Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2012-2013

Yann Brenier

Diffusion de champs de vecteur conservant leur topologie et relaxation magnétique

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2012-2013), Exposé n° XX, 10 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2012-2013____A20_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2012-2013.

Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2012-2013
Exposé n° XX, 1-10

DIFFUSION DE CHAMPS DE VECTEUR CONSERVANT LEUR TOPOLOGIE ET RELAXATION MAGNÉTIQUE

YANN BRENIER

Résumé

On considère le modèle de relaxation magnétique décrit par H.K. Moffatt comme un moyen d'obtenir des solutions stationnaires des équations d'Euler de topologie prescrite. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires formellement obtenu comme limite des équations de la magnétohydrodynamique idéale incompressible dans un régime dominé par la friction. Il autorise la diffusion de champs magnétiques tout en conservant leur topologie au cours de l'évolution, ce qui n'est pas le cas de l'équation de la chaleur ordinaire. La forte non-linéarité de ce système laisse largement ouverte l'étude de solutions classiques, mais sa structure très particulière permet d'adapter le concept de solutions dissipatives introduit par P.-L. Lions pour les équations d'Euler. On s'inspire aussi d'idées récemment introduites pour l'équation de la chaleur par Ambrosio, Gigli, Savaré et collaborateurs.
Enfin, on établit une équation de type Madelung pour les champs magnétiques.

1. Le modèle de relaxation magnétique

1.1. **Magnétohydrodynamique et relaxation magnétique.** Un modèle usuel de MHD incompressible, avec friction et diffusion, s'écrit

$$\partial_t B + \nabla \times (B \times v + \nu \nabla \times B) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla p + \alpha v = \nabla \cdot (B \otimes B) + \mu \triangle v, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{1.2}$$

où μ, ν, ρ, α sont des constantes positives. Dans cet exposé, on considère le cas limite, sans diffusion mais dominé par la friction, où $\mu = \nu = \rho = 0$, avec $\alpha = 1$. On appelle, suivant H.K. Moffatt [13], "relaxation magnétique" le système résultant, à savoir:

$$\begin{aligned} \partial_t B + \nabla \times (B \times v) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ v = \nabla \cdot (B \otimes B) - \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \partial_t B + \nabla \times (B \times v) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ v = \mathbb{P} \nabla \cdot (B \otimes B), \quad \nabla \cdot v = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

en introduisant l'opérateur $\mathbb{P}$ (de Helmholtz-Leray) de projection orthogonale dans L^2 sur le sous-espace des champs à divergence nulle.
NB: pour faciliter la discussion et ignorer les questions de conditions aux limites, on se place sur le cube unité périodique.

1.2. **Relaxation magnétique vers les équations d'Euler.** Du système de "relaxation magnétique" (1.4), qu'on peut interpréter comme décrivant une magnétohydrodynamique en milieu poreux (si cela a un sens physique) et qu'on pourrait aussi bien appeler "MHD de Darcy", on dérive formellement le bilan d'énergie suivant:

$$\frac{d}{dt}\int \frac{|B|^2}{2}dx = -\int |\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)|^2 dx. \tag{1.5}$$

On voit que l'énergie du champ magnétique est dissipée jusqu'à annulation de $v = \mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)$. Or, les champs $B = B(x)$ qui annulent v sont précisément les solutions stationnaires de l'équation d'Euler des fluides incompressibles:

$$\nabla \cdot (B \otimes B) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot B = 0. \tag{1.6}$$

On s'attend donc (sans savoir le prouver pour autant) à ce qu'en temps infini les éventuelles solutions du système de relaxation magnétique vont converger vers une solution stationnaire de l'équation d'Euler.

