêmes que celles du lemme 3.2). On applique cette inégalité à $B = \Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1}$ avec $m = 2p-2 > n/2$ et on obtient

$$|||\Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1}||| \lesssim |z|^{-\frac{n}{4(p-1)}}|z|^{-(1-\frac{n}{4(p-1)})p} = |z|^{-p+n/4}.$$

Pour estimer $N(t)$, notons μ_j les complexes tels que μ_j^{-1} sont les valeurs propres de S comptées avec leurs multiplicités, alors $\frac{1}{\mu_j^p - z^p}$ sont les valeurs propres de T_{z^p} et aussi de $\Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1}$. On a

$$\sum_j \frac{1}{|\mu_j^p - z^p|^2} \le |||\Lambda_z T_{z^p}\Lambda_z^{-1}|||^2 \le C|z|^{-2p+n/2}.$$

Soit $\mu\in\mathbb{C}$ tel que $|\mu| = 1$, et $\omega_j\mu \notin C_e\cup(0,\infty)$ pour $j = 1,\dots,p.$. On pose $z = t^2\mu$ et si $|\mu_j| \le t^2$, on a $|\mu_j^p - z^p| \le 2t^{2p}$. On en déduit que

$$\sum_{|\mu_j|\le t^2} \frac{1}{4t^{4p}} \le \sum_j \frac{1}{|\mu_j^p - z^p|^2} \le |||T_{z^p}|||^2 \le Ct^{-4p+n},$$

donc $N(t) \le Ct^n$.

Pour la preuve de la formule (4) je renvoie à l'article [24].

La preuve du théorème 5 est une conséquence du théorème taubérien suivant qui est cité dans Agmon [1, th. 14.5], et dont la preuve se trouve dans Karamata [13].

Théorème 8 (Tauberian Theorem). *Soit $\sigma(\lambda)$ une fonction croissante pour $\lambda > 0$, Soit $0 < a < 1$, et soit $\alpha > 0$. On suppose que quand $t\to+\infty$,*

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+t} = \alpha t^{a-1} + o(t^{a-1}),$$

alors pour $\lambda\to+\infty$

$$\sigma(\lambda) = \alpha\frac{\sin\pi a}{\pi a}\lambda^a + o(\lambda^a).$$

Le théorème 4 implique

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{\mu_j^p - z^p} = A|z|^{-p+n/2} + o(|z|^{-p+n/2}),$$

$$\text{où } A = (2\pi)^{-n}\int_\Omega\int \left((a^p|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1} + (|\xi|^{2p}-\mu^p)^{-1}\right)d\xi dx,\ \text{avec } \mu = z/|z|.$$

On pose $z = t^{1/p}e^{i\pi/p}$, où $t > 0$, on a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu_j^p + t} = At^{-1+n/2p} + o(t^{-1+n/2p}).$$

En notant $\sigma(\lambda) = \sharp\{j \in \mathbb{N},\ \mu_j^p \leq \lambda\}$ où les μ_j sont comptés avec leur multiplicité, on a

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu_j^p + t} = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda + t} = At^{-1+n/2p} + o(t^{-1+n/2p}).$$

On obtient alors le théorème 5 par le théorème taubérien et des changements de variables (voir la preuve dans [24]).

References

[1] Agmon Shmuel, Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2, 1965.

[2] Cakoni Fioralba, Çayören Mehmet, Colton David, Transmission eigenvalues and the nondestructive testing of dielectrics. Inverse Problems **24** (2008) 065016.

[3] Cakoni Fioralba, Colton David, Haddar Houssem, The interior transmission problem for regions with cavities. SIAM J. Math. Anal. **42** (2010) 145–162.

[4] Cakoni Fioralba, Gintides Drossos, Haddar Houssem, The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues. SIAM J. Math. Anal. **42** (2010) 237–255.

[5] Cakoni Fioralba, Haddar Houssem, Transmission Eigenvalues in Inverse Scattering Theory. `hal-00741615`

[6] Colton David, Kirsch Andreas, Päivärinta Lassi, Far-field patterns for acoustic waves in an inhomogeneous medium. SIAM J. Math. Anal. **20** (1989) 1472–1483.

[7] Colton David, Kress Rainer, Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Applied Mathematical Sciences, **93**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] Dimassi Mouez , Petkov Vesselin, Upper bound for the counting function of interior transmission eigenvalues, `arXiv:1308.2594`.

[9] Faierman Melvin, Transmission eigenvalues for parameter-elliptic boundary problems, preprint.

[10] Hitrik Michael, Krupchyk Katsiaryna, Ola Petri, Päivärinta Lassi. Transmission eigenvalues for operators with constant coefficients. SIAM J. Math. Anal. **42** (2010) 2965–2986.

[11] Hitrik Michael, Krupchyk Katsiaryna, Ola Petri, Päivärinta Lassi, Transmission eigenvalues for elliptic operators. SIAM J. Math. Anal. **43** (2011) 2630–2639.

[12] Hitrik Michael, Krupchyk Katsiaryna, Ola Petri, Päivärinta Lassi, The interior transmission problem and bounds on transmission eigenvalues, `arXiv:1009.5640v1`.

[13] Karamata, J., Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze. Math. Z. **33** (1931) 294–299.

[14] Lakshtanov Evgeny, Vainberg Boris, Ellipticity in the Interior Transmission Problem in Anisotropic Media. SIAM J. Math. Anal. **44** (2012) 1165–1174.

[15] Lakshtanov Evgeny, Vainberg Boris, Remarks on interior transmission eigenvalues, Weyl formula and branching billiards. J. Phys. A: Math. Theor **45** 125202.

[16] Lakshtanov Evgeny, Vainberg Boris, Bounds on positive interior transmission eigenvalues. `arXiv:1206.3782v2`.

[17] Lakshtanov Evgeny, Vainberg Boris, Applications of elliptic operator theory to the isotropic interior transmission eigenvalue problem. `arXiv:1212.6785`.

[18] Lakshtanov Evgeny, Vainberg Boris, Sharp Weyl Law for Signed Counting Function of Positive Interior Transmission Eigenvalues. `arXiv:1401.6213`.

[19] Malliavin, Paul, Un théorème taubérien relié aux estimations de valeurs propres. Séminaire Jean Leray (1962-1963) 224–231 `numdam`.

[20] Päivärinta Lassi, Sylvester John, Transmission eigenvalues. SIAM J. Math. Anal. **40** (2008) 738–753.

[21] Petkov Vesselin, Vodev Georgi Asymptotics of the number of the interior transmission eigenvalues. `arXiv:1403.3949`.

[22] Pham Ha, Stefanov Plamen, Weyl asymptotics of the transmission eigenvalues for a constant index of refraction. `arXiv:1309.3616`.

[23] Robbiano Luc, Spectral analysis on interior transmission eigenvalues. Inverse Problems **29** (2013) 104001

[24] Robbiano Luc, Counting function for interior transmission eigenvalues. `hal-00875903`.

[25] Sylvester John, Discreteness of Transmission Eigenvalues via Upper Triangular Compact Operators. SIAM J. Math. Anal. **44** (2012) 341–354.