



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2013-2014


Giovanni S. Alberti et Yves Capdeboscq

**À propos de certains problèmes inverses hybrides**

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications* (2013-2014), Exposé n° II, 9 p.

<[http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP\\_2013-2014\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2013-2014____A2_0)>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,  
École polytechnique, 2013-2014.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
UMR 7640 CNRS/École polytechnique  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## À PROPOS DE CERTAINS PROBLÈMES INVERSES HYBRIDES

GIOVANNI S. ALBERTI AND YVES CAPDEBOSCO

Dans cet exposé, nous présentons quelques résultats récents concernant certains problèmes d'identification de paramètres de type hybride, aussi appelés multiphysiques, pour lesquels le modèle physique sous-jacent est une équation aux dérivées partielles elliptique.

### 1. INTRODUCTION

L'un des problèmes inverses les plus étudiés ces trente dernières années est le problème de la tomographie d'impédance. Dans un domaine borné et régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , représentant un conducteur de conductivité isotrope variable  $\gamma \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ , le potentiel électrique  $u$  satisfait

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \gamma \partial_n u &= j \text{ sur } \partial\Omega,\end{aligned}$$

où  $j$  est le courant injecté sur le bord, et  $n$  est la normale sortante. La conductivité est supposée bornée et positive,

$$0 < K^{-1} < \gamma < K \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Pour que le problème ait une solution,  $j \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $\int_{\partial\Omega} j = 0$ . Pour s'assurer que la solution est unique, on impose  $\int_{\partial\Omega} u = 0$ . L'application de Dirichlet-Neumann est alors

$$\begin{aligned}\Lambda_\gamma : H^{-1/2}(\partial\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega), \\ j &\rightarrow u|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

En principe, cet opérateur peut être testé expérimentalement, depuis le bord du domaine  $\Omega$  – donc de manière non invasive. Le problème de la tomographie d'impédance, aussi appelé Problème de Calderón, à la suite de l'article fondateur de A. P. Calderón [19], est de déterminer  $\gamma$  à partir de  $\Lambda_\gamma$ . Cette détermination est théoriquement possible en dimension 2 [13], et sous des hypothèses de régularité adaptées, en dimension supérieure (voir [26] pour un panorama). Si pour des conductivités suffisamment régulière ( $C^2$  suffit [4]) ce problème est bien posé au sens d'Hadamard, il est notoirement mal conditionné. La stabilité est au plus logarithmique, pour des conductivités  $C^m$ ,  $m \geq 2$  [23], ce qui implique que seule une reconstruction très grossière est réalisable en pratique. La détermination non invasive de la conductivité d'un milieu est néanmoins désirable, en particulier dans le contexte de l'imagerie du vivant, car d'un point de vue clinique les propriétés électriques des tissus est un indicateur fiable d'évolutions dégénératives ou cancéreuses.

De nouvelles méthodes d'imagerie, développées cliniquement depuis la fin du siècle dernier, sont généralement appelées méthodes hybrides, ou multiphysiques [7]. Parmi ces méthodes, la plus courante (à la fois dans la littérature mathématique et dans le domaine expérimental) est la tomographie Opto-Acoustique,

ou Photo-Acoustique, ou Thermo-Acoustique. Tous ces termes (PA(C)T, TA(C)T, OA(C)T en anglais) sont d'un point de vue mathématique équivalent, pour la première phase de leur exploitation. Ce qui les différencie est le domaine de fréquence considéré, donc l'appareillage utilisé et l'utilisation éventuelle de rayonnement ionisant nocifs. L'inclusion de la lettre C (computed) dans les acronymes distingue les méthodes de mesure directes de celles nécessitant la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Le mécanisme est le suivant [27]. Une onde électromagnétique localisée irradie le domaine, avec une fréquence choisie dans le domaine micro-onde, radio, ou haute fréquence. Ces ondes chauffent les tissus de quelques milli-Kelvin, ce qui crée une expansion des tissus et génère une onde de pression. Pourvu que l'impulsion choisie permette de supposer que cet effet est confiné d'un point de vue thermique et élastique, l'onde de pression se propage dans le milieu suivant une équation des ondes, avec une donnée initiale ponctuelle en temps. L'inversion de ce problème comporte alors deux parties. Tout d'abord, une reconstruction de la donnée initiale à partir des mesures de l'onde de pression sur le bord extérieur du domaine. Dans un deuxième temps, l'analyse de la donnée initiale reconstruite, pour estimer les paramètres physiques dans le milieu. De très nombreux travaux ont été consacrés à la première partie du problème, considéré souvent comme une généralisation de la transformée de Radon ou un problème de contrôle de l'équation des ondes (voir par exemple [9, 10, 21] spécifiquement pour la photo-acoustique, et les nombreuses références citées). Cet exposé ne s'intéresse qu'à la seconde partie du problème, c'est à dire l'estimation des paramètres une fois la donnée initiale reconstruite. Le résultat de la première étape est qu'une densité moyenne locale de l'énergie est mesurée de manière approchée. Dans le cadre du problème de tomographie d'impédance, pour le problème

