



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2012-2013


Sepideh Mirrahimi

Approche Hamilton-Jacobi pour des modèles de dynamique des populations

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2012-2013), Exposé n° V, 11 p.

<http://sersedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2012-2013____A5_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, 2012-2013.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Approche Hamilton-Jacobi pour des modèles de dynamique des populations

Sepideh Mirrahimi*

February 14, 2013

Abstract

Ce manuscrit porte sur l'analyse des phénomènes de concentration qui apparaissent dans des modèles de populations structurées. Dans un premier temps, nous étudions la dynamique adaptative d'une population structurée par des traits phénotypiques. La modélisation mathématique de ces phénomènes mène à des équations intégro-différentielles de type Lotka-Volterra avec petite diffusion. La présence d'un petit terme conduit à des modèles multi-échelles. La solution asymptotique de ces équations se concentre en un ou plusieurs points qui se déplacent. Notre approche est basée sur la transformation Hopf-Cole qui donne lieu à des équations de Hamilton-Jacobi avec contrainte. Nous donnons une description de la dynamique des masses de Dirac en utilisant ce formalisme.

Dans un second temps, nous étudions un modèle de population avec plusieurs zones d'habitat favorable. Le taux de croissance est différent d'une zone à l'autre, par exemple dû à une différence de température. Les individus peuvent migrer d'une zone à l'autre avec un taux constant. En utilisant, l'approche Hamilton-Jacobi nous décrivons le comportement asymptotique des solutions stationnaires de ce système. La limite peut être décrite à l'aide d'un Hamiltonien effectif. La possibilité de migration peut modifier les traits sélectionnés et conduire à des situations polymorphes.

1 Introduction

Nous étudions le comportement asymptotique de certaines équations intégro-différentielles qui décrivent la dynamique des populations structurées. Nous nous intéressons en particulier à des populations qui sont structurées par traits phénotypiques. Les individus ont des capacités différentes pour utiliser la ressource selon leur trait phénotypique. Ils peuvent se reproduire et donner naissance à un individu qui a le même trait ou bien qui a un trait un peu modifié si une mutation a lieu. La modélisation mathématique de ces populations mène à des équations ou à des systèmes paraboliques. Nous étudions le comportement asymptotique de ces équations dans la limite de petites mutations et en temps long. Ces équations, ont la propriété que dans la limite des mutations petites, la solution se concentre en une ou plusieurs masses de Dirac, qui évoluent dans le temps. Le travail présenté ici, suit l'approche Hamilton-Jacobi introduite dans [14] et développée partiellement dans [4, 6, 24]. Voir aussi [11, 25, 17, 1] pour une approche en rapport avec celle-ci, qui est basée sur l'étude des solutions stationnaires stables des équations intégro-différentielles.

*CNRS, Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse. Email: Sepideh.Mirrahimi@math.univ-toulouse.fr.

Modèles sans structures spatiales

Un premier modèle s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t n_\varepsilon - \varepsilon \Delta n_\varepsilon = \frac{n_\varepsilon}{\varepsilon} R(x, I_\varepsilon(t)), & x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, \\ n_\varepsilon(t=0) = n_\varepsilon^0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), & n_\varepsilon^0 \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) n_\varepsilon(t, x) dx.$$

Ici $x \in \mathbb{R}^d$ représente le trait phénotypique, et $n_\varepsilon(x, t)$ représente la densité du trait x à l'instant t . Dans ce modèle on suppose qu'il y a une seule ressource. Les individus du trait x consomment cette ressource avec un taux $\psi(x)$. On dénote par $R(x, I_\varepsilon)$ le taux de croissance des individus du trait x , dépendant du paramètre de l'environnement I_ε , qui représente la consommation totale de la population. Les mutations sont modélisées par un terme de Laplace. On introduit enfin, un petit paramètre ε , pour se limiter à des mutations avec des pas petits. On fait aussi un changement d'échelle $t \mapsto \frac{t}{\varepsilon}$ afin de considérer une échelle de temps beaucoup plus grande qu'une génération.

Une autre façon plus naturelle pour modéliser les mutations est d'utiliser un terme intégral au lieu d'un laplacien :

$$\begin{cases} \partial_t n_\varepsilon = \frac{n_\varepsilon}{\varepsilon} R(x, I_\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{1}{\varepsilon^d} K\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) b(y, I_\varepsilon) n_\varepsilon(t, y) dy, & x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, \\ n_\varepsilon(t=0) = n_\varepsilon^0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), & n_\varepsilon^0 \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon(t, x) dx.$$

Ici $K(z)$ est le noyau de probabilité, et $b(x, I)$ signifie le taux de naissances avec mutations. On constate que ce modèle est plus général que (1) où les mutations sont supposées être homogènes.