1.3. **Conservation de la topologie.** L'équation "d'induction"

$$\partial_t B + \nabla \times (B \times v) = 0 \tag{1.7}$$

conserve la topologie des lignes de champ de B, pour autant que le champ de vitesse v soit assez régulier. En effet, en introduisant la famille de difféomorphismes $t \to \xi(t,\cdot)$ générés par v selon:

$$\partial_t \xi(t,x) = v(t,\xi(t,x)), \quad \xi(0,x) = x, \tag{1.8}$$

on vérifie d'abord, sans grande peine, que (1.7) revient à:

$$B(t,\xi(t,x)) = D\xi(t,x) \cdot B(0,x). \tag{1.9}$$

Ensuite, on s'aperçoit que les lignes de champs $s \to \eta_t(s)$, obtenues, à t fixé, en intégrant

$$\frac{d}{ds}\eta_t(s) = B(t,\eta_t(s))$$

sont exactement transportées par le flot: $\eta_t(s) = \xi(t,\eta_0(s))$. En particulier, la topologie d'enlacement des lignes de champs est conservée au cours de l'évolution selon (1.4).

1.4. **Hydrodynamique topologique.** On voit ainsi, suivant Moffatt [13], tout l'intérêt des équations de relaxation magnétique pour la mécanique des fluides: elle conduisent, potentiellement lorsque t tend vers l'infini, un champ initial $B(0,\cdot)$ donné vers une solution stationnaire des équations d'Euler, en conservant sa topologie. On a ainsi un moyen concret de "résoudre" les équations stationnaires d'Euler à topologie prescrite. Bien entendu, comme le souligne Moffatt lui-même, il y a beaucoup d'obstructions à cet ambitieux programme, qu'on peut qualifier "d'hydrodynamique topologique" et pour lequel on pourra prendre comme référence le livre de V.I.Arnold et B. Khesin [3] (voir aussi [7]). Nous nous contenterons de livrer quelques éléments d'analyse du système de relaxation magnétique, dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles.

1.5. **Relaxation magnétique avec rotation imposée et algèbre linéaire.** Une variante instructive du modèle de relaxation magnétique est obtenue en plaçant le champ magnétique dans un champ de rotation externe $B_0(x)$ dont on note Ω_0 le rotationnel: $\Omega_0 = \nabla \times B_0$. On obtient

$$\begin{aligned} \partial_t B + \nabla \times (B \times v) = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \\ v = \nabla \cdot (B \otimes B) + \Omega_0 \times B + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Le bilan d'énergie devient:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|B - B_0|^2}{2} dx = - \int |\mathbb{P}(\nabla \cdot (B \otimes B) + \Omega_0 \times B)|^2 dx \tag{1.11}$$

et l'énergie cesse de décroître pour les solutions stationnaires de l'équation d'Euler avec force de Coriolis Ω_0. Cette extension du modèle admet d'intéressantes solutions spéciales (qu'on doit considérer sur la boule -ou la sphère- unité plutôt que sur le cube unité périodique), de la forme

$$B(t,x) = b(t) \cdot x, \quad v(t,x) = V(t) \cdot x, \quad p(t,x) = \frac{1}{2} A(t) x \cdot x, \quad B_0(x) = \omega_0 \cdot x,$$

où b, V, ω_0, A sont des matrices carrées, réelles, toutes antisymétriques sauf A. On obtient alors le système dynamique:

$$b' = [V, b], \quad [V, b] = Vb - bV, \quad V = [\omega_0, b]$$

qui a, bien entendu, du sens pour des matrices de dimension N quelconque. Notons que la première équation garantie l'isospectralité de b au cours de l'évolution. (Autrement dit, la conservation de la topologie de B se traduit par la conservation du spectre de b.) Concentrons nous sur le cas où ω_0 est une matrice antisymétrique diagonale par bloc 2×2 de la forme (dans le cas N pair)

$$\omega_0 = \mathrm{diag}(r_1 J, \cdots, r_N J)$$

(avec adjonction d'un dernier élement diagonal nul quand N est impair) où les r_i sont des réels strictement croissants et $J = \sqrt{-1}$ est la matrice symplectique 2×2 usuelle. Lorsque t tend vers l'infini, on s'attend à ce que la matrice b commute avec ω_0 (ce qui revient à annuler V): on obtient alors b sous forme diagonale (par bloc). Ceci se vérifie très bien numériquement (à condition de prendre particulièrement soin de la résolution de $b' = [v, b]$ pour s'assurer de l'isospectralité de b au cours des itérations), comme le montre la figure présentée en fin d'article. (La matrice de départ est 15×15 réelle antisymétrique avec des coefficients tirés uniformément au hasard dans l'intervalle $[-1/2, +1/2]$. On trace, au cours de l'évolution, le nombre de coefficients extra-bloc-diagonaux de taille supérieure à 10^{-3}. On voit qu'au temps $t = 40$, après 4000 pas de temps, ce nombre est devenu minimal, soit 14.)

