Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2023-2024

Exposé n° XVIII (21 mai 2024)

Antonin Chodron de Courcel

LA MÉTHODE D'ÉNERGIE MODULÉE ET SES LIMITES POUR DES SYSTÈMES DE PARTICULES EN INTERACTION SINGULIÈRE

https://doi.org/10.5802/slsedp.173

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 2266-0607

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2023-2024
Exposé n° XVIII, 1-9

LA MÉTHODE D'ÉNERGIE MODULÉE ET SES LIMITES POUR DES SYSTÈMES DE PARTICULES EN INTERACTION SINGULIÈRE

ANTONIN CHODRON DE COURCEL

Résumé. On présente la méthode d'énergie libre modulée et son intérêt pour l'étude de modèles de champ moyen en interaction singulière de type Coulomb/Riesz. Il s'agit d'une exploitation d'unicité fort-faible. Dès lors, cela ne peut fonctionner que si l'équation limite a une solution suffisamment régulière. Dans ce cas, on présente une étude de l'équation et des estimées de relaxation vers l'équilibre, ce qui permet d'obtenir un résultat de propagation du chaos qui soit uniforme en temps, et quantitatif.

1. Introduction

Considérons un système de $N \gg 1$ particules dont la dynamique de flot-gradient est la suivante.

$$\begin{cases} dx_i^t = -\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{1 \le j \le N : j \neq i} \nabla \mathsf{g}(x_i^t - x_j^t)dt + \sqrt{2\sigma}\, dW_i^t \\ x_i^t|_{t=0} = x_i^0, \end{cases} \qquad i \in \{1, \dots, N\}. \tag{1.1}$$

Ci-dessus, l'interaction entre les particules est singulière et répulsive, donnée par le potentiel de Riesz

$$|\nabla|^{d-s}\mathsf{g} = \mathsf{c}_{\mathsf{d},\mathsf{s}}(\delta_0 - 1), \qquad s \in [d-2, d). \tag{1.2}$$

On se place sur le tore $\mathbb{T}^d$, en dimension $d \geq 1$, de telle sorte que g est une modification périodique et lisse du potentiel de Riesz usuel $x \mapsto |x|^{-s}$ (ou $x \mapsto -\log|x|$ si $d = 1$, ou $d = 2$, $s = 0$). Lorsque $s = d - 2$, il s'agit donc du potentiel de Coulomb.

Dans la limite d'un grand nombre de particules, on veut démontrer que la densité des particules peut être décrite par l'équation suivante.

$$\begin{cases} \partial_t \mu = \mathrm{div}(\mu \nabla \mathsf{g} * \mu) + \sigma \Delta \mu \\ \mu|_{t=0} = \mu^0, \end{cases} \qquad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^d. \tag{1.3}$$

Il s'agit d'un régime de champ moyen, dans lequel chaque particule contribue faiblement (comme indiqué par l'échelle en N^{-1}) au champ total, avec lequel elle interagit à son tour. L'interaction dominante est de longue portée, à l'inverse d'un régime à la Boltzmann. Nous renvoyons aux notes de Golse [12] pour plus de détails. Tout l'enjeu ici réside dans la divergence de g à l'origine. En effet, un potentiel singulier génère une interaction forte à courte portée, qui pourrait laisser un effet « collisionnel »non négligeable dans la limite $N \to \infty$.

Faire le pont entre le système de particules et l'équation de champ moyen revient à montrer que la mesure empirique $\mu_N^t := N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i^t}$ converge vers la solution μ^t de l'équation (1.3). [1] Cela est qualitativement équivalent à montrer que les particules deviennent statistiquement indépendantes dans la limite $N \to \infty$. On nomme cette propriété le « chaos moléculaire », qui est également à l'origine des équations collisionnelles, bien que l'analyse soit très di□érente... Notons dorénavant $f_N^t \equiv f_N^t(x_1, \dots, x_N)$ la loi des N particules à l'instant $t \geq 0$. On peut énoncer la propriété de chaos moléculaire comme la tensorisation de cette mesure, soit encore

$$f_N^t \sim_{N\to\infty} \mu^{t\otimes N}. \tag{1.4}$$

L'objectif est de démontrer que si cette propriété est vraie initialement ($t = 0$), alors elle reste vraie ultérieurement, et μ sera solution de l'équation (1.3). [2] Nous renvoyons à [7, 6] pour plus de détails quant aux enjeux derrière cette propriété. Ici, nous souhaitons obtenir une version quantitative et uniforme en temps de ce résultat. L'analyse repose sur la méthode d'énergie (libre) modulée.

