Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012

Sergei B. Kuksin

Les EDPs hamiltoniennes perturbées et dissipées

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n^{o} XXXII, 8 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A32_0>

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2011-2012
Exposé n° XXXII, 1-8

Les EDPs hamiltoniennes perturbées et dissipées

Sergei B. Kuksin

1 Introduction

Nous sommes intéressés en la classe d'équations suivante :

$$(*) \qquad \langle \text{l'EDP hamiltonienne} \rangle = \nu\text{-petite dissipation } + \kappa_\nu \langle \text{force} \rangle,$$

ici $\nu \ll 1$ est une constante, et le facteur d'échelle κ_ν est de telle sorte que la solution reste de l'ordre d'un quand $\nu \to 0$ et $t \gg 1$. La constante κ_ν est inconnue et une partie du problème est donc de la trouver. Ce sont les EDPs hamiltoniennes perturbées et dissipées.

Les équations $(*)$ décrivent la turbulence dans divers milieux physiques. Par exemple, la turbulence dans l'eau est décrite par les équations de Navier-Stokes ; c'est a dire l'équation $(*)$ dans laquelle l'EDP hamiltonienne est l'équation de Euler et la dissipation est $\nu\Delta$. La turbulence optique est décrite par l'équation CGL. C'est l'équation $(*)$ dans laquelle l'EDP hamiltonienne est l'équation de Schrödinger non-linéaire ou linéaire.

Nous allons discuter des équations dans le cas du volume fini. La force sera déterministe ou aléatoire. Nous sommes plus intéressé dans les équations stochastiques. Les objets qu'on pourra construire existent aussi dans le cas déterministe, mais dans ce cas, les résultats qu'on pourra obtenir serons moins intéressants.

1.1 Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes (NSE) sont un exemple très important des équations $(*)$. Elles existent en dimension 2 et 3. En dimension 1 on peut considérer l'équation de Burgers comme un 1d modèle pour le système de Navier-Stokes. La théorie de turbulence utilise l'équation $(*)$ avec ν égal $10^{-20} - 10^{-10}$. Donc la théorie de la turbulence s'occupe des équations $(*)$ avec ν très petits.

A propos de la constante κ_ν :
- pour 1d Burgers $\kappa_\nu = 1$,
- pour 2d NSE $\kappa_\nu = \sqrt{\nu}$,
- pour 3d NSE rien n'est clair. Kolmogorov a cependant prédit que $\kappa_\nu = 1$.

Nous connaissons beaucoup de l'équation de Burgers (voir [Bor12]). Nous ne savons presque rien de 3d NSE. Par exemple, nous ne connaissons pas le facteur d'échelle κ_ν. Mais nous connaissons quelque chose de 2d NSE ; depuis l'an 2000 de grands progrès ont été fait en ce domaine. On va en parler ici.

Considérons les équations 2d NSE avec les conditions aux limites périodiques et la moyenne égale à zéro :

$$\dot{u} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \sqrt{\nu}\,(\text{force aléatoire }), \quad \operatorname{div} u = 0; \qquad (NSE)$$

$$x \in \mathbb{T}^2, \qquad \int u\,dx = \int \text{force}\,dx = 0.$$

La force aléatoire est lisse en x. Comme une fonction de temps t elle est un bruit blanc non-dégénéré. Soit $\mathcal{H}$ un espace approprié des champs de vecteurs solénoïdales $u(x), x \in \mathbb{T}^2$, tels que $\int u\,dx = 0$. Nous avons alors :

- (NSE) a un unique équilibre statistique. C'est une mesure μ_ν dans l'espace $\mathcal{H}$ telle que la distribution $\mathcal{D}(u(t))$ de chaque solution $u(t)$ de (NSE) converge vers μ_ν quand $t \to \infty$. μ_ν s'appelle une mesure stationnaire.
- quand $\nu \to 0$, la constante de Reynolds de la mesure stationnaire μ_ν, egale $\mathrm{Re}\,(\mu_\nu) \sim \nu^{-1} \int |u|^2_{L_2} \mu(du)$, diverge vers l'infini.
- L'ensemble de mesures stationnaires $\{\mu_\nu, 0 < \nu \leq 1\}$ est tendue (=étroite précompacte) dans l'espace de mesures sur $\mathcal{H}$, et chaque mesure limite $\mu_0 = \lim_{\nu_j \to 0} \mu_{\nu_j}$ est une mesure invariante de la 2d équation d'Euler (c'est-à-dire, de $(\text{NSE})_{\nu=0}$).
- Toutes les mesures limites μ_0 sont "vraiment les mesures de dimension infinie" : μ_0-mesure de chaque sous-ensemble de $\mathcal{H}$ de dimension finie égale à zéro.