2. Solutions dissipatives du système de relaxation magnétique

Pour traiter le système de relaxation magnétique, nous nous inspirons d'abord du concept de solutions dissipatives introduites par P.-L. Lions pour les équations d'Euler dans son livre [11]. Ce concept a le mérite d'assurer, pour toute donnée initiale L^2 fixée, i) l'existence d'au moins une solution globale, obtenue comme limite d'une solution de Leray des équations de Navier-Stokes en y faisant tendre vers zéro la viscosité;

ii) l'unicité de cette solution globale lorsqu'elle est suffisamment régulière (i.e. Lipschitz continue en la variable d'espace).
Notre propos est de trouver un concept analogue, avec le même type de résultats, pour le système de relaxation magnétique. Pour cela nous nous inspirons aussi du traitement récent de l'équation de la chaleur scalaire dans les espaces métriques généraux par Gigli, Gigli-Kuwada-Ohta, Ambrosio-Gigli-Savaré [8, 9, 2], dans la suite de l'interprétation de cette équation par Jordan, Kinderlehrer et Otto [10].
Avant d'entrer dans les détails, signalons enfin les travaux de Nishiyama sur des équations voisines de relaxation magnétique [14, 15].

2.1. **Une approche récente de l'équation de la chaleur scalaire.** L'équation de la chaleur scalaire

$$\partial_t \rho - \triangle \rho = 0. \tag{2.12}$$

a été étudiée récemment [8, 9, 2] dans une très large classe d'espaces métriques. On peut donner une idée grossière de ces travaux comme suit, en se limitant au cas du cube unité périodique. On commence par dire qu'une paire de mesures $(\rho(t,x) \geq 0, q(t,x) \in \mathbb{R}^d)$ sur le cube unité périodique est admissible si elle vérifie l'équation de "continuité"

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot q = 0. \tag{2.13}$$

Ensuite, on note que, pour toute paire admissible $(\rho > 0, q)$ suffisamment lisse,

$$\frac{d}{dt}\int 2\rho \log \rho = 2\int \frac{\nabla\rho \cdot q}{\rho}$$

$$= \int \frac{|q+\nabla\rho|^2}{\rho} - \int \frac{|q|^2}{\rho} - \int \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\ .$$

On voit donc qu'il est équivalent pour (ρ, q) de vérifier $q = -\nabla\rho$, ce qui veut dire que ρ est solution de l'équation de la chaleur (2.12), et de satisfaire l'inégalité suivante:

$$2\frac{d}{dt}\int \rho\log\rho + \int \frac{|q|^2}{\rho} + \int \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho} \leq 0\ , \tag{2.14}$$

ou, même, plus grossièrement,

$$\begin{aligned} \int (\rho\log\rho)(t,x)dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int \Big(\frac{|q|^2}{\rho} + \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\Big)(s,x)dxds \\ \leq \int (\rho\log\rho)(0,x)dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Cela suggère de définir comme solution (a priori géneralisée) de l'équation de la chaleur (2.12) toute paire admissible (ρ, q), pas nécessairement lisse, vérifiant (2.15). Cette formulation est très robuste et permet d'obtenir l'existence globale et l'unicité des solutions dans une classe d'espaces métriques très générale, sachant que les trois fonctionnelles impliquées dans (2.15) sont convexes en (ρ, q), la première l'étant strictement en ρ.