On comprend maintenant plus précisément pourquoi la singularité du potentiel est l'enjeu de l'analyse : lorsque deux particules se repoussent violemment après s'être approchées, il n'est pas clair que l'on puisse considérer qu'elles soient statistiquement indépendantes dans la limite $N \to \infty$. C'est d'ailleurs ce qu'il se passe dans un gaz de sphère dures : les particules ne sont statistiquement indépendantes qu'avant leurs collisions. Notons cependant que nous considérons un système du premier ordre (sans variable de vitesse), c'est-à-dire non inertiel. [3] Or, l'inertie a pour conséquence que les particules s'échangent leur vitesse en se rapprochant davantage. Sans cela, les particules s'approchent moins et l'on a davantage de chance de propager le chaos. La question équivalente pour un système du second ordre correspond d'ailleurs à la justification de l'équation de Vlasov-Poisson, et demeure à ce jour un problème ouvert (dans le cas $\sigma = 0$, le cas $\sigma > 0$ ayant été résolu par Bresch, Jabin et Soler [2] en dimension 2).

Bien que la singularité de g soit un enjeu, la question de propager le chaos se posait déjà pour un potentiel d'interaction lisse. Dans ce cas, les méthodes initiées par Braun, Hepp et Dobrushin su□sent [1, 10]. Nous renvoyons encore une fois à Golse [12] pour le détail.

Dès que $s > d-2$, le système (1.1) est *a priori* mal posé. [4] L'analyse se fait donc directement à l'aide de la loi des particules, qui est une solution entropique de l'équation de Liouville

$$\begin{cases} \partial_t f_N = \displaystyle\sum_{i=1}^N \mathrm{div}_{x_i}\left(f_N \frac{1}{N}\sum_{1\leq j\leq N: j\neq i} \nabla \mathrm{g}(x_i - x_j)\right) + \sigma \sum_{i=1}^N \Delta_{x_i} f_N \\ f_N|_{t=0} = f_N^0, \end{cases} \tag{1.5}$$

1. Nous restons pour le moment volontairement vague quant à la topologie en jeu.

2. Une question intéressante est celle de la *génération* de chaos, adressée dans [16] où les auteurs exploitent la dissipation de l'énergie modulée à travers une nouvelle inégalité de log-Sobolev.

3. On peut voir le système du premier ordre comme une limite du deuxième ordre dans laquelle le coefficient de friction domine l'accélération des particules, ce qui annule leur inertie.

4. Pour le cas coulombien $s = d - 2$, il existe une unique (*pathwise*) solution forte d'énergie finie à l'équation stochastique.

au sens où, pour tout $T > 0$, $f_N \in L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{T}^d))$, f_N^t est une mesure de probabilités pour presque tout $t \in [0,T]$, vérifie (1.5) au sens des distributions, et satisfait la dissipation d'entropie :

(1.6) $\forall t \in [0,T]$,

$$\int_{(\mathbb{T}^d)^N} \log\big(f_N^t/G_N\big) df_N^t + \sigma \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^d)^N} |\nabla_{x_i} \log(f_N^\tau/G_N)|^2 \, df_N^\tau \le \int_{(\mathbb{T}^d)^N} \log\big(f_N^0/G_N\big) df_N^0,$$

où $G_N := \exp\Big(-\frac{1}{2N\sigma}\sum_{1\le i\neq j\le N} \mathsf{g}(x_i - x_j)\Big)$. Bien entendu, une telle solution existe, et est unique (*cf.* par exemple [8, lemme 6.2]).