Les modèles ci-dessus, peuvent être dérivés à partir des modèles stochastiques dans la limite de grandes populations (voir [7, 8]).

Modèle avec plusieurs zones d'habitat favorable

Nous nous intéressons également à ajouter une structure spatiale dans notre modèle. Pour pouvoir décrire la structure spatiale des communautés ou par exemple pour comprendre l'impact du réchauffement climatique sur les espèces, il est important d'inclure des phénomènes de l'évolution dans des modèles pour l'écologie (voir [19] pour littérature générale sur ce sujet). Nous présentons ici, un modèle avec une structure discrète en espace. Voici un système qui décrit un scénario où deux zones d'habitat favorable sont présentes :

$$\begin{cases} \partial_t n_\varepsilon^1 - \varepsilon \Delta n_\varepsilon^1 = \frac{1}{\varepsilon} n_\varepsilon^1 R^1(x, I_\varepsilon^1) + \frac{1}{\varepsilon} \nu^2 n_\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} \nu^1 n_\varepsilon^1, \\ \partial_t n_\varepsilon^2 - \varepsilon \Delta n_\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} n_\varepsilon^2 R^2(x, I_\varepsilon^2) + \frac{1}{\varepsilon} \nu^1 n_\varepsilon^1 - \frac{1}{\varepsilon} \nu^2 n_\varepsilon^2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3)$$

avec

$$I_\varepsilon^i = \int \psi(x) n_\varepsilon^i(t, x) dx, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (4)$$

Ici, $n_\varepsilon^i(x, t)$ et I_ε^i , pour $i = 1, 2$, représentent respectivement la densité du trait x et la consommation totale de la population dans la zone i . On dénote par R^i le taux de croissance dans la zone i . Les coefficients ν^1 et ν^2 signifient les taux de migration d'une zone à l'autre.

Dans ce manuscrit, nous étudions le comportement asymptotique des solutions stationnaires du système (3) dans un domaine borné, i.e. $n_\varepsilon^1(x)$ et $n_\varepsilon^2(x)$ solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta n_\varepsilon^1 &= n_\varepsilon^1 R^1(x, I_\varepsilon^1) + \nu^2 n_\varepsilon^2 - \nu^1 n_\varepsilon^1 & \text{dans } B_L(0), \\ -\varepsilon^2 \Delta n_\varepsilon^2 &= n_\varepsilon^2 R^2(x, I_\varepsilon^2) + \nu^1 n_\varepsilon^1 - \nu^2 n_\varepsilon^2 & \text{dans } B_L(0), \\ \nabla n_\varepsilon^i \cdot \vec{n} &= 0 & \text{dans } \partial B_L(0) \text{ et pour } i = 1, 2, \end{cases} \quad (5)$$

avec $B_L(0)$ une boule de rayon L et centrée à l'origine. Ici nous présentons seulement le cas avec deux zones d'habitat, mais nos résultats peuvent être étendus au cas avec plusieurs zones d'habitat.

Modèles d'évolution des populations en considérant une structure spatiale discrète, ont été étudiés à la fois par des méthodes déterministes et probabilistes (voir par exemple [28, 2]). Notre modèle, est en effet proche de celui étudié dans [28] par des techniques de la théorie de dynamiques adaptatives. Cette théorie est basée sur l'étude des systèmes dynamiques et de leur stabilité [13].

2 Résultats

2.1 Modèle sans structure spatiale

Les équations présentées ci-dessus ont la propriété que dans la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution se concentre en une ou plusieurs masses de Dirac. En d'autres termes, à tout instant, un ou plusieurs traits dominants persistent. Ces traits dominant peuvent évoluer, dans le cas des équations dépendant du temps, grâce à la présence de la diffusion.

Afin de démontrer cette propriété, nous utilisons la transformation Hopf-Cole

$$n_\varepsilon = \exp\left(\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Nous étudions d'abord le comportement asymptotique de u_ε . Contrairement à $(n_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge à priori vers une mesure, la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers une fonction continue. Nous démontrons en effet que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, le long des sous-suites, converge vers une solution de viscosité d'une équation Hamilton-Jacobi. Nous présentons ici, le résultat pour le modèle (1). Un résultat équivalent peut être démontré pour (2). Ces résultats ont été obtenu dans [3].