2.2. **Solutions admissibles.** Venons-en au système de relaxation magnétique. Nous dirons d'un couple de champs de vecteurs à divergence nulle, sur le cube unité périodique,

$$(B, v) \in C_t^0((L_x^2)_w) \times L_t^2(L_x^2)$$

(où $(L_x^2)_w$ désigne l'espace L^2 en la variable x, muni de sa topologie faible) qu'il est admissible s'il satisfait, au sens des distributions, l'équation d'induction (1.7), ce qui nous donne:

$$\partial_t B + \nabla \times (B \times v) = 0, \quad \nabla \cdot B = \nabla \cdot v = 0. \tag{2.16}$$

On observe alors qu'une paire admissible (B, v), du moment qu'elle est suffisamment lisse, satisfait

$$\frac{d}{dt}||B||^2 + ||v||^2 + ||\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)||^2 = ||v - \mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)||^2 \tag{2.17}$$

(où on note $|| \cdot ||$ la norme L^2 en espace sur le cube unité périodique) et qu'en conséquence elle est solution du système de relaxation magnétique (1.4) si et seulement si elle vérifie l'inégalité différentielle:

$$\frac{d}{dt}||B||^2 + ||v||^2 + ||\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)||^2 \leq 0. \tag{2.18}$$

La justification de (2.17) est fort simple et découle du calcul suivant:

$$-\frac{d}{dt}||B||^2 = 2\int B \cdot \nabla \times (B \times v) = 2\int \nabla \times B \cdot (B \times v)$$

$$= 2\int (\nabla \times B, B, v) = 2\int ((\nabla \times B) \times B) \cdot v = 2\int \mathbb{P}((\nabla \times B) \times B)) \cdot v$$

$$= 2\int (\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)) \cdot v$$

$$= -||v - \mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)||^2 + ||v||^2 + ||\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)||^2.$$

Il est commode d'écrire (2.18) sous forme variationnelle après avoir observé que, par définition et après intégration par partie:

$$\int |\mathbb{P}\nabla \cdot (B \otimes B)|^2 dx = \sup_{\nabla \cdot z = 0} \int \{(B \otimes B) : (\nabla z + \nabla z^T) - |z|^2\} dx. \tag{2.19}$$

On obtient donc, à la place de (2.18):

$$\frac{d}{dt}||B||^2 + ||v||^2 + \int \{(B \otimes B) : (\nabla z + \nabla z^T) - |z|^2\} dx \leq 0, \tag{2.20}$$

pour tout champ $z = z(t, x)$ lisse dépendant du temps et à divergence nulle en x. En notant $r(t)$ un majorant du spectre de la matrice symétrique $-(\nabla z + \nabla z^T)(t, x)$ sur le cube unité périodique, on obtient

$$(\frac{d}{dt} - r(t))||B||^2 + ||v||^2 + \int \{(B \otimes B) : (\nabla z + \nabla z^T + r(t)I) - |z|^2\} dx \leq 0,$$

(où I est la matrice unité). Après intégration en temps, cette inégalité se traduit exactement par:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}[||v||^2+((B\otimes B:\nabla z+\nabla z^T+rI))-||z||^2](s)\exp(R(t)-R(s))ds\\ \le\ &||B(t_0,\cdot)||^2\exp(R(t)-R(t_0))-||B(t,\cdot)||^2,\quad R(t)=\int_0^t r(s)ds,\quad \forall t\ge t_0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

où on note $((\cdot:\cdot))$ le produit scalaire L^2.

2.3. **Solutions dissipatives.** Selon un usage bien établi en équations aux dérivées partielles, la caractérisation des solutions admissibles lisses va nous conduire à une définition de solutions généralisées. Nous les appelerons “dissipatives” en référence au concept de solutions dissipatives des équations d'Euler introduit par P.-L. Lions dans son livre [11]. Etant donné un champ initial B_{ini} à divergence nulle et de carré sommable sur le cube unité périodique, on dit d'une solution admissible (B,v) qu'elle est solution dissipative des équations de relaxation magnétique pour la donnée initiale B_{ini}, si elle vérifie, pour tout $t\ge 0$,

$$\begin{aligned}&||B(t,\cdot)||^2-||B_{ini}||^2\exp(R(t))\\ +&\int_0^t[||v||^2+((B\otimes B:\nabla z+\nabla z^T+rI))-||z||^2](s)\exp(R(t)-R(s))ds\le 0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

pour tout champ $z=z(t,x)$ lisse dépendant du temps et à divergence nulle en x sur le cube unité périodique, où on note $((\cdot:\cdot))$ le produit scalaire L^2 et où $r(t)$ est un majorant quelconque du spectre de la matrice symétrique $-(\nabla z+\nabla z^T)(t,x)$ sur le cube unité périodique et $R(t)=\int_0^t r(s)ds$.