$$(1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

on a alors accès à des données internes de la forme

$$(2) \quad E_\delta[g](x) = \frac{1}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} \gamma \nabla u \cdot \nabla u + o(1),$$

où  $o(1)$  tend vers zéro avec  $\delta$ . Le petit paramètre  $\delta$  correspond à l'échelle à laquelle l'impulsion chauffante est focalisée [8], et  $D$  est la boule de rayon 1 centrée à l'origine. Plus généralement, dans le cadre de l'imagerie micro-onde, pour le modèle simplifié de Helmholtz

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_\omega) + \omega q u_\omega &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_\omega &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec  $K > q > K^{-1} > 0$ , et pour des fréquences  $\omega$  non résonantes, on a alors accès aux données internes [11]

$$(4) \quad E_\delta[\omega, g](x) = \frac{1}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} \gamma \nabla u_\omega \cdot \nabla u_\omega + o(1),$$

$$(5) \quad \text{et } e_\delta[\omega, g](x) = \frac{\omega}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} q u_\omega^2 + o(1),$$

Des différences importantes distinguent les problèmes (1)-(2) et (3)-(5) du problème de Calderón. Les informations internes disponibles simplifient énormément l'estimation des paramètres. Par contre, le domaine complet de l'opérateur Dirichlet-Neumann n'est pas accessible : seulement quelques données au bord, peu oscillantes et non modifiables, sont imposables en pratique. Les formules (4) ou (5) n'étant utilisable que lorsque

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} \gamma \nabla u_\omega \cdot \nabla u_\omega > 0 \text{ (ou } \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} q u_\omega^2 > 0),$$

la difficulté est de déterminer, indépendamment de  $\gamma$  et  $q$ , quelques conditions au bord  $g$  (et quelques fréquences  $\omega$ ) telles que ces inégalités soient satisfaites pour l'une d'entre elles. Ce n'est pas suffisant, et d'autres contraintes doivent être introduites. Cet exposé s'attarde sur ces deux questions.

## 2. DES CONTRAINTES PONCTUELLES PLUTÔT QUE CONTRAINTES MOYENNES

Considérons le problème de conduction (1), et la donnée interne (2)

$$E_\delta[g](x) = \frac{1}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} \gamma \nabla u \cdot \nabla u + o(1).$$

Il est bien connu grâce au théorème de Liouville que  $\int_{\delta D+x} \gamma \nabla u \cdot \nabla u > 0$  si  $g$  n'est pas constant. Des résultats de continuation unique plus précis sont disponibles. Si on suppose  $\gamma \in W^{2,\infty}$ , en utilisant que  $\nabla u$  est solution d'un système elliptique faiblement couplé,

$$\Delta \partial_j u + (\nabla \ln \gamma) \cdot \nabla (\partial_j u) + \sum_k (\partial_{jk} \ln \gamma) \partial_k u = 0 \text{ dans } \Omega,$$

on obtient [6] que pour tout  $\delta < \delta_0$ ,

$$\|\nabla u\|_{B_\delta(x)}^2 \geq C \delta^N \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla u,$$

où les constantes  $r_0$ ,  $C$  et  $N$  dépendent que bornes a priori sur  $\gamma$ ,  $\nabla \gamma$  et  $\nabla^2 \gamma$  et du domaine  $\Omega$ . Mais  $N > d$ , et donc cela ne prouve pas que la donnée interne est bien représentée par  $\frac{1}{\delta^d |D|} \int_{\delta D+x} \gamma \nabla u \cdot \nabla u$ .