2. Principaux résultats et schéma de preuve

L'idée générale de la méthode d'énergie modulée est d'exploiter une forme quantitative d'unicité fort-faible. Dès lors, c'est une méthode qui nécessite suffisamment de régularité sur la solution de (1.3), ce qui, dans un espace fonctionnel linéaire, est une autre façon d'effacer les petites échelles.

Enfin, notons que la justification de (1.3) pour décrire (1.1) passe donc par l'étude des propriétés du modèle « macroscopique ». Il ne s'agit donc pas d'un résultat de *réductionnisme*, idée selon laquelle la description des phénomènes à grande échelle joue un rôle éliminable de notre description des phénomènes physiques.

Décrivons maintenant la méthode. L'énergie modulée est une métrique basée sur l'énergie du système décrit par (1.3). Mathématiquement, elle s'interprète également comme une norme de Sobolev homogène et renormalisée. On la trouve chez Serfaty et Duerinckx [18, 11], définie par

$$F_N(\underline{x}_N, \mu) := \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^d)^2\setminus\triangle} \mathsf{g}(x-y) d\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \mu\right)^{\otimes 2}(x,y), \tag{2.1}$$

où la diagonale $\triangle := \{(x,x) \in (\mathbb{T}^d)^2\}$ doit être retirée. Ici, on travaille avec la loi f_N des particules. Il nous faudra donc considérer l'espérance de cette quantité.

On définit ensuite l'entropie relative (renormalisée) de la loi f_N par rapport à la loi tensorisée $\mu^{\otimes N}$ comme

$$H_N\left(f_N|\mu^{\otimes N}\right) := \frac{1}{N}\int_{(\mathbb{T}^d)^N} \log\left(\frac{f_N}{\mu^{\otimes N}}\right) df_N. \tag{2.2}$$

Des méthodes purement entropiques avaient été proposées par Jabin et Wang [13, 14], qui ont finalement combiné les deux approches pour définir l'*énergie libre modulée* [3, 4, 5] par

$$E_N(f_N, \mu) := \sigma H_N\left(f_N|\mu^{\otimes N}\right) + \int_{(\mathbb{T}^d)^N} F_N(\underline{x}_N, \mu) df_N(\underline{x}_N). \tag{2.3}$$

Avant de préciser les avantages de cette méthode ainsi que l'idée de la démonstration, énonçons notre principal théorème (*cf.* [8, Théorème 1.2]).

Théorème 2.1. *Soit* $d \geq 1$, $\max(0, d-2) \leq s < d$ *et* $\sigma > 0$. *Soit* f_N *une solution entropique de* (1.5), *et* $\mu^0 \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$, *bornée inférieurement* $(\inf_{\mathbb{T}^d} \mu^0 > 0)$. *Alors, l'équation* (1.3) *est globalement bien posée dans* $C\left([0,\infty), \mathcal{P}(\mathbb{T}^d) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)\right)$, *lisse sur* $(0,\infty) \times \mathbb{T}^d$ *et vérifie* $\sup_{\mathbb{T}^d} \mu^0 \geq \sup_{\mathbb{T}^d} \mu^t \geq \inf_{\mathbb{T}^d} \mu^t \geq \inf_{\mathbb{T}^d} \mu^0$.

De plus, si l'on considère la quantité

$$\mathcal{E}_N^t := E_N(f_N^t, \mu^t) + \frac{\log(N\|\mu^t\|_{L^\infty})}{2Nd}\mathbf{1}_{s=0} + \mathsf{C}\|\mu^t\|_{L^\infty}^{s/d} N^{(s/d)-1}, \tag{2.4}$$

où $\mathsf{C} > 0$ *permet de s'assurer que* $\mathcal{E}_N^t \geq 0$, *alors il existe une constante* $C > 0$ *et une fonction* $\mathcal{A} : [0,\infty) \to [0,\infty)$, *dépendant de* $s, d, \sigma, \inf_{\mathbb{T}^d} \mu^0, \|\mu^0\|_{W^{2,\infty}}, \|\mu^0\|_{\dot{H}^{1+s-d}}, \|\mu^0 - 1\|_{L^1}$, *telle que* $\mathcal{A}^0 = 0$, $\sup_{t\geq 0} \mathcal{A}^t < \infty$, *et*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{E}_N(f_N^t, \mu^t) \leq C\left(\mathcal{E}_N(f_N^0, \mu^0) + \mathcal{A}^t N^{-1+\frac{s}{d}}\right). \tag{2.5}$$

Présentons maintenant l'idée derrière ce résultat, ainsi que la raison pour laquelle il fut nécessaire d'introduire une combinaison d'entropie et d'énergie modulée.