Avant de présenter les résultats, nous introduisons quelques hypothèses. Nous supposons qu'il existe des constantes ψ_m et ψ_M telles que

$$0 < \psi_m < \psi < \psi_M < \infty, \quad \psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \quad (6)$$

Nous supposons également qu'il existe des constantes $0 < I_m < I_M < \infty$ telles que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} R(x, I_m) = 0, \quad \max_{x \in \mathbb{R}^d} R(x, I_M) = 0, \quad (7)$$

ainsi que des constantes $K_i > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $I \in \mathbb{R}$,

$$-K_1 \leq \frac{\partial R}{\partial I}(x, I) \leq -K_1^{-1} < 0, \quad \sup_{\frac{I_m}{2} \leq I \leq 2I_m} \|R(\cdot, I)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)} < K_2. \quad (8)$$

Nous faisons enfin des hypothèses suivantes sur la donnée initiale :

$$I_m \leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) n_\varepsilon^0(x) dx \leq I_M, \quad \text{and} \quad \exists A, B > 0, \quad n_\varepsilon^0 \leq e^{\frac{-A|x|+B}{\varepsilon}}. \quad (9)$$

Nous sommes maintenant prêt pour énoncer notre premier résultat :

Théorème 2.1. [3] Soit n_ε la solution de (1), et $u_\varepsilon = \varepsilon \ln(n_\varepsilon)$. Sous hypothèses (6)–(9) et quitte à extraire une sous-suite, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge localement uniformément vers une fonction $u \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, qui est une solution de viscosité de l'équation ci-dessous

$$\begin{cases} \partial_t u = |\nabla u|^2 + R(x, I(t)), \\ \max_{x \in \mathbb{R}^d} u(t, x) = 0, \quad \forall t > 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$I_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I(t) \quad \text{a.e.}, \quad \int \psi(x) n(t, x) dx = I(t) \quad \text{p.p.}$$

En particulier, p.p. en t , $\text{supp } n(t, \cdot) \subset \{u(t, \cdot) = 0\}$. Ici la mesure n est la limite faible de n_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Si de plus $(u_\varepsilon^0)_\varepsilon$ est une suite de fonctions uniformément continues qui converge localement uniformément vers u^0 , alors $u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ et $u(0, x) = u^0(x)$ dans \mathbb{R}^d .

L'information obtenue ci-dessus sur u nous permet d'identifier $n(x, t)$, i.e. la limite faible de n_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Une première conséquence de Théorème 2.1 est la suivante :

$$\text{supp } n(t, x) \subset \mathcal{A} = \{(t, x) \mid u(t, x) = \max_{y \in \mathbb{R}^d} u(t, y) = 0\} \subset \{(x, t) \mid R(x, I(t)) = 0\}.$$

En particulier, si l'ensemble des points de maximum de u ou l'ensemble des zéros de R se compose des points isolés, nous en déduisons alors que le support de n se compose aussi des points isolés et en conséquence n est une somme de masses de Dirac. Pour $d = 1$, si R est une fonction monotone par rapport à x , il est immédiat à partir de cet argument que n est une seule masse de Dirac (voir [24]). Pour d quelconque, ce type de propriété peut être dérivé sous certaines hypothèses de concavité sur R :

$$-2\underline{K}_1 \leq D^2 R(x, I) \leq -2\overline{K}_1 < 0 \quad \text{comme matrices symétriques pour } 0 \leq I \leq I_M, \quad (11)$$

$$-2\underline{L}_1 \leq D^2 u_\varepsilon^0 \leq -2\overline{L}_1, \quad (12)$$

$$4\overline{L}_1^2 \leq \overline{K}_1 \leq \underline{K}_1 \leq 4\underline{L}_1^2. \quad (13)$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2. [20] Outre les hypothèses de Théorème 2.1, nous supposons (11)–(13). Alors, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et quitte à extraire une sous-suite, $(n_\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement dans le sensé des mesures vers une masse de Dirac

$$n_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(t) \delta(x - \bar{x}(t)),$$

$$\rho(t) = \frac{I(t)}{\eta(\bar{x}(t))}, \quad R(\bar{x}(t), I(t)) = 0 \quad \text{a.e.}, \quad (14)$$

et $I(t)$, définie dans Théorème 2.1, est une fonction non-décroissante.

L'idée essentielle dans Théorème 2.2 est que la concavité de $R(x, I)$ et de la donnée initiale imposent la concavité de $u(t, x)$, la solution de (10). De plus, le support de n , la limite de n_ε lorsque ε tend vers 0, est inclus dans l'ensemble \mathcal{A} des points de maximum de $u(t, x)$ comme expliqué ci-dessus. La fonction $u(t, \cdot)$ étant concave, pour tout t fixé, il existe un unique point $\bar{x}(t)$ tel que $(t, \bar{x}(t)) \in \mathcal{A}$. D'où la concentration de masse n au point $(t, \bar{x}(t))$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Enfin la semi-concavité (voir section [20]), et la concavité de u imposent sa régularité. Avec ces propriétés, on peut montrer que $\bar{x}(t)$ est une fonction régulière de t et en déduire une sorte d'équation canonique. L'équation canonique, introduite dans la théorie de la dynamique adaptative [13, 12], est une équation différentielle sur la position de la masse de Dirac $\bar{x}(t)$.