On ne peut pas passer outre cette difficulté, même par une approche numérique expérimentale. En voici une illustration. Supposons une estimation de  $\gamma$  est donnée par

$$\gamma \approx \frac{\int_{\delta D+x} \gamma \nabla u \cdot \nabla u}{\int_{\delta D+x} \nabla u \cdot \nabla u} = \frac{E(x)}{\delta^{-d} |D|^{-1} \int_{\delta D+x} \nabla u \cdot \nabla u}.$$

Un schéma intuitif, en supposant que la conductivité est connue dans un voisinage de  $\partial\Omega$ , est alors de considérer le système linéaire couplé

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F(x, v) \nabla u_\delta) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_\delta &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où, loin du bord,

$$F(\delta, x, v) = \frac{E(x)}{\delta^{-d} |D|^{-1} \int_{\delta D+x} \nabla v \cdot \nabla v},$$

et où  $v$  est solution d'un problème de conduction dont on choisit la conductivité  $a$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\nabla v) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ v &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec  $K^{-1} < a < K$ . On minimise alors l'écart à un potentiel électrique

$$I_\delta(a) = \int_{\Omega} a |\nabla v - \nabla u_\delta|^2.$$

On espère alors qu'à une constante multiplicative près, le minimiseur trouvé est proche de la vraie conductivité, autrement dit,

$$\gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\operatorname{argmin} I_\delta).$$

Cet approche ne peut marcher que si tous les minimiseurs tendent vers cette limite. Analysons ce problème en dimension 1 sur l'intervalle  $(0, 1)$ , pour une donnée au bord  $g = x$ . On a  $\min I_\delta(a) = 0$ , et pour chaque  $\delta > 0$  suffisamment petit sur  $(c, 1 - c)$  on trouve

$$a_\delta^{-1} = C\Gamma(x, \delta) \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} a_\delta^{-2}, \text{ avec } \Gamma(x, \delta) = \left( \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma^{-1} \right)^{-1} \text{ et } C \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

En multipliant par  $C\Gamma(x, \delta)$  et en utilisant la formule de la moyenne, on trouve, en posant  $b_\delta = C\Gamma(x, \delta)a_\delta^{-1}$

$$b_\delta = \frac{\Gamma^2(x, \delta)}{\Gamma^2(x + \xi, \delta)} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} b_\delta^2,$$

avec  $|\xi| < \delta$ . Comme  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma(x, \delta) = \gamma$  presque partout, on souhaite  $\lim_{\delta \rightarrow 0} b_\delta = 1$  presque partout. En simplifiant encore, comme  $\Gamma(x, \delta) \approx \Gamma(x + \xi, \delta)$ , on peut poser la même question pour le problème

$$(6) \quad f = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f^2.$$

Les solutions de (6) sont

$$f \equiv 0, f \equiv 1 \text{ et } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(\frac{\pi x}{2\delta} + \phi\right) \text{ avec } \phi \in [0, 2\pi).$$

Il existe ainsi des minimiseurs positifs oscillants indésirables. Dans la suite, nous chercherons donc à imposer des contraintes ponctuelles sur les densités d'énergie, plutôt que des moyennes locales.

### 3. FORMULES DE RECONSTRUCTIONS UTILISANT DES DONNÉES INTERNES

Supposons que l'on considère le problème de conduction (1) et que les données internes soient

$$\nabla u_i \in C^2(\Omega) \text{ pour } i = 1, \dots, d$$

correspondant à  $d$  données au bord  $g_1, \dots, g_d$ . Si

$$\det(\nabla u_1, \dots, \nabla u_d) > c > 0 \text{ dans } \Omega,$$

Alors en développant (1) on obtient, pour chaque  $i$ ,

$$\operatorname{div}(\nabla u_i) + \nabla \ln \gamma \cdot \nabla u_i = 0,$$

et ainsi

$$(7) \quad \nabla \ln \gamma = - [\nabla u_1, \dots, \nabla u_d]^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{div}(\nabla u_d) \\ \vdots \\ \operatorname{div}(\nabla u_1) \end{bmatrix}.$$

La conductivité est donc connue, à une constante multiplicative (inévitabile) près, dans tout le domaine, par une formule locale explicite utilisant les données internes. Si la conductivité est normalisée, par exemple parce qu'elle est connue près du bord, la reconstruction est complète. On peut montrer qu'il en est de même lorsque la donnée interne est la densité d'énergie ponctuelle correspondant à (2), à savoir  $^1 \gamma \nabla u_i \cdot \nabla u_j$ , en dimension deux [20] et trois [14], sous la même condition de positivité (ou de négativité) du déterminant.