La méthode consiste à calculer l'évolution temporelle de l'énergie libre $E_N(f_N^t, \mu^t)$, étant donné des solutions f_N^t et μ^t des équations (1.5) and (1.3), respectivement, pour obtenir une inégalité du type

$$\frac{d}{dt} E_N(f_N^t, \mu^t) \leq C\big(E_N(f_N^t, \mu^t) + N^{-\beta}\big), \tag{2.6}$$

où C dépend de certaines normes de μ^t et $\beta > 0$ dépend de d, s. La conclusion est ensuite obtenue par un lemme de Grönwall. Le contrôle de $E_N(f_N^t, \mu^t)$ permet de démontrer la propagation du chaos car cette quantité métrise à la fois la convergence des marginales à k particules (via l'entropie relative et l'inégalité de Pinsker) et la convergence de la mesure empirique (via l'énergie modulée). En effet, on peut montrer (*cf.* [18, Proposition 3.6]) que pour tout $\zeta > (d/2) + d - s$,

$$\begin{aligned}\|\mu_N - \mu\|_{\dot{H}^{-\zeta}} \leq{}& C\|\mu\|_{L^\infty}^{s/d} N^{(s/d)-1} \\ &+ C\left(F_N(\underline{x}_N, \mu) + \frac{\log(N\|\mu\|_{L^\infty})}{2dN}\mathbf{1}_{s=0} + C\|\mu\|_{L^\infty}^{s/d} N^{(s/d)-1}\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.7}$$

où $C > 0$ ne dépend que de d, s.

Avant la combinaison des méthodes entropiques et d'énergie modulée, il était impossible d'atteindre un résultat de propagation du chaos pour une interaction aussi singulière et en présence d'une température strictement positive.

L'observation clef de [3, 4, 5] est que, lors du calcul de $\frac{d}{dt} E_N(f_N^t, \mu^t)$, les contributions du bruit venant de l'énergie modulée et de l'entropie se compensent exactement. Or, ces contributions sont singulières, puisqu'elles font apparaître le Laplacien $\Delta \mathsf{g}$, qui n'est pas localement intégrable dans notre cas $s \geq d-2$. Cette compensation n'est cependant vraie que pour les dynamiques de flot-gradient.

On obtient ainsi la proposition suivante (*cf.* [8, Proposition 2.12]).

Proposition 2.2. *Soit f_N une solution entropique de l'équation de Liouville* (1.5) *et* $\mu \in C([0,\infty), W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d))$ *solution de* (1.3)*. Alors l'énergie libre modulée satisfait*

$$\frac{d}{dt}E_N(f_N^t,\mu^t) \le -\frac{1}{2}\int_{(\mathbb{T}^d)^N}\int_{(\mathbb{T}^d)^2\setminus\Delta}(u^t(x)-u^t(y))\cdot\nabla \mathsf{g}(x-y)d(\mu_N^t-\mu^t)^{\otimes 2}(x,y)df_N^t, \tag{2.8}$$

où $u^t := \sigma\nabla\log\mu^t + \nabla \mathsf{g} * \mu^t$.

Reste ensuite à contrôler le terme de droite dans (2.8), que l'on peut voir comme un commutateur. Notons tout de suite le résultat (*cf.* [8, Proposition 2.13]).