Pour établir l'équation canonique, il est nécessaire de supposer plus de régularité sur R et sur la donnée initiale :

$$D^3R(\cdot, I) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad D^3u_\varepsilon^0(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (15)$$

Théorème 2.3. [20] *En plus des hypothèses de Théorème 2.2 supposons (15). Alors $\bar{x}(t)$, le point de concentration associé au modèle (1), est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^d)$ et satisfait*

$$\dot{\bar{x}}(t) = (-D^2u(t, \bar{x}(t)))^{-1} \cdot \nabla_x R(\bar{x}(t), \bar{I}(t)). \quad (16)$$

En particulier $u(t, x)$, la solution de (10), est une fonction C^2 .

2.2 Modèle avec structure spatiale - Cas des systèmes

Nous pouvons étendre des résultats ci-dessus, au modèle (5), où nous avons un système, et non pas une seule équation.

Afin de présenter nos résultats pour le modèle (5), nous introduisons d'abord quelques hypothèses. Nous supposons, qu'il existe des constantes a_m et a_M telles que

$$\psi^1 = \psi^2 = \psi, \quad a_m \leq \psi(x) \leq a_M, \quad \|\psi(x)\|_{W^{2,\infty}} \leq A \quad \text{et} \quad \nabla\psi \cdot \vec{n} = 0 \text{ in } \partial B_L(0). \quad (17)$$

En outre, il existe des constantes I_m, I_M, δ et C telles que, pour tout $x \in B_L(0)$ et $i, j = 1, 2$,

$$\delta \leq \min \left(R^i(x, \frac{\nu^j}{\nu^i} I_m), R^i(x, I_m) \right), \quad \max \left(R^i(x, \frac{\nu^j}{\nu^i} I_M), R^i(x, I_M) \right) \leq -\delta, \quad (18)$$

$$-C \leq \frac{\partial R^i}{\partial I}(x, I) \leq -\frac{1}{C}, \quad (19)$$

$$-D \leq R_{\xi\xi}^i(x, I), \quad \text{pour } x \in B_L(0), I \in [I_m, I_M], \xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| = 1 \text{ et } i = 1, 2. \quad (20)$$

Notre approche est toujours basée sur la transformation Hopf-Cole

$$n_\varepsilon^i = \exp\left(\frac{u_\varepsilon^i}{\varepsilon}\right), \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (21)$$

Ceci nous mène encore à une équation de Hamilton-Jacobi :

Théorème 2.4. [23] *Sous hypothèses (17)–(19) et quitte à extraire des sous-suites, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $(u_\varepsilon^1)_\varepsilon$ et $(u_\varepsilon^2)_\varepsilon$ convergent uniformément dans $B_L(0)$ vers une fonction continue $u \in C(B_L(0))$ et $(I_\varepsilon^1, I_\varepsilon^2)$ tend vers (I^1, I^2) , avec (u, I^1, I^2) tel que u est une solution de viscosité de l'équation suivante*

$$\begin{cases} -|\nabla u|^2 = H(x, I^1, I^2), & \text{in } B_L(0), \\ \max_{x \in B_L(0)} u(x) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

avec

$$H(x, I^1, I^2) \text{ la valeur propre la plus grande de la matrice} \quad (23)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} R^1(x, I^1) - \nu^1 & \nu^2 \\ \nu^1 & R^2(x, I^2) - \nu^2 \end{pmatrix}.$$

La fonction H set en effet un hamiltonien effectif qui contient des informations des deux zones d'habitat et nous permet dans Theorem 2.5 ci-dessous de décrire le support des limites faibles de n_ε^1 et n_ε^2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous pouvons interpréter $H(x, I^1, I^2)$ comme étant la fitness du système dans la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ (voir [22] pour la définition de la fitness).

La difficulté ici est de trouver des estimations de régularité sur u_ε^i , que nous obtenons en utilisant l'inégalité de Harnack [5] et la méthode de Bernstein [10]. Afin de prouver la convergence vers l'équation de Hamilton-Jacobi, nous sommes inspirés de la méthode de fonction teste perturbée utilisés dans les problèmes d'homogénéisation [16].