La limite $\lim_{\nu_j \to 0} \mu_{\nu_j}$ s'appelle *la limite non visqueuse.* Le(s) mesure(s) limite(s) μ_0 décrivent la turbulence 2d périodique. Malheureusement il n'est pas connu si la limite μ_0 est unique ; c'est à dire si elle dépend de la séquence $\nu_j \to 0$, et comment on peut la calculer. Voir [KS12].

Au lieu de la 2d NSE, nous considérons les autres EDPs hamiltoniennes perturbées et dissipées. Pouvons-nous dire plus sur ces équations ?

1.2 Les CGL équations

Considérons les équations NLS perturbées et dissipées (elles sont responsables de la turbulence optique) :

$$\dot{u} + i\Delta u - i|u|^2 u = \nu \Delta u + \sqrt{\nu}\,(\text{force aléatoire}),$$

$d := \dim x = 1, 2, 3$. Nous sommes intéressés en solutions avec $\nu \ll 1$ pour le temps large. Nous passons donc au temps lent τ,

$$\tau = \nu t,$$

et écrivons l'équation utilisant ce temps :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu^{-1} i \big(\Delta u - |u|^2 u\big) = \Delta u + (\text{force aléatoire}). \tag{1.1}$$

Si $d \leq 3$, alors (CGL_1) a une mesure stationnaire (=l'équilibre statistique) μ_ν, qui est aussi une mesure stationnaire pour (1.1). Comme dans le cas de (NSE), pour les séquences $\nu_j \to 0$ nous aurons les limites $\mu_{\nu_j} \rightharpoonup \mu_0$ quand $\nu_j \to 0$, et μ_0 est une mesure invariante pour l'équation NLS

$$\dot{u} + i\Delta u - i|u|^2 u = 0. \qquad (NLS)$$

Voir [KS04]. Si $d = 1$, l'équation NLS est intégrable et nous connaissons beaucoup plus sur la limite non visqueuse, voir [KP08] et [Kuk10]

Maintenant considérons les oscillations faibles dans l'équation NLS perturbée et dissipée, avec un champ électrique extérieur. Dans ce cas l'EDP hamiltonienne est l'équation linéaire de Schrödinger avec un potentiel. Nous supposons que la dissipation est non-lineaire :

2 L'équation de Schrödinger linéaire perturbée et dissipée

Nous écrivons l'équation en utilisant le temps lent $\tau = \nu t$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu^{-1} i \left(-\Delta u + V(x)u\right) = \Delta u - \gamma_R |u|^{2p} u - i\gamma_I |u|^{2q} u + (\text{force aléatoire}), \tag{2.1}$$

$$x \in \mathbb{T}^d, \;\; \gamma_R, \gamma_I \geq 0, \; \gamma_R + \gamma_I = 1; \;\; V(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}).$$

– Si $d = 1$, alors $p, q \geq 0$ sont des nombres arbitraires.
– Si $d \geq 2$, alors on doit imposer quelques restrictions sur les paramètres. Par exemple :
– $d = 2$, $\gamma_R > 0$, $p \geq q \geq 0$ sont des nombres arbitraires.
La force aléatoire est une fonction lisse de x qui comme une fonction de t est un bruit blanc :

$$(\text{force aléatoire }) = \frac{d}{d\tau} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \bar{\beta}_j(\tau) e_j(x).$$

Ici $\{e_j(x), \; j \geq 1\}$ est la base exponentielle dans l'espace $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^d; \mathbb{C})$, les b_js sont les nombres réels qui convergent vite à a zero, et les $\{\bar{\beta}_j(\tau)$s sont les processus de Wiener standards complexes et indépendants. Nous supposons que la force est non-dégénérée :

$$b_j \neq 0 \qquad \forall j.$$

Notons

$$\mathcal{H}^r = H^r(\mathbb{T}^d; \mathbb{C}).$$

Théorème 2.1. *Si* $u_0 \in \mathcal{H}^r$, $r > d/2$, *alors* $\exists!$ *solution* $u(\tau)$, $\tau \geq 0$, *de éq.* (2.1), *telle que* $u(0) = u_0$.