Proposition 2.3. *Soit $\mu \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}^d}\mu = 1$. Pour toute configuration de particules disjointes $\underline{x}_N \in (\mathbb{T}^d)^N$ et toute fonction lipschitzienne $v : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$, on a*

$$\begin{aligned}\left|\int_{(\mathbb{T}^d)^2\setminus\triangle}(v(x)-v(y))\cdot\nabla\mathsf{g}(x-y)d\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-\mu\right)^{\otimes 2}(x,y)\right| \\ \le C\|\nabla v\|_{L^\infty}\left(F_N(\underline{x}_N,\mu)+\frac{\log(N\|\mu\|_{L^\infty})}{2dN}\mathbf{1}_{s=0}+C\|\mu\|_{L^\infty}^{s/d}N^{-1+s/d}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

où C ne dépend que de s, d.

Remarque 2.4. Il s'agit d'une version ra□née par Rosenzweig et Serfaty [15] de l'inégalité fonctionnelle utilisée initialement, permettant de couvrir tout le spectre $d-2 \le s < d$.

Remarque 2.5. L'exposant $-1+s/d$ dans le terme restant est précis. En e□et, pour une densité μ fixée, la valeur minimale de l'énergie modulée parmi toutes les configurations $\underline{x}_N$ possibles se comporte comme $N^{-1+s/d}$.

L'inégalité fonctionnelle (2.9) peut ensuite être appliquée à la situation décrite en proposition 2.2, c'est-à-dire pour $v \equiv u^t$, $\underline{x}_N \equiv \underline{x}_N^t \sim f_N^t$, en moyennant par rapport à f_N^t, et pour tout $t \ge 0$. Étant donnée que l'entropie relative est une quantité positive, on obtient e□ectivement un bouclage du type de celui décrit en (2.6). Plus précisément, on obtient la proposition suivante.

Corollaire 2.6. *Soit f_N une solution entropique de* (1.5) *et $\mu \in C([0,\infty), W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d))$ solution de* (1.3)*. Alors la quantité*

$$\mathcal{E}_N(f_N^t,\mu^t) := E_N(f_N^t,\mu^t) + \frac{\log(N\|\mu^t\|_{L^\infty})}{2Nd}\mathbf{1}_{s=0} + \mathsf{C}\|\mu^t\|_{L^\infty}^{s/d}N^{(s/d)-1} \tag{2.10}$$

vérifie

$$\mathcal{E}_N(f_N^t,\mu^t) \le \mathcal{E}_N(f_N^0,\mu^0)\exp\left(C\int_0^t\|\nabla u^\tau\|_{L^\infty}d\tau\right), \tag{2.11}$$

où $u^t := \sigma\nabla\log\mu^t + \nabla g * \mu^t$, et C ne dépend que de d, s.

Remarque 2.7. En plus du lemme de Grönwall, on a utilisé la décroissance temporelle de la norme $\|\mu^t\|_{L^\infty}$ pour obtenir ce corollaire.

Remarque 2.8. On voit à travers (2.11) que l'on s'est ramené à une question portant uniquement sur l'équation limite (1.3), à savoir le contrôle de la norme $\|\nabla u^t\|_{L^\infty}$. Cette quantité se développe en deux contributions :

$$\|\nabla u^t\|_{L^\infty} \leq \sigma \|\nabla^{\otimes 2} \log \mu^t\|_{L^\infty} + \|\nabla^{\otimes 2} \mathrm{g} * \mu^t\|_{L^\infty}. \tag{2.12}$$

Si l'on demande su□samment de régularité sur la solution μ, il n'y a aucune di□culté à contrôler le second terme. Néanmoins, la contribution du bruit $\sigma\|\nabla^{\otimes 2} \log \mu^t\|_{L^\infty}$ est plus délicate à contrôler, puisqu'elle fait apparaître μ^t au dénominateur. C'est la motivation principale qui nous a amené à nous placer sur le tore $\mathbb{T}^d$. En e□et, dans cette situation, si la densité est bornée inférieurement initialement $(\inf \mu^0 > 0)$, alors elle le demeure. On pourrait également se placer dans l'espace euclidien, en faisant l'hypothèse d'un potentiel de confinement externe.