L'information ci-dessus sur la limite de u_ε^i nous permet de décrire la limite des densités n_ε^i lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

Théorème 2.5. [23] *Supposons (17)–(20) et considérons une sous-suite telle que $(u_\varepsilon^1)_\varepsilon$ et $(u_\varepsilon^2)_\varepsilon$ convergent uniformément vers $u \in C(B_L(0))$ et que $(I_\varepsilon^1, I_\varepsilon^2)$ tend vers (I^1, I^2) avec (u, I^1, I^2) solution de (22). Soient n^i , pour $i = 1, 2$, des limites faibles de n_ε^i lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ le long de cette sous-suite. Alors,*

$$\text{supp } n^i \subset \Omega \cap \Gamma, \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (24)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in B_L(0) \mid u(x) = 0\}, \\ \Gamma &= \{x \in B_L(0) \mid H(x, I^1, I^2) = \max_{x \in B_L(0)} H(x, I^1, I^2) = 0\}. \end{aligned} \quad (25)$$

De plus, n^1 et n^2 vérifient les contraintes suivantes

$$\int_{B_L(0)} \psi^i(x) n^i(x) = I^i, \quad (26)$$

$$(R^1(x) - \nu^1) n^1(x) + \nu^2 n^2(x) = 0, \quad (R^2(x) - \nu^2) n^2(x) + \nu^1 n^1(x) = 0, \quad \text{in } B_L(0) \quad (27)$$

dans le sens des distributions.

Les théorèmes ci-dessus ont été obtenus dans [23]. Théorème 2.5 nous fournit un ensemble des contraintes algébriques sur la limite, qui nous permettent de décrire celui-ci. Nous arrivons ainsi à décrire des limites asymptotiques des solutions stationnaires, à la limite de mutations petites. En particulier, nous remarquons que l'introduction de nouveaux environnements peut mener à des situations polymorphes. Dans la section 3, nous donnons un exemple où en présence de deux zones d'habitat,

la population peut devenir dimorphe. Nous donnons référence à [9] pour une autre étude en utilisant l'approche Hamilton-Jacobi, où les situations polymorphes peuvent apparaître également dans un modèle avec des ressources multiples.

Nous indiquons enfin que, puisque n^i , pour $i = 1, 2$, est telle que la fitness H s'annule sur le support de n^i et elle est négative en dehors du support, nous pouvons interpréter n^i comme étant l'ESD ("Evolutionary stable distribution") du modèle. En dynamiques adaptatives, l'ESD correspond à une distribution qui reste stable après introduction de petits mutants (voir [21, 15, 17] pour une définition plus détaillée). Voir aussi [11, 26] pour d'autres travaux en rapport avec la stabilité et la convergence vers l'ESD pour des modèles intégro-différentiels structurés par des traits phénotypiques.

3 Illustrations numériques

Illustrations pour le modèle sans structure spatiale (1) :

Ici nous présentons quelques exemples de résolution de (1), pour le cas $x \in \mathbb{R}^2$, qui ont été présentés dans [20]. Nous montrons d'abord le fait que la répartition isotrope et anisotrope de la population autour d'une masse de Dirac nous mènent à des dynamiques différentes du trait dominant. Cette anisotropie est mesurée par u . Nous choisissons deux états initiaux. Dans le premier cas $-D^2u^0$ est loin d'être une matrice d'identité et dans le second cas il est isotrope :

$$n_0^\varepsilon(x_1, x_2) = C_{\text{mass}} \exp(-(x_1 - .7)^2/\varepsilon - 12(x_2 - .7)^2/\varepsilon), \quad (28)$$

$$n_0^\varepsilon(x_1, x_2) = C_{\text{mass}} \exp(-2.4(x_2 - .7)^2/\varepsilon - 2.4(x_2 - .7)^2/\varepsilon). \quad (29)$$

Nous choisissons un taux de croissance R avec le gradient le long du diagonal :

$$R(x, y, I) = 2 - I - 0.6(x^2 + y^2). \quad (30)$$

Ici, alors que l'état initial est concentré sur le diagonal et ∇R se pointe vers l'origine le long du diagonal, le point de concentration avec la donnée initiale anisotrope (28) se sépare du diagonale (Figure 1 (a)). En revanche, en partant de la donnée initiale isotrope (29), le trait dominant se déplace le long du diagonal grâce à la symétrie comme on pouvait s'y attendre (cf. Figure 1 (b)).

Avec notre second exemple, nous essayons de montrer que, sauf dans les cas avec des données symétriques, une seule masse de Dirac peut persister par les équations de Lotka-Volterra (1). Cela est en effet en cohérence avec le principe d'exclusion compétitive en dynamique adaptative [18, 27] qui indique qu'en présence d'un seul facteur limitant (une seule ressource pour notre modèle) un seul trait dominant peut de manière générique persister.