La contrainte algébrique locale  $\det(\nabla u_1, \dots, \nabla u_d) > c$  se comprend facilement au regard de (7), pour l'obtention d'une formule locale et ponctuelle. Elle n'est pas nécessaire pour reconstruire  $\nabla \gamma$  : imposer qu'un seul gradient  $\nabla u$  vérifie  $|\nabla u| > c > 0$  dans  $\Omega$  suffit en dimension deux, par exemple, en suivant les caractéristiques depuis le bord. Par contre,  $d$  gradients ne suffisent pas à identifier les conductivités anisotropes. Ces deux points et les caractérisations de potentiels électriques, voir [18, 16].

Les situations dans lesquelles la contrainte  $\det(\nabla u_1, \dots, \nabla u_d) > c$  pour le problème de conduction (1) peut être garantie a priori par un choix adéquat de conditions au bord est discuté dans la section suivante. Elle ne peut jamais être satisfaite dans  $\Omega$  (ou dans un sous domaine  $\Omega'$ ) pour le problème de Helmholtz (3) dès que la fréquence  $\omega$  assez grande. Pour s'en convaincre on peut remarquer par exemple que si  $u \in H^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $u \geq 0$  sur  $\Omega' \Subset \Omega$ , alors

$$\omega \leq \min_{v \in H_0^1(\Omega')} \frac{\int \gamma \nabla v \cdot v}{\int q v^2}.$$

Il est donc nécessaire de chercher une condition assouplie, utilisant plusieurs fréquences [11]. Étant donné un intervalle de fréquences  $[a, b]$  dans lequel les mesures internes peuvent être effectuées, on considère les problèmes, pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , et  $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \in [a, b]^N$ ,

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_\omega^i) + \omega q u_\omega^i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\omega^i = g_i & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cela définit, pour chaque fréquence,  $u = (u_\omega^i) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  et  $\nabla u_\omega = (\partial_i u_\omega^j) \in \mathbb{R}^{d \times 3}$ , et les données internes sont alors

$$(9) \quad e_\omega = q (u_\omega)^T u_\omega, \text{ et } E_\omega = \gamma (\nabla u_\omega)^T (\nabla u_\omega) \text{ dans } \Omega' \Subset \Omega.$$

**Définition 1.** Pour  $\beta > 0$  et  $\Omega' \Subset \Omega$ , On dit que les données

$$\mathcal{D} = \{e_\omega \text{ et } E_\omega, \text{ avec } \omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\}\}$$

sont  $\beta$ -convenables dans  $\Omega'$  si pour tout  $x \in \Omega'$  il existe  $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  tel que  $|u_\omega^1(x)| \geq \omega\beta$ , et  $|\nabla u_\omega^2 \times \nabla u_\omega^3| \geq \beta$ .

1. En utilisant au besoin comme donnée au bord  $g_i, g_j$  et  $g_i + g_j$  on obtient comme donnée interne la densité polarisée

$$E_{ij} = \gamma \nabla u_i \cdot \nabla u_j = \frac{1}{2} (E[g_i, + g_j](x) - E[g_i, \cdot](x) - E[g_j](x)), \text{ au premier ordre.}$$

Pour un ensemble  $\beta$ -convenable de données  $\mathcal{D}$ , si  $\omega$  représente la fréquence convenable au point  $x$ , on a [1]

$$\frac{\operatorname{tr}(e_\omega) \operatorname{tr}(E_\omega) - \operatorname{tr}(e_\omega E_\omega)}{\operatorname{tr}(e_\omega)^2} \geq C(K, \sup E_\omega, \sup e_\omega) \omega^2 \beta^6,$$

et une identité algébrique,

$$\frac{1}{2} \left| \nabla \left( \frac{e_\omega}{\operatorname{tr}(e_\omega)} \right) \right|^2 = \frac{q}{\gamma} \frac{\operatorname{tr}(e_\omega) \operatorname{tr}(E_\omega) - \operatorname{tr}(e_\omega E_\omega)}{\operatorname{tr}(e_\omega)^2},$$