Cette restriction fut levée par Rosenzweig et Serfaty dans [17]. L'idée est d'exploiter le système de coordonnées auto-similaires, afin de contrecarrer la fuite des particules à l'infini. Dans ce nouveau système de coordonnées, on se retrouve avec

$$\bar{u}^t := \sigma \nabla \log \frac{\bar{\mu}^t}{\bar{\mu}^t_\sigma} + \nabla g * (\bar{\mu}^t - \bar{\mu}^t_\sigma), \tag{2.13}$$

où μ^t_σ est le minimum d'énergie libre associé à l'équation (1.3) ré-exprimée dans ces nouvelles variables. Le point clef ici est que l'on peut exploiter la régularité de $w^t := \log(\bar{\mu}^t/\bar{\mu}^t_\sigma)$, qui satisfait une équation de Hamilton-Jacobi.

Remarque 2.9. Dans une situation moins régulière sur la solution de l'équation limite ne permettant pas de contrôler le terme

$$\int_0^t \|\nabla v^\tau\|_{L^\infty} d\tau \tag{2.14}$$

(*i.e.* moins que $\mu^0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{T}^d)$), nous ne pouvons pas exploiter la méthode d'énergie libre modulée. Il semblerait que l'on ne sache montrer le lien entre (1.1) et (1.3) qu'à travers la convergence de la mesure empirique, en dimension 2, et pour un potentiel pas plus singulier que le cas Coulombien $s = d-2$. Cela remonte à J.-M. Delort [9] dans l'étude des tourbillons de vorticité de signe constant.

L'idée est de passer à la limite faible directement à partir de l'équation. Étant donnée une fonction test $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ arbitrairement régulière, ce terme peut s'écrire

$$\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^d)^2 \setminus \Delta} (\nabla\phi(x) - \nabla\phi(y)) \cdot \nabla \mathrm{g}(x-y) \mu^t_N(dx) \mu^t_N(dy) dt. \tag{2.15}$$

On peut alors passer à la limite sous condition que $(x, y) \mapsto (\nabla\phi^t(x) - \nabla\phi^t(y)) \cdot \nabla \mathrm{g}(x-y)$ soit continue et bornée sur $(\mathbb{T}^d)^2$, ce qui est le cas pour $d = 2$ et $s = 0$, mais devient vite restrictif.

3. Étude de l'équation (1.3)

Nous avons réduit la question qui nous importait à la seule étude de l'équation limite. En particulier, établir des taux de relaxation permettra de prouver la propagation du chaos uniformément en temps (*cf.* corollaire 2.6).

Le problème de Cauchy pour cette équation peut se traiter de façon classique, à la Cauchy-Lipschitz.

Proposition 3.1. *Soit $d \geq 1$, $s < d$, et $\sigma > 0$.*

- $(s \leq d-1)$ *Si $\mu^0 \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$, alors il existe une unique solution globale à* (1.3) *dans $C([0,\infty), L^\infty(\mathbb{T}^d))$.*
- $(s > d-1)$ *Soit $1 \leq p < \infty$ et $\alpha \geq s+1-d$ satisfaisant $p > d$ ou $\alpha > s-d+d/p$. Si $\mu^0 \in L^\infty(\mathbb{T}^d) \cap \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{T}^d)$, alors il existe une unique solution globale à* (1.3) *dans $C([0,\infty), L^\infty(\mathbb{T}^d) \cap \dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{T}^d))$.*

Remarque 3.2. Il s'agit d'une preuve à la Cauchy-Lipschitz, qui combine un résultat d'existence locale (par point fixe) et un critère d'explosion. Le critère d'explosion s'exprime dans $\|\cdot\|_{L^\infty}$ si $s \leq d-1$, et dans $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)\cap\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{T}^d)}$ si $s > d-1$, où α, p sont exposés ci-dessus.

Le critère d'explosion n'est pas satisfait car les solutions locales satisfont une forme faible du principe du maximum, à savoir $\inf \mu^0 \leq \inf \mu^t \leq \sup \mu^t \leq \sup \mu^0$ (*cf.* [8, Lemme 4.6]). Ainsi, dans le cas où $s \leq d-1$, cela permet de continuer en temps les solutions locales. Dans le cas $d-1 < s < d$, on doit en plus exploiter un lemme de Grönwall pour contrôler la norme $\|\mu^t\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)\cap\dot{W}^{\alpha,p}(\mathbb{T}^d)}$ (*cf.* [8, Proposition 2.2]).