2.4. **Existence globale.** L'intérêt principal de la relation (2.22) qui définit les solutions dissipatives est sa convexité par rapport au couple (B,v). En revanche la condition d'admissibilité (1.7) n'est a priori pas “faiblement continue” (i.e. fermée faiblement), sauf dans le cas de la dimension 2 où (B,v) n'ont que deux composantes spatiales et ne dépendent que de deux variables d'espace. On peut le voir comme application du lemme “div-rot”, ou, plus directement, en écrivant $B(t,x)$ comme le gradient en $x=(x_1,x_2)$, tourné de $\pi/2$, d'une fonction $\varphi(t,x)$ qui, dès lors, vérifie l'équation “faiblement fermée”

$$\partial_t\varphi+\nabla.(\varphi v)=0.$$

Dans ce cas, on obtient facilement (voir [4]), pour toute donnée initiale B_{ini} dans L^2, l'existence d'au moins une solution dissipative globale obtenue comme limite de solutions des équations de MHD (1.1,1.2) (dont on sait qu'elles sont lisses et globales en deux dimensions d'espace, à l'instar des équations de Navier-Stokes -voir [16]), en faisant tendre les paramètres μ,ν,ρ vers zero.

2.5. **Unicité “fort-faible”.** Un calcul élémentaire (détaillé dans [4]) montre que, pour tout $T>0$ et tout couple (β,w) de champs lisses à divergence nulle sur le cube unité périodique, une solution dissipative (B, v) vérifie toujours

(2.23)
$$||B_t - \beta_t||^2 + \int_0^t e^{(t-s)C}\frac{1}{2}||v_s - w_s||^2 ds \leq ||B_0 - \beta_0||^2 e^{tC} + \int_0^t e^{(t-s)C} J_s ds,$$
$$J_t = -2((B_t - \beta_t, \partial_t \beta_t + (w_t \cdot \nabla)\beta_t - (\beta_t \cdot \nabla)w_t)) + 2((v_t - w_t, \nabla(\beta_t \otimes \beta_t) - w_t)),$$

pour tout $t \in [0, T]$, où C est une constante ne dépendant que des constantes de Lipschitz en espace de (β, w) jusqu'au temps T. Dans cette relation, on a encore noté $((\cdot,\cdot))$ le produit scalaire L^2 et utilisé la notation B_t, etc..., pour $B(t,\cdot)$. Ceci montre qu'il ne peut y avoir plus d'une solution dissipative lisse par donnée initiale fixée. (Il suffit pour le voir de supposer que le couple (β, w) est solution classique des équations de relaxation magnétique, ce qui annule complètement le terme J_t dans (2.23).)
Ce résultat d'unicité "fort-faible" est (à l'instar des solutions dissipatives de Lions) le principal intérêt de notre concept de solutions généralisées. Observons d'ailleurs que la formulation (2.23), qui est convexe en (B, v) pourrait même se substituer à notre concept de solutions dissipatives pour former un concept (encore!) plus faible de solutions géneralisées en ne demandant plus de satisfaire l'équation d'induction (1.7) au sens des distributions. L'avantage est de conduire à l'existence de solutions quelle que soit la dimension d'espace sans perdre l'unicité fort-faible. L'inconvénient est de "noyer" l'équation d'induction dans l'inégalité (2.23).
NB: Concernant les questions d'unicité "fort-faible", on pourra consulter deux occurences récentes dans [6, 5].

2.6. **Questions pendantes.** Nous ne savons rien dire de l'existence de solutions régulières locales pour le système de relaxation magnétique (ce qui réduit d'autant l'intérêt du résultat d'unicité "fort-faible"). Ce n'est pas si étonnant, car le système n'est certainement pas parabolique au sens fort. Il serait pertinent d'étudier sa linéarisation autour de $(B, v) = (0, 0)$ ou, de façon plus intéressante, autour d'une solution stationnaire des équations d'Euler.
Avec notre concept de solutions dissipatives, la conservation de la topologie est purement formelle, car exprimée par la formulation faible de l'équation d'induction (1.7) avec un champ de vitesse v de classe L^2. (Pour conserver vraiment la topologie, il faudrait que $v(t, x)$ ait un module de continuité en x Lipschitzien, ou peu s'en faut.) La situation est encore pire si l'on opte pour le concept encore plus lâche de solutions associé à la formulation (2.23).