où  $\operatorname{tr}(M) = \sum_i M_{ii}$ , et  $|\nabla M|^2 = \sum_{i,j} |\nabla M_{ij}|^2$ . On en déduit une formule vraie en tout point de  $\Omega'$ ,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \operatorname{tr}(e_{\omega_i}) \left| \nabla \left( \frac{e_{\omega_i}}{\operatorname{tr}(e_{\omega_i})} \right) \right|^2 \right) = \frac{q}{\gamma} \sum_{i=1}^N (\operatorname{tr}(e_{\omega_i}) \operatorname{tr}(E_{\omega_i}) - \operatorname{tr}(e_{\omega_i} E_{\omega_i})).$$

Une fois la ratio  $q/\gamma$  déterminé, on peut retrouver  $\gamma$  et  $q$  de manière stable [11, 1].

#### 4. EXISTENCE DE DONNÉES CONVENABLES

Pour le problème de conduction, l'existence de données au bord indépendantes de la conductivité, permettant d'assurer que  $\det(\nabla u_1, \dots, \nabla u_d) > 0$  partout dans  $\Omega$  est bien connu. La situation est très différente en dimension deux et trois.

**Théorème 2** ([5]). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine simplement connexe, borné et ouvert, dont la frontière est une courbe simple et fermée. Soit  $G := (g_1, g_2)$  un homéomorphisme de  $\partial\Omega$  vers une courbe  $\Gamma$  fermée et convexe, et soit  $D$  le domaine convexe délimité par  $\Gamma$ . Soit  $\gamma$  une matrice symétrique, bornée par  $K^{-1}$  et  $K$ , dans  $L^\infty(\Omega)$ . Soit  $U := (u_1, u_2) \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  la solution de*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_{1,2}) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_{1,2} &= g_{1,2} \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

alors  $U$  est un homéomorphisme de  $\bar{\Omega}$  dans  $\bar{D}$ . De plus si  $U$  préserve l'orientation,

$$\log(\det(DU)) \in BMO(\tilde{D}),$$

pour tout  $\tilde{D} \Subset \Omega$ .

Si  $\gamma \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , la contrainte voulue est vérifiée  $\det DU > c > 0$ , voir [15]. Dans un domaine  $\Omega$  simplement connexe et convexe, il suffit donc de choisir  $G = I_2$  pour être sûr du résultat, c'est à dire  $g_1 = x_1$  et  $g_2 = x_2$ .

En dimension trois, il est connu que ce résultat n'est pas vrai, même si la donnée au bord est  $G = I_3$ , le domaine convexe, et la conductivité isotrope [24, 22, 17]. Nous sommes donc limité au cadre des perturbations, par exemple  $\gamma \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  et

$$(10) \quad \left\| \gamma - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \gamma \right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \kappa \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \gamma.$$

pour  $\kappa$  suffisamment petit, et borné en fonction de  $\Omega, K$ , et  $\|\gamma\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$ , on obtient par régularité elliptique que pour  $g_1 = x_1, g_2 = x_2$ , et  $g_3 = x_3$ ,  $\det(\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3) > c$ , où la constante est fonction des mêmes paramètres.

Le nouveau résultat principal que nous présentons dans cet exposé est un résultat d'existence quantitatif et constructif de données adéquates pour le problème de Helmholtz.

**Théorème 3** ([3]). *Supposons le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  convexe,  $q \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  et  $K \leq \gamma, q \leq K^{-1}$ . Étant donné un intervalle de fréquence  $[a, b]$  avec  $b > a \geq 0$  et un sous domaine  $\Omega' \Subset \Omega$ , il existe*

$$N(K, \Omega', \Omega, b - a, b, \alpha, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}}) \quad \text{et} \quad \beta(K, \Omega', \Omega, b - a, b, \alpha, \|\gamma\|_{C^{0,\alpha}})$$

pour l'ensemble de fréquences  $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  donné par

$$\omega_i = a + \frac{i-1}{N-1}(b-a), \quad i = 1, \dots, N$$

les données  $e_\omega, E_\omega$  (9) du problème (8) sont  $\beta$ -convenables dans  $\Omega'$ , pour les conditions au bord  $g_1 = 1, g_2 = x_1$  et  $g_3 = x_2$ . Lorsque  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , ce résultat reste valable lorsque la condition (10) est satisfaite.