Alors eq. (2.1) détermine un système aléatoire dans l'espace $\mathcal{H}^r$, et un processus de Markov dans cet espace. Soit la donnée initiale $u(0) = u_0$ une variable aléatoire, $u_0 = u_0^\omega$. La distribution $\mathcal{D}(u_0)$ de u_0 est alors une mesure dans $\mathcal{H}^r$. Trouvons la solution $u^\omega(\tau)$ et calculons la mesure $\mathcal{D}(u(\tau))$ – la distribution de cette solution dans le temps τ. On rappelle qu'une mesure μ dans $\mathcal{H}^r$ est une mesure stationnaire pour eq. (2.1) si « $\mathcal{D}(u_0) = \mu$ implique que $\mathcal{D}(u(\tau)) \equiv \mu$ pour chaque τ. »

Utilisant le principe de Bogolyubov–Krylov on prouve facilement qu'il y a une mesure stationnaire pour eq. (2.1). On peut appliquer les méthodes qui ont été développées pendant les dix dernières années pour étudier la 2d NSE, et prouver que la mesure stationnaire est unique :

Théorème 2.2 (Kuksin-Shirikyan [KS00], Harier [Hai02], Odasso [Oda06], Shirikyan [Shi06])**.** *Si eq.* (2.1) *satisfait les conditions ci-dessus, alors il y a exactement un mesure stationnaire* μ^ν. *Pour chaque solution* $u(\tau)$ *de* (2.1) *nous avons*

$$\mathit{dist}\,(\mathcal{D}(u(\tau)), \mu^\nu) \to 0 \quad \mathit{as} \quad \tau \to \infty.$$

PROBLEMES. a) Qu'est-ce que se passe aux solutions $u^\nu(\tau, x)$ quand $\nu \to 0$?
b) Qu'est-ce que se passe à la mesure stationnaire μ^ν quand $\nu \to 0$?

C'est facile à vérifier que l'ensemble de mesures $\{\mu^\nu, 0 < \nu \le 1\}$ est tendu (=précompact). Donc, $\mu^{\nu_j} \rightharpoonup \mu^0$ quand $\nu_j \to 0$. Comme avant, on peut prouver que μ^0 est une mesure invariante pour l'équation de Schrödinger linéaire

$$\dot u + i(-\Delta u + V(x)u) = 0. \tag{2.2}$$

Mais laquelle ? – Il y a beaucoup de mesures qui sont invariantes pour (2.2) ! Si la limite μ^0 dépend de la séquence $\nu_j \to 0$? ? Rappelons que pour l'équation (NSE) on ne sait pas la réponse à ces questions !

2.1 v-coordonnées

Considérons l'opérateur $A = -\Delta + V(x)$. Supposons que $V \ge 1$ est lisse et notons par $\xi_1, \xi_2, \dots$ les fonctions propres réelles, L_2-normalisées, avec les valeurs propres $1 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ Supposons que le spectre $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ est non-résonant dans le sens que

$$\sum \lambda_j \cdot s_j \neq 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{Z}^\infty, \;\; 0 < |s| < \infty.$$

C'est une restriction légère car on a

Lemme 2.3. *Les potentiels V non-résonants sont typiques à la fois dans le sens de Borel et dans le sens de mesure.*

Transformation de Fourier. Pour chaque fonction $u(x) \in \mathcal{H} = L_2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ décomposons-la en la ξ-base :

$$u(x) = v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + \dots, \quad v_j \in \mathbb{C}.$$

Notons $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$. Ce sont les (complexes) *v-coordonnées.* Considérons l'application

$$\Psi : u(\cdot) \mapsto \mathbf{v}$$

(la transformation de Fourier). Au cause d'identité de Parseval, c'est une transformation unitaire $\mathcal{H} \to l_2$. Dans les v-coordonnées l'équation (2.2) devient

$$\frac{\partial}{\partial \tau} v_j + i\nu^{-1}\lambda_j v_j = 0 \qquad \forall\, j.$$

Considérons les variables correspondantes action-angle :

$$I_j = \frac{1}{2}|v_j|^2, \;\; \varphi_j = \operatorname{Arg} v_j \in S^1; \quad I = (I_1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty_+, \;\; \varphi = (\varphi_1, \dots) \in \mathbb{T}^\infty.$$

Avec ces coordonnées l'équation devient

$$\dot I_j = 0, \qquad \dot\varphi_j + \nu^{-1}\lambda_j = 0 \qquad \forall j\,.$$

Donc :

a) les actions I_j's sont les intégrales de motion de (2.2),

b) les mesures invariantes pour (2.2) sont les mesures de la forme $p(I) dI\, d\varphi$.