Nous considérons une donnée initiale avec deux points de concentrations :

$$n_0^\varepsilon(x, y) = C_{\text{mass}} \left[\exp\left(-\frac{2.4}{\varepsilon} \left((x - .25\sqrt{2})^2 + y^2\right)\right) + \exp\left(-\frac{2.4}{\varepsilon} \left((y - .25\sqrt{2})^2 + x^2\right)\right) \right], \quad (31)$$

et nous choisissons un taux de croissance donné par

$$R(x, y, I) = 3 - 1.5I - 5.6(y^2 + R_e x^2). \quad (32)$$

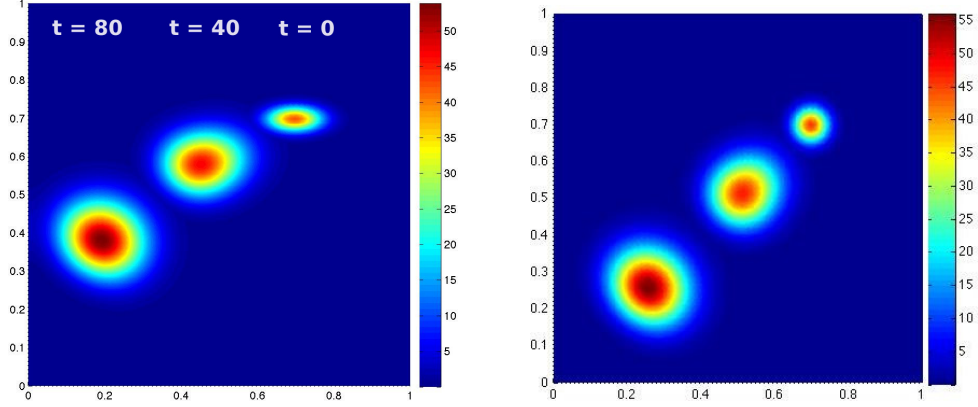


Figure 1: Dynamiques de la densité n avec donnée initiale asymétrique (28) (gauche) et donnée initiale symétrique (29) (droite). Ici l'axe horizontale correspond à x_1 et l'axe vertical correspond à x_2 . La couleur représente la densité n à des instants $t = 0, 40, 80$ avec dt comme l'unité de temps. Ces calculs illustrent l'effet de la matrice $(-D^2u)^{-1}$ sur la dynamique du point de concentration conformément à l'équation canonique (16).

Dans le cas particulier $R_e = 1$, tous les isolignes de R sont des cercles et les deux points de concentrations qui sont donc placés sur un isoligne de R , se déplacent symétriquement vers l'origine (Figure 2 (b)). En revanche, si on choisit $R_e = 1.1$ *i.e.* des isolignes de R sont des ellipses, l'un des deux points de concentration disparaît (Figure 2 (a)). Une possibilité d'explication de ce phénomène est que (16) doit être vérifié pour les deux points, tandis que la contrainte (14) donnée par $I(t)$ est le même pour les deux points. L'un des points de concentration doit donc disparaître.

Les résolutions numériques dans les deux exemples présentées ci-dessus ont été effectués sous Matlab avec $\varepsilon = 0.005$ et C_{mass} tel que la masse initiale est égale 0.3.

Illustrations pour le modèle avec structure spatiale (3) :

Dans cette partie, nous présentons la résolution numérique du modèle (3), avec deux zones d'habitat, en utilisant les paramètres ci-dessous

$$\begin{aligned} R^1(x, I) &= 3 - (x + 1)^2 - I, & R^2(x, I) &= 3 - (x - 1)^2 - I, & \psi^1(x) &= \psi^2(x) = 1, \\ \nu^1 &= \nu^2 = 2.5, & \varepsilon &= .001, & L &= 2. \end{aligned} \quad (33)$$

Ces résolutions numériques sont issues de [23]. Les résultats théoriques obtenues dans les théorèmes 2.4 et 2.5 suggèrent que les solutions stationnaires de (3) se concentrent en une ou deux masses de Dirac qui sont symétriques par rapport à l'origine (voir [23] pour plus de détails).

Comme nous observons dans Figure 3, n_ε^1 et n_ε^2 , avec $(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$ solution du problème dépendant du temps 3 avec des paramètres donnés par (33), se concentrent en temps long sur une seule masse de Dirac à l'origine, qui correspond à un trait moyennement bien pour chacune des zones d'habitat, en absence de migration. Dans cette simulation, initialement n_ε^1 est concentré au point $x = -0.3$ et n_ε^2 est concentré au point $x = 0.3$.

Dépendant des paramètres du modèle, on peut observer également la stabilité en temps long des