Une borne inférieure pour la constante  $\beta$  peut-être déterminée : elle décroît rapidement avec  $b$  et  $b - a$ . Ce résultat est donc principalement applicable aux fréquences modérées. Nous espérons réduire la dépendance en  $b$  dans l'avenir.

La démonstration de ce résultat consiste en plusieurs étapes.

- (1) Il suffit de supposer que l'intervalle  $[a, b]$  ne contient pas de valeurs propres. On sait en effet que les valeurs propres du problème de Dirichlet satisfont

$$C(K, \Omega)i^{2/d} \geq \lambda_i \geq C^{-1}(K, \Omega)i^{2/d},$$

on peut donc déterminer une taille  $L > 0$  tel qu'il existe un sous ensemble que  $[c, d] \subset [a, b]$  avec  $d = c + L$  ne contenant pas de valeur propre.

- (2) Pour chaque  $x \in \Omega$ , la fonction  $\omega \rightarrow u_\omega^1(x)$  est une fonction holomorphe, avec des pôles simples aux valeurs propres de Dirichlet  $\lambda_p$  de 3. Ainsi la fonction  $\omega \rightarrow \prod_{p=1}^P (\omega - \lambda_p) u_\omega^1(x)$ , où  $P$  est le nombre de valeurs propres inférieures à  $a$ , est analytique sur le disque  $D(0, b)$  dans le plan complexe. Il en est de même pour  $\omega \rightarrow \prod_{p=1}^P (\omega - \lambda_p) \nabla u_\omega^2(x) \times \nabla u_\omega^3(x)$ .
- (3) On peut dès lors propager les propriétés satisfaites en 0 jusqu'à suffisamment de points de l'intervalle  $(a, b)$ . Pour la donnée au bord  $g_1 = 1$ , on a évidemment pour  $\omega = 0$ ,  $u_0^1 = 1 > 0$  et donc la donnée  $e_\omega$  est 1-convenable en ce point. Pour les données au bord  $g_2 = x_1$  et  $g_3 = x_2$ , la condition de positivité du déterminant est satisfaite aussi en 0 par  $\nabla u_0^2 \times \nabla u_0^3$ , pour tout  $\gamma$  en dimension 2 et lorsque (10) est satisfaite en dimension 3.
- (4) Pour rendre ce résultat quantitatif, on utilise une estimation inférieure sur le module de fonctions analytiques donnée dans [25].
- (5) Le résultat global, pour tout  $x$  et pour les  $\omega_i$  annoncés s'obtient alors grâce à la régularité elliptique de  $u_\omega$ .

Cette approche peut être généralisée à d'autres problèmes hybrides, en particulier aux modèles reposant sur les équations de Maxwell anisotrope [2] ou aux problèmes présentant des conductivités complexes [12].

#### REMERCIEMENTS

Les auteurs ont bénéficié de la 'EPSRC Science & Innovation Award to the Oxford Centre for Nonlinear PDE (EP/EO35027/1)'. Le second auteur était à Paris grâce à la Fondation Science Mathématiques de Paris et il remercie chaleureusement la Fondation pour son accueil et les moyens remarquables mis à sa disposition.