3. Appendice: Un système à la Madelung pour les champs magnétiques

3.1. **Le système de Madelung et les équations de Schrödinger.** Lors de l'obtention de l'équation de la chaleur, à la Jordan-Kinderlehrer-Otto ou à la Ambrosio-Gigli-Savaré [10, 2], on voit qu'apparait naturellement à la droite du "bilan d'entropie"

$$-\frac{d}{dt}\int \rho \log \rho dx = \int \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} dx, \tag{3.24}$$

"l'information de Fisher" (qui joue un rôle important en théorie de l'information et en statistiques). Or, après Madelung [12], on sait qu'ajouter l'information de Fisher au potentiel d'un gaz parfait fait instantanément de ce dernier un "gaz quantique" régi par l'équation de Schrödinger non-linéaire. Plus précisément, pour deux constantes fixées $\alpha \geq 0$, $\gamma > 1$, la fonctionnelle d'action

$$\int \{\frac{1}{2}\rho|v|^2 - \frac{|\nabla\rho|^2}{4\rho} - \frac{\rho^\gamma}{\gamma}\}dtdx \tag{3.25}$$

admet (formellement) pour points critiques, sous contrainte

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

tous les champs (ρ, v) de forme $v(t,x) = \nabla\theta(t,x)$ pour lesquels

$$\psi(t,x) = \sqrt{\rho(t,x)}\exp(i\theta(t,x))$$

est solution de l'équation de Schrödinger (non-linéaire, sauf si $\alpha = 0$)

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\triangle\psi = |\psi|^{2\gamma-2}\psi.$$

3.2. **Extension aux champs magnétiques.** Tâchons d'étendre, naïvement, l'idée de Madelung au cas des champs magnétiques, en partant du système de relaxation magnétique (qui nous tient lieu d'équation de la chaleur). L'information de Fisher est en conséquence remplacée par le terme

$$\int |\mathbb{P}\nabla\cdot(B\otimes B)|^2dx = \sup_{\nabla\cdot z=0}\int\{-(B\otimes B):(\nabla z+\nabla z^T) - |z|^2\}dx. \tag{3.26}$$

Pour obtenir un modèle à la Madelung, nous ajoutons cette quantité à l'action de la MHD incompressible "idéale" (i.e. sans dissipation). Celle-ci s'écrit

$$\frac{1}{2}\int\{|v|^2 - |B|^2\}dtdx, \tag{3.27}$$

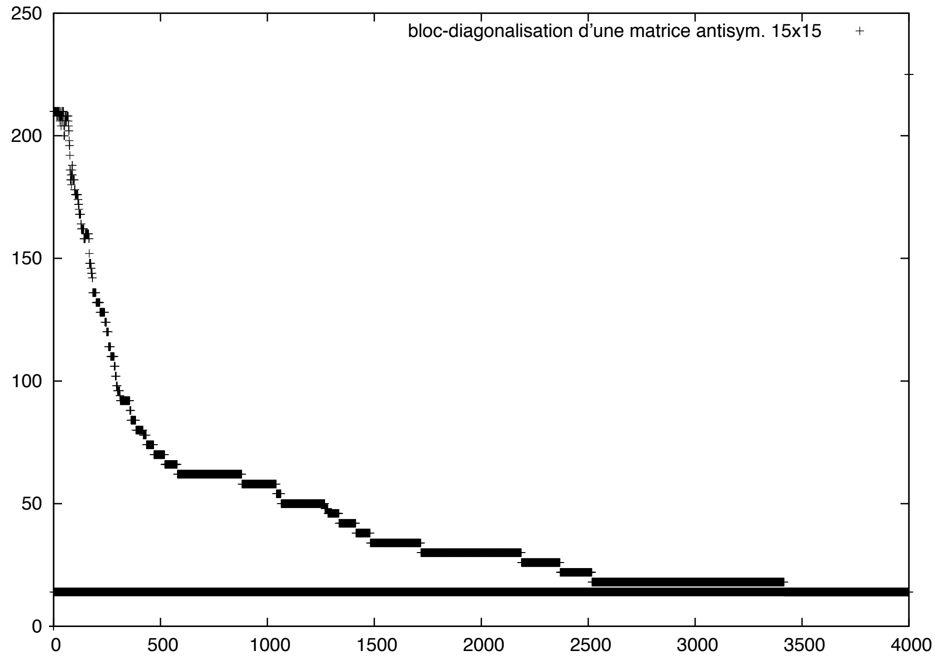
sous contrainte d'induction (1.7) et de divergence nulle pour v. En conséquence, avec les multiplicateurs de Lagrange (z,p,q,A) adéquats, on se ramène aux points selles de