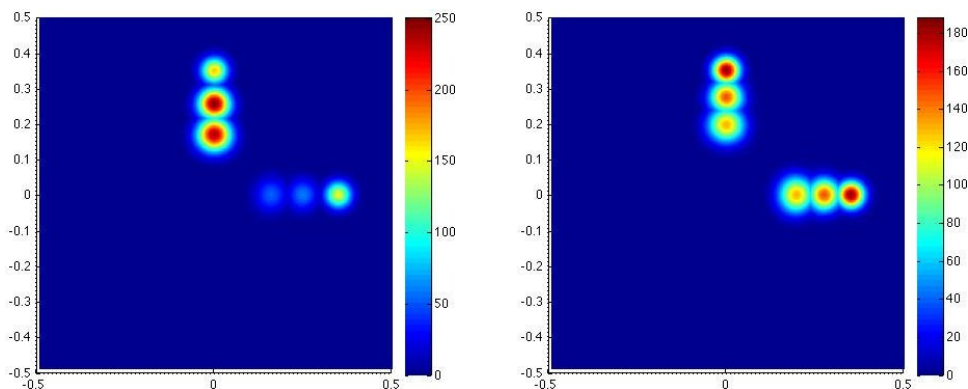


Figure 2: Cette figure illustre le fait que, sauf dans le cas des données symétriques, l'équation de Lotka-Volterra (1) mène à une seule masse de Dirac. Nous représentons la dynamique de la densité n avec un taux de croissance R qui est asymétrique à gauche et symétrique à droite, à des instants $t = 5, 90, 180$ avec dt comme l'unité de temps.

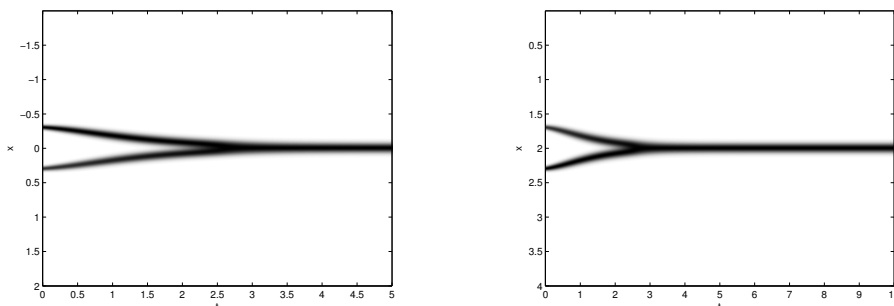


Figure 3: Dynamiques du problème (3) avec des paramètres donnés par (33). Dans les deux figures, l'axe horizontal correspond au temps t et l'axe vertical correspond à x . Les niveaux de gris représentent la valeurs de n_ε^1 (gauche) et n_ε^2 (droite). Initialement n_ε^1 est concentré au point $x = -0.3$ et n_ε^2 est concentré au point $x = 0.3$. Grâce à la migration les deux traits apparaissent rapidement dans les deux zones, mais en temps long un seul trait dominant persiste.

situations dimorphes. Par exemple, si l'on modifie les valeurs de ν^1 et ν^2 dans (33) comme ci-dessous

$$\begin{aligned} R^1(x, I) &= 3 - (x + 1)^2 - I, & R^2(x, I) &= 3 - (x - 1)^2 - I, & \psi^1(x) &= \psi^2(x) = 1 \\ \nu^1 &= \nu^2 = 1, & \varepsilon &= .001, & L &= 2, \end{aligned} \quad (34)$$

alors n_ε^1 and n_ε^2 , avec $(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$ solution du problème dépendant du temps 3, se concentrent en temps long sur deux points distincts, l'un plus favorable à la zone 1 et l'autre plus favorable à la zone 2 (voir Figure 4). En absence de migration, les traits optimaux, respectivement dans les zones 1 et 2 sont $x = -1$ et $x = 1$. En présence de migration, les deux traits initiaux apparaissent immédiatement dans les deux zones et évoluent vers deux points, l'un près de $x = -0.86$ et l'autre près de $x = 0.86$.

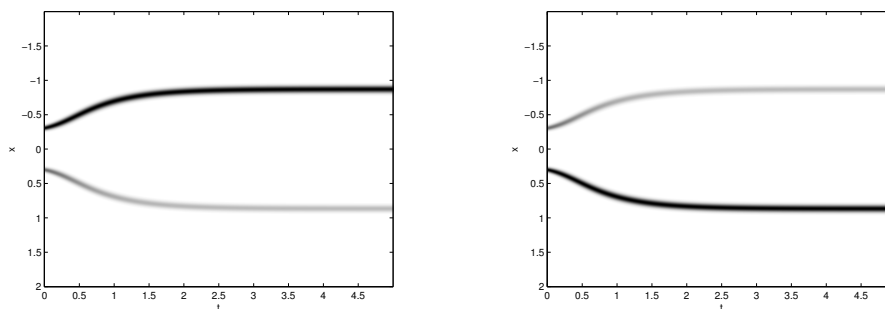


Figure 4: Dynamiques du problème (3) avec des paramètres donnés par (33). Dans les deux figures, l'axe horizontal correspond au temps t et l'axe vertical correspond à x . Les niveaux de gris représentent la valeurs de n_ε^1 (gauche) et n_ε^2 (droite). Initialement n_ε^1 est concentré au point $x = -0.3$ et n_ε^2 est concentré au point $x = 0.3$. En absence de migration, les traits optimaux, respectivement dans les zones 1 et 2 sont $x = -1$ et $x = 1$. En présence de migration, les deux traits initiaux apparaissent immédiatement dans les deux zones et évoluent vers deux points, l'un près de $x = -0.86$ et l'autre près de $x = 0.86$.