Nous voulons découvrir :

a′) comment se comportent les actions $I_j(u(\tau))$, quand $u(\tau)$ est une solution d'équation CGL (2.1) ?

b′) quelles mesures invariantes $p(I)dI\,d\varphi$ peut-on obtenir comme une limite non visqueuse de mesures stationnaires de (2.1) ?

Pour le faire nous écrivons eq. (2.1) en utilisant les v-variables :

$$(\partial/\partial\tau)\mathbf{v} + i\nu^{-1}\mathrm{diag}\,\{\lambda_j\}\mathbf{v} = \Psi\Big(\Delta u - \gamma_R|u|^{2p}u - \gamma_I|u|^{2q}u\Big) + \Psi\big((\text{force aléatoire})\big).$$

Ici $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$ et $u := \Psi^{-1}(\mathbf{v})$. Passons aux variables actions-angles :

$$\begin{aligned}(\partial/\partial\tau)I_j + 0 &= F_j(I,\varphi) + (\text{force aléatoire})_j, \quad j \ge 1,\\ (\partial/\partial\tau)\varphi_j + \nu^{-1}\lambda_j &= \dots, \qquad j \ge 1.\end{aligned}$$

Nous sommes dans le cadre de la théorie de la moyennisation. Donc, nous espérons que la limite $I^0(\tau) = \lim_{\nu\to 0} I^\nu(\tau)$ $(0 \le \tau \le T)$ existe et satisfait l'I-équation moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}I_j(\tau) = \langle F_j\rangle(I) + \langle(\text{force aléatoire})_j\rangle, \quad j \ge 1.$$

Ici

$$\langle F_j\rangle(I) = \int_{\mathbb{T}^\infty} F_j(I,\varphi)\,d\varphi$$

et $\langle(\text{force aléatoire})_j\rangle$ est définie par une règle stochastique similaire. Malheureusement, dans le cas de la dimension infinie cette idée ne fonctionne pas car $I(\tau) \in \mathbb{R}^\infty_+$. $\mathbb{R}^\infty_+$ est un espace des phases très inapproprié, et l'I-équation moyenne est singulière !

Pour étudier la dynamique limitante nous utiliserons les autres – non-singulières – équations limitantes.

2.2 Equations Effectives

L'équation effective pour (2.1) est l'équation suivant :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v} = -\widehat{A}\mathbf{v} + \mathcal{L}\mathbf{v} + R(\mathbf{v}) + (\text{force aléatoire}). \tag{2.3}$$

Ici

- $\widehat{A} = \mathrm{diag}\,\{\lambda_j, j \ge 1\}$,
- $\mathcal{L}$ =diag $\{l_k\}$ – un opérateur linéaire borné qui est défini dans le cadre de la transformation Fourier du potentiel $V(x)$, telle que $-\widehat{A} + \mathcal{L} \le -\frac{1}{2}\widehat{A}$.
- La non-linéarité $R(v)$ est construite du terme dissipatif dans eq. (2.1) $-\gamma_R|u|^{2p}u$. R est une application analytique, localement Lipschitz.
- (force aléatoire)$_k = \frac{\partial}{\partial\tau}Y_k\bar{\beta}_k(\tau), \quad Y_k = \big(\sum_l b_l^2|\Psi_{kl}|^2\big)^{1/2}$.

Eq. (2.3) s'appelle *l'équation effective* pour l'équation CGL (2.1). C'est une équation de chaleur, semilinéaire stochastique avec une nonlinéarité nonlocale, qui est écrite dans le cadre des coefficients Fourier. Voir [Kuk10, Kuk12].

Considérons les rotations $\Phi_\theta,\ \theta \in \mathbb{T}^\infty$, de vecteurs $\mathbf{v}$:

$$\Phi_\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}', \qquad v'_j = e^{i\theta_j} v_j.$$

L'équation (2) est rotation-invariante : si une courbe $\mathbf{v}(\tau)$ est une solution, alors pour chaque $\theta \in \mathbb{T}^\infty$ sa rotation $\Phi_\theta(\mathbf{v}(\tau))$ est aussi une solution.