Remarque 3.3. La même proposition est vraie dans le cas conservatif, et non flot-gradient (*cf.* [8, Proposition 2.2]).

Vient ensuite l'étude de la relaxation vers l'état d'équilibre. Pour obtenir des estimées exponentielle en temps dans le cas du flot-gradient, un élément essentiel est la fonctionnelle d'énergie libre

$$\mathcal{F}_\sigma(\mu) := \sigma \int_{\mathbb{T}^d} \mu \log \mu + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{T}^d} g(x-y)\mu(dx)\mu(dy). \tag{3.1}$$

En effet, l'énergie libre du système de flot-gradient décroît exponentiellement vite en temps (ce qui est un calcul classique faisant intervenir l'inégalité de log Sobolev pour absorber la diffusion). Pour des dynamiques conservatives, l'entropie seule suffit à obtenir des estimées.

Donnons immédiatement les estimées finales (cf. [8, Proposition 2.6]).

Proposition 3.4. *Soit μ^t une solution de* (1.3) *telle que $\int_{\mathbb{T}^d} \mu^0 = 1$ et $\mu^0 \geq 0$. Soit $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$.*

- *Si $\max(0, d-2) \leq s \leq d-1$, alors il existe des constantes $C, C_\varepsilon > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, ainsi que des fonctions $\mathbf{W}_{n,q}, \mathbf{W}_{\alpha,q} : [0,\infty)^4 \to [0,\infty)$, continues, décroissantes, et polynomiales en leurs arguments, telles que pour tout $t > 0$,*

$$\begin{aligned} \||\nabla|^\alpha \mu^t\|_{L^q} \leq \mathbf{W}_{\alpha,q}(\|\mu^0\|_{L^\infty}, \sigma^{-1}, \|\mu^0 - 1\|_{L^q}, \mathcal{F}_\sigma(\mu^0))(\sigma t)^{-\alpha/2} \\ \times \big(1 + C_\varepsilon(\sigma t)^{-\varepsilon}\mathbf{1}_{s=d-1\wedge q=1}\big)e^{-C\sigma t} \end{aligned} \tag{3.2}$$

et

$$\|\nabla^{\otimes n}\mu^t\|_{L^q} \leq \mathbf{W}_{n,q}(\|\mu^0\|_{L^\infty}, \sigma^{-1}, \|\mu^0 - 1\|_{L^q}, \mathcal{F}_\sigma(\mu^0))(\sigma t)^{-n/2}\|\mu^0\|_{L^q} \times \big(1 + C_\varepsilon(\sigma t)^{-\varepsilon}\mathbf{1}_{s=d-1\wedge q=1}\big)e^{-C\sigma t}, \tag{3.3}$$

• *Si $d-1 < s < d$, il existe une constante $C > 0$ et des fonctions $\mathbf{W}_{\alpha,q}, \mathbf{W}_{n,q} : [0,\infty)^5 \to [0,\infty)$, continues, décroissantes, et polynomiales en leurs arguments telles que pour tout $t > 0$,*

$$\||\nabla|^\alpha\mu^t\|_{L^q} \leq \mathbf{W}_{\alpha,q}(\|\mu^0\|_{L^\infty}, \|\mu^0\|_{\dot{H}^{\lambda_2}}, \sigma^{-1}, \|\mu^0 - 1\|_{L^{2/(d-s)}}, \mathcal{F}_\sigma(\mu^0))(\sigma t)^{-\alpha/2} \times \big(1 + (\sigma t)^{-\varepsilon}\mathbf{1}_{q=\infty}\big)e^{-C\sigma t} \tag{3.4}$$

et

$$\|\nabla^{\otimes n}\mu^t\|_{L^q} \leq \mathbf{W}_{n,q}(\|\mu^0\|_{L^\infty}, \|\mu^0\|_{\dot{H}^{\lambda_2}}, \sigma^{-1}, \|\mu^0 - 1\|_{L^{2/(d-s)}}, \mathcal{F}_\sigma(\mu^0))(\sigma t)^{-n/2} \times \big(1 + (\sigma t)^{-\varepsilon}\mathbf{1}_{q=\infty}\big)e^{-C\sigma t}, \tag{3.5}$$

où $\lambda_2 \coloneqq 1 + s - d$.