References

- [1] A. Arnold, L. Desvillettes, and C. Prévost. Existence of nontrivial steady states for populations structured with respect to space and a continuous trait. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 11:83–96, 2012.
- [2] V. Bansaye and A. Lambert. Past, growth and persistence of source-sink metapopulations. *Preprint*.
- [3] G. Barles, S. Mirrahimi, and B. Perthame. Concentration in Lotka-Volterra parabolic or integral equations: a general convergence result. *Methods Appl. Anal.*, 16(3):321–340, 2009.
- [4] G. Barles and B. Perthame. Concentrations and constrained Hamilton-Jacobi equations arising in adaptive dynamics. *Contemp. Math.*, 439:57–68, 2007.
- [5] J. Busca and B. Sirakov. Harnack type estimates for nonlinear elliptic systems and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21:543–590, 2004.
- [6] J. A. Carrillo, S. Cuadrado, and B. Perthame. Adaptive dynamics via Hamilton-Jacobi approach and entropy methods for a juvenile-adult model. *Math. Biosci.*, 205(1):137–161, 2007.
- [7] N. Champagnat, R. Ferrière, and S. Méléard. Unifying evolutionary dynamics: From individual stochastic processes to macroscopic models. *Th. Pop. Biol.*, 69(3):297–321, 2006.
- [8] N. Champagnat, R. Ferrière, and S. Méléard. *Individual-based probabilistic models of adaptive evolution and various scaling approximations*, volume 59 of *Progress in Probability*. Birkhäuser, 2008.
- [9] N. Champagnat and P.-E. Jabin. The evolutionary limit for models of populations interacting competitively via several resources. *Journal of Differential Equations*, 261:179–195, 2011.

- [10] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.
- [11] L. Desvillettes, P.-E. Jabin, S. Mischler, and G. Raoul. On mutation-selection dynamics for continuous structured populations. *Commun. Math. Sci.*, 6(3):729–747, 2008.
- [12] U. Dieckmann and R. Law. The dynamical theory of coevolution: A derivation from stochastic ecological processes. *J. Math. Biol.*, 34:579–612, 1996.
- [13] O. Diekmann. A beginner's guide to adaptive dynamics. In *Mathematical modelling of population dynamics*, volume 63 of *Banach Center Publ.*, pages 47–86. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.
- [14] O. Diekmann, P.-E. Jabin, S. Mischler, and B. Perthame. The dynamics of adaptation: an illuminating example and a Hamilton-Jacobi approach. *Th. Pop. Biol.*, 67(4):257–271, 2005.
- [15] Ilan Eshel. Evolutionary and continuous stability. *Journal of Theoretical Biology*, 103(1):99 – 111, 1983.
- [16] L.C. Evans. The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE. *Proc. R. Soc. Edinb. Sec. A*, 111:359–375, 1989.
- [17] P.-E. Jabin and G. Raoul. On selection dynamics for competitive interactions. *J. Math. Biol.*, 63(3):493–517, 2011.
- [18] S. A. Levin. Community equilibria and stability, and an extension of the competitive exclusion principle. *The American Naturalist*, 104:413–423, 1970.
- [19] S. Lion and M. van Baalen. Self-structuring in spatial evolutionary ecology. *Ecology Letters*, 11:277–295, 2008.
- [20] A. Lorz, S. Mirrahimi, and B. Perthame. Dirac mass dynamics in multidimensional nonlocal parabolic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(6):1071–1098, 2011.
- [21] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246:15–18, 1973.
- [22] J. A. J. Metz, R. M. Nisbet, and S. A. H. Geritz. How should we define "fitness" for general ecological scenarios? *TREE*, 7:198–202, 1992.
- [23] S. Mirrahimi. Migration and adaptation of a population between patches. *Discrete and Continuous Dynamical Systems ? Series B (DCDS-B)*, 18(3):753–768, 2013.
- [24] B. Perthame and G. Barles. Dirac concentrations in Lotka-Volterra parabolic PDEs. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(7):3275–3301, 2008.
- [25] G. Raoul. Local stability of evolutionary attractors for continuous structured populations. *To appear in Monatssh. Math.*, 2010.
- [26] G. Raoul. Long time evolution of populations under selection and vanishing mutations. *Acta Applicandae Mathematica*, 114, 2011.
- [27] T. W. Schoener. Resource partitioning in ecological communities. *Science*, 13:27–39, 1974.
- [28] A. Szilágyi and G. Meszéna. Two-patch model of spatial niche segregation. *Evolutionary Ecology*, 23:187–205, 2009.