



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012

Gilles A. Francfort

Un résumé de la théorie variationnelle de la rupture

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n° XXII, 11 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A22_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, 2011-2012.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

UN RÉSUMÉ DE LA THÉORIE VARIATIONNELLE DE LA RUPTURE

GILLES A. FRANCFORT

Ces notes reprennent une grande partie du contenu d'un exposé du même titre donné à l'IHES dans le cadre du Séminaire Laurent Schwartz le 15 novembre 2011.

1. LES ORIGINES DU MODÈLE

La Figure 1 ci-dessous est une photographie d'une expérience de refroidissement diffusif abondamment commentée par e.g. H.-A. Bahr, H.-J. Weiss, H.G. Maschke, & F. Meissner [4]. Une plaque de verre non fissurée de 6mm d'épaisseur est chauffée à 185°C puis posée sur un bain de glace.

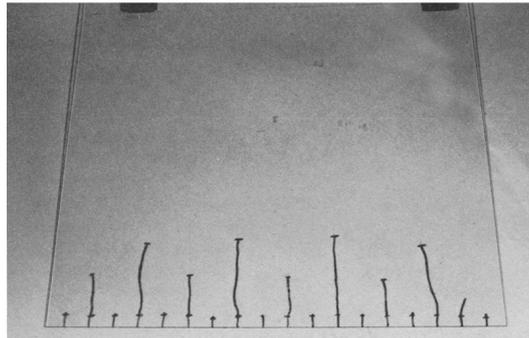


FIGURE 1. Le parking

Le front de température se diffusant, les contraintes en mode-I à la pointe de fissure diminuent jusqu'à arrêt de certaines fissures. C'est le phénomène du "parking". A ma connaissance, il n'y a à ce jour ni d'explication théorique pour, ni de simulation numérique de ce phénomène, sauf à importer dans la théorie générale des ingrédients spécifiques à l'expérience considérée. Nous reviendrons sur cet exemple à la fin de ce texte.

1.1. La Fissuration fragile à la Griffith (1920) en dimension 2. Considérons un domaine Ω (ouvert borné de \mathbb{R}^2) qui peut se fissurer seulement le long d'un trajet préalablement connu $\hat{\Gamma}$. Ce domaine est soumis à des sollicitations qui varient avec le temps t . Celles-ci peuvent être des forces surfaciques ou volumiques dont le travail sera schématiquement dénoté par $\mathcal{F}(t, \cdot)$, aussi bien que des déplacements $g(t)$ sur la partie $\partial\Omega_{Dir}$ de la frontière. On suppose le domaine non fissuré fait d'un matériau élastique de loi de Hooke A .