L'équation effective (2) ne dépend pas de la partie hamiltonienne $-i\gamma_I|u|^{2q}u$ de la perturbation. Si nous ajoutons à eq. (2.1) un autre terme hamiltonien $i\nabla_u\tilde{h}(u)$, l'équation effective ne change pas.

Exemple. Si $p = 1$, c'est-à-dire que la non-linéarité dissipative dans eq. (2.1) est égale à $-\gamma_R|u|^2u$, alors la non-linearité en (2.3) est égale $R(\mathbf{v})_k = -\gamma_R v_k \sum_l |v_l|^2 L_{kl}$. Ici L_{kl} est un tenseur explicite. Alors l'équation effective (2.3) devient

$$\frac{\partial}{\partial\tau} v_k = (-\lambda_k + l_k)v_k - \gamma_R v_k \sum_l |v_l|^2 L_{kl} + Y_k \frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\beta}_k(\tau), \qquad k \geq 1.$$

On peut décrire la dynamique de temps long pour eq. (2.1) par la dynamique pour l'équation effective :

Théorème 2.4. *Soit $u^\nu(\tau), 0 \leq \tau \leq T$, une solution d'eq.* (2.1) *avec $u^\nu(0) = u_0$, et soit $\mathbf{v}^\nu(\tau) = \Psi(u^\nu(\tau))$. Soit $\mathbf{v}(\tau)$ une solution de l'équation effective* (2.3)*, telle que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0} = \Psi(u_0)$. Alors,*

$$I(\mathbf{v}^\nu(\tau)) \rightharpoonup I(\mathbf{v}(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq T, \tag{2.4}$$

quand $\nu \to 0$, en probabilité.

Il y a une version déterministe de ce résultat :

Théorème 2.5. *Soit dans eq.* (2.1) *la force égale à zéro. Alors, pour chaque u_0, nous avons la convergence* (2.4)*, où $\mathbf{v}(\tau)$ est une solution d'eq.* (2.3) *sans la force aléatoire, et $\mathbf{v}(0) = \Psi(u_0)$.*

La relation entre le cas aléatoire et le cas déterministe n'est pas toujours aussi simple que cela. Retraitons à 1d NLS dissipée et perturbée :

$$\frac{\partial}{\partial\tau} u + \nu^{-1} i(u_{xx} - |u|^2 u) = u_{xx} + \gamma \cdot (\text{force aléatoire}), \qquad x \in \mathbb{T}^1, \tag{2.5}$$

$\gamma \in \{0, 1\}$. Eq. (NLS) est intégrable. Soit $I_1, I_2, \ldots$ les intégrales de motion (chaque I_j est une fonctionnelle non négative et analytique). On peut construire une équation effective correspondante

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v} = (\widehat{\partial^2/\partial x^2})\mathbf{v} + R_\gamma(\mathbf{v}) + \gamma \cdot (\text{force aléatoire})'. \tag{2.6}$$

Ici R_γ est un opérateur non-local analytique de l'ordre de 1. Donc (2.6) est une équation de chaleur quasi linéaire ; stochastique si $\gamma = 1$. Elle est bien-posée. Soit $u^\nu(\tau)$ une solution de (2.5), $u^\nu(0) = u_0$, et $\mathbf{v}(\tau)$ une solution de (2.6) telle que $\mathbf{v}(0) = v_0 = v_0(u_0)$.

Théorème 2.6 (le cas aléatoire, [KP08, Kuk10])**.** *Soit $\gamma = 1$. Alors*

$$I(u^\nu(\tau)) \rightharpoonup I(v(\tau)), \qquad 0 \leq \tau \leq T,$$

quand $\nu \to 0$, en probabilité.

On ne sait pas si la version déterministe de cette résultat est vrai. Considérons l'équation avec une perturbation déterministe lisse :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u + \nu^{-1} i (u_{xx} - |u|^2 u) = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^1, \ f \in C^\infty.$$

Soit $v(\tau)$ la solution de l'équation effective correspondante.

Théorème 2.7 (le cas déterministe, [Gua12])**.** *Pour u_0 typique, nous avons la convergence*

$$I(u^\nu(\tau)) \to I(v(\tau)), \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad \textit{quand} \quad \nu \to 0.$$

Revenons à eq. (2.1). Soit μ^ν son unique mesure stationnaire et $\Psi \circ \mu^\nu$ – cette mesure écrite en les v-variables. Considérons la distribution des actions correspondantes à μ^ν.