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\{|v|^2 - |B|^2 + (B\otimes B):(\nabla z+\nabla z^T) + |z|^2\}dtdx \\ &-\int\{z.\nabla q + v\cdot\nabla p - B\cdot\partial_t A + (B\times v)\cdot\nabla\times A\}dtdx. \end{aligned} \tag{3.28}$$

On trouve alors, en posant $D = \nabla\times A$, le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \partial_t D + \nabla\times(D\times v) = \nabla\times((I-(\nabla z+\nabla z^T))B), \\ z = \nabla\cdot(B\otimes B) + \nabla q, \quad \nabla\cdot z = 0, \\ v = \nabla p + D\times B, \quad \nabla\cdot v = 0, \\ \partial_t B + \nabla\times(B\times v) = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Hélas, ce système est livré ici sans aucune justification physique et sans la moindre analyse mathématique...



bloc-diagonalisation d'une matrice antisym. 15x15
250
200
150
100
50
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures,* Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser , 2008.
[2] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below,* Inventiones 2013, http://cvgmt.sns.it/paper/1645/.
[3] V.I. Arnold, B. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences, 125,* Springer-Verlag 1998.
[4] Y. Brenier, *Topology-preserving diffusion of divergence-free vector fields and magnetic relaxation,* arXiv:1304.4562
[5] Y. Brenier, C. De Lellis, L. Székelyhidi, László, Jr. *Weak-strong uniqueness for measure-valued solutions,* Comm. Math. Phys. 305 (2011) 351-361.
[6] S.Demoulini, D. Stuart, A. Tzavaras, *Weak-strong uniqueness of dissipative measure-valued solutions for polyconvex elastodynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal. 205 (2012) 927-961.
[7] M. Freedman, Z-X He, *Divergence-free fields: energy and asymptotic crossing number,* Ann. of Math. (2) 134 (1991) 189-229.
[8] N. Gigli, *On the Heat flow on metric measure spaces: existence, uniqueness and stability,* Calc. Var. Part. Diff. Eq., 39 (2010) 101-120.
[9] N. Gigli, K. Kuwada, S. I. Ohta, *Heat Flow on Alexandrov spaces,* CPAM 66 (2013) 307-331.
[10] R. Jordan, D. Kinderlehrer, F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation,* SIAM J. Math. Anal. 29 (1998) 1-17.
[11] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models,* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 3. 1996.
[12] E. Madelung, *Quanten theorie in Hydrodynamischer Form,* Zeit. F. Physik 40 (1927) 322.
[13] H. K. Moffatt, *Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology,* J. Fluid Mech. 159 (1985) 359-378.
[14] T. Nishiyama, *Construction of the three-dimensional stationary Euler flows from pseudo-advected vorticity equations,* R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 459 (2003) 2393-2398.
[15] T. Nishiyama, *Magnetohydrodynamic approaches to measure-valued solutions of the two-dimensional stationary Euler equations,* Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 2 (2007) 139-154.
[16] M. Sermange, R. Temam, *Some mathematical questions related to the MHD equations,* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 635-664.

CNRS, Centre de mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique, FR-91128 Palaiseau, France.
E-mail address: brenier@math.polytechnique.fr