Remarque 3.5. Le même résultat est vrai pour des dynamiques conservatives. Dans ce cas, les fonction $\mathbf{W}_{\alpha,q}$ et $\mathbf{W}_{n,q}$ ne dépendent pas de l'énergie libre $\mathcal{F}_\sigma(\mu^0)$, puisque l'entropie seule permet d'obtenir des estimées de relaxation.

La preuve de ces estimées est technique, donc nous choisissons de ne pas la détailler. Nous renvoyons à l'article [8].

Comme nous l'avions noté plus haut, il est possible de combiner ces estimées avec le corollaire (2.6) afin de conclure quant à la propagation du chaos, uniforme en temps et quantitative.

RÉFÉRENCES

1. Walter Braun and Klaus Hepp, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles*, Comm. Math. Phys. **56** (1977), no. 2, 101–113.
2. Didier Bresch, Pierre-Emmanuel Jabin, and Juan Soler, *A new approach to the mean-field limit of Vlasov-Fokker-Planck equations*, 2023, `arXiv:2203.15747`.
3. Didier Bresch, Pierre-Emmanuel Jabin, and Zhenfu Wang, *On mean-field limits and quantitative estimates with a large class of singular kernels : application to the Patlak-Keller-Segel model*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **357** (2019), no. 9, 708–720.
4. ———, *Modulated free energy and mean field limit*, Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2019–2020, Éditions de l'École polytechnique, 2019–2020, Exp. No. II, 22 p.
5. ———, *Mean-field limit and quantitative estimates with singular attractive kernels*, 2020, `arXiv:2011.08022`.
6. Louis-Pierre Chaintron and Antoine Diez, *Propagation of chaos: a review of models, methods and applications. I. Models and methods*, 2022, `arXiv:2203.00446`.
7. ———, *Propagation of chaos: a review of models, methods and applications. II. Applications*, 2022, `arXiv:2106.14812`.

8. Antonin Chodron de Courcel, Matthew Rosenzweig, and Sylvia Serfaty, *Sharp uniform-in-time mean-field convergence for singular periodic Riesz flows*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire (2023).
9. Jean-Marc Delort, *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*, Journal of the American Mathematical Society **4** (1991), no. 3, 553–586.
10. Roland L. Dobrušin, *Vlasov equations*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **13** (1979), no. 2, 48–58, 96.
11. Mitia Duerinckx, *Mean-field limits for some Riesz interaction gradient flows*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **48** (2016), no. 3, 2269–2300.
12. François Golse, *Mean-field limits in statistical dynamics*, 2022, arXiv:2201.02005.
13. Pierre-Emmanuel Jabin and Zhenfu Wang, *Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces*, J. Funct. Anal. **271** (2016), no. 12, 3588–3627.
14. ———, *Quantitative estimates of propagation of chaos for stochastic systems with $W^{-1,\infty}$ kernels*, Invent. Math. **214** (2018), no. 1, 523–591.
15. Matthew Rosenzweig and Sylvia Serfaty, *Sharp estimates for the variations of Coulomb and Riesz modulated energies, applications to supercritical mean-field limits*, In preparation.
16. ———, *Modulated logarithmic sobolev inequalities and generation of chaos*, 2023, arXiv:2307.07587.
17. Matthew Rosenzweig and Sylvia Serfaty, *Relative entropy and modulated free energy without confinement via self-similar transformation*, 2024, arXiv:2402.13977.
18. Sylvia Serfaty, *Mean field limit for Coulomb-type flows*, Duke Math. J. **169** (2020), no. 15, 2887–2935, Appendix with Mitia Duerinckx.

Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 Routes de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

Email address: decourcel@ihes.fr