Théorème 2.8. *L'équation effective a une mesure stationnaire unique m_0, et*

$$I \circ \Psi \circ \mu^\nu \rightharpoonup I \circ m_0 \quad \textit{quand} \quad \nu \to 0.$$

C'est-à-dire, la distribution des actions, correspondant à μ^ν, converge à la distribution des actions, correspondant à m_0

Comment se comportent les angles des mesures μ^ν ? Leur distribution est donnée par la mesure $\varphi \circ \Psi \circ \mu^\nu$. Comment se comporte donc la mesure quand $\nu \to 0$?

Théorème 2.9. *Quand $\nu \to 0$, la mesure $\varphi \circ \Psi \circ \mu^\nu$ converge à la mesure de Haar $d\varphi$ sur le tore $\mathbb{T}^\infty$.*

(Cela s'appelle *l'approximation des phase aléatoires.*) Les Théorèmes 2.8, 2.9 impliquent

Théorème 2.10. $\Psi \circ \mu^\nu \rightharpoonup m_0$ *quand $\nu \to 0$. C'est à dire, la mesure stationnaire unique d'eq.* (2.1)*, écrite dans les v-variables, converge à la mesure stationnaire unique de l'équation effective* (2.3)*.*

Donc pour chaque solution $u^\nu(\tau)$ de (2.1) nous avons

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{\tau \to \infty} \mathcal{D}(\Psi(u^\nu(\tau)) = m_0.$$

Exemple. Si $\gamma_R = 0$, alors l'équation effective est linéaire. Sa mesure stationnaire unique m_0 est la mesure gaussien qui est la distribution du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\int_{-\infty}^{0} e^{s(-\widehat{A}+\mathcal{L})} \cdot (\mathrm{diag}\,\{Y_j\})\ d\bar{\beta}(s).$$

2.3 Equations sans dissipation

Suite à Debussche–Odasso [DO05], considérons 1d-équation CGL sans dissipation (mais avec friction). Soit $p = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \nu^{-1} i \left(-u_{xx} + V(x) u\right) = -\gamma_R |u|^2 u - i \gamma_I |u|^{2q} u + (\text{force aléatoire}).$$

Maintenant l'équation effective est le système

$$\frac{\partial}{\partial \tau} v_k = -\gamma_R v_k \sum_l |v_l|^2 L_{kl} + Y_k \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\beta}_k(\tau), \quad k \geq 1.$$

Les Théorèmes 2.1-2.10 sont vrais. Voir [Kuk12]

Références

[Bor12] A. Boritchev, *Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation*, Preprint, ArXiv (2012).

[DO05] A. Debussche and C. Odasso, *Ergodicity for the weakly damped stochastic non-linear Shrödinger equations*, J. Evolut. Eq. **5** (2005), 317–356.

[Gua12] Huan Guang, *PhD Thesis, under preparation*, Ecole Polytechnique (2012).

[Hai02] M. Hairer, *Exponential mixing for a stochastic PDE driven by degenerate noise*, Nonlinearity **15** (2002), 271–279.

[KP08] S. B. Kuksin and A. L. Piatnitski, *Khasminskii - Whitham averaging for randomly perturbed KdV equation*, J. Math. Pures Appl. **89** (2008), 400–428.

[KS00] S. B. Kuksin and A. Shirikyan, *Stochastic dissipative PDEs and Gibbs measures*, Comm. Math. Phys. **213** (2000), 291–330.

[KS04] ———, *Randomly forced CGL equation : stationary measures and the inviscid limit*, J. Phys. A : Math. Gen. **37** (2004), 1–18.

[KS12] ———, *Mathematics of Two-Dimensional Turbulence*, Cambridge University Press (to appear), Cambridge, 2012, www.math.polytechnique.fr/∼kuksin/books.html.

[Kuk10] S. B. Kuksin, *Damped-driven KdV and effective equations for long-time behaviour of its solutions*, GAFA **20** (2010), 1431–1463.

[Kuk12] ———, *Weakly nonlinear stochastic CGL equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat., to appear (2012).

[Oda06] C. Odasso, *Ergodicity for the stochastic complex Ginzburg-Landau equations*, Ann. Inst. H. Poincaré - PR **42** (2006), 417–454.

[Shi06] A. Shirikyan, *Ergodicity for a class of Markov processes and applications to randomly forced PDE's. II*, DCDS-A **6** (2006), 911–926.