## RÉFÉRENCES

- [1] G. S. Alberti. On multiple frequency power density measurements. *Inverse Problems*, 29(11) :115007, 25, 2013.
- [2] G. S. Alberti. On multiple frequency power density measurements II. The full Maxwell's equations. *submitted*, 2013.
- [3] G. S. Alberti. Enforcing local non-zero-constraints in pde and applications to hybrid imaging problems. *sub*, page 23, 2014.
- [4] G. Alessandrini. Determining conductivity by boundary measurements, the stability issue. In Renato Spigler, editor, *Applied and Industrial Mathematics*, volume 56 of *Mathematics and Its Applications*, pages 317–324. Springer Netherlands, 1991.
- [5] G. Alessandrini and V. Nesi. Univalent  $\sigma$ -harmonic mappings. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 158 :155–171, 2001.
- [6] Giovanni Alessandrini, Antonino Morassi, Edi Rosset, and Sergio Vessella. On doubling inequalities for elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 357(2) :349–355, 2009.
- [7] H. Ammari. *An introduction to mathematics of emerging biomedical imaging*, volume 62 of *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer, Berlin, 2008.
- [8] H. Ammari, E. Bonnetier, Y. Capdeboscq, M. Tanter, and M. Fink. Electrical impedance tomography by elastic deformation. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(6) :1557–1573, 2008.
- [9] H. Ammari, E. Bossy, V. Jugnon, and H. Kang. Mathematical modeling in photoacoustic imaging of small absorbers. *SIAM Rev.*, 52(4) :677–695, 2010.
- [10] H. Ammari, E. Bretin, J. Garnier, and V. Jugnon. Coherent interferometry algorithms for photoacoustic imaging. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(5) :2259–2280, 2012.
- [11] H. Ammari, Y. Capdeboscq, F. de Gournay, A. Rozanova-Pierrat, and F. Triki. Microwave imaging by elastic deformation. *SIAM J. Appl. Math.*, 71(6) :2112–2130, 2011.
- [12] Habib Ammari, Laure Giovangigli, Loc Hoang Nguyen, and Jin-Keun Seo. Admittivity imaging from multi-frequency micro-electrical impedance tomography. [arXiv:1403.5708](https://arxiv.org/abs/1403.5708), 2014.
- [13] K. Astala and L. Päivärinta. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Ann. of Math. (2)*, 163(1) :265–299, 2006.
- [14] G. Bal, E. Bonnetier, F. Monard, and F. Triki. Inverse diffusion from knowledge of power densities. *Inverse Probl. Imaging*, 7(2) :353–375, 2013.
- [15] Patricia Bauman, Antonella Marini, and Vincenzo Nesi. Univalent solutions of an elliptic system of partial differential equations arising in homogenization. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(2) :747–757, 2001.
- [16] M. Briane. Isotropic realizability of electric fields around critical points. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 19 :353–372, 2014.
- [17] M. Briane, G. W. Milton, and V. Nesi. Change of sign of the corrector's determinant for homogenization in three-dimensional conductivity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 173(1) :133–150, 2004.
- [18] M. Briane, G. W. Milton, and A. Treibergs. Which electric fields are realizable in conducting materials? *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48 :307–323, 3 2014.
- [19] A.-P. Calderón. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980)*, pages 65–73. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 1980.
- [20] Y. Capdeboscq, J. Fehrenbach, F. de Gournay, and O. Kavian. Imaging by modification : numerical reconstruction of local conductivities from corresponding power density measurements. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(4) :1003–1030, 2009.
- [21] P. Kuchment and L. Kunyansky. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. In Otmar Scherzer, editor, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, pages 817–865. Springer New York, 2011.
- [22] R. S. Laugesen. Injectivity can fail for higher-dimensional harmonic extensions. *Complex Variables Theory Appl.*, 28(4) :357–369, 1996.

- [23] N. Mandache. Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 17(5) :1435, 2001.
- [24] Antonios D. Melas. An example of a harmonic map between Euclidean balls. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117(3) :857–859, 1993.
- [25] Siegfried Momm. Lower bounds for the modulus of analytic functions. *Bull. London Math. Soc.*, 22(3) :239–244, 1990.
- [26] G. Uhlmann. Electrical impedance tomography and Calderón’s problem. *Inverse Problems*, 25(12) :123011, 2009.
- [27] K. Wang and M. A. Anastasio. Photoacoustic and thermoacoustic tomography : Image formation principles. In O. Scherzer, editor, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, pages 781–815. Springer New York, 2011.

MATHEMATICAL INSTITUTE, ANDREW WILES BUILDING, RADCLIFFE OBSERVATORY QUARTER,  
WOODSTOCK ROAD, OXFORD OX2 6GG, UNITED KINGDOM  
*E-mail address:* `Giovanni.Alberti@maths.ox.ac.uk`

MATHEMATICAL INSTITUTE, ANDREW WILES BUILDING, RADCLIFFE OBSERVATORY QUARTER,  
WOODSTOCK ROAD, OXFORD OX2 6GG, UNITED KINGDOM  
*E-mail address:* `yves.capdeboscq@maths.ox.ac.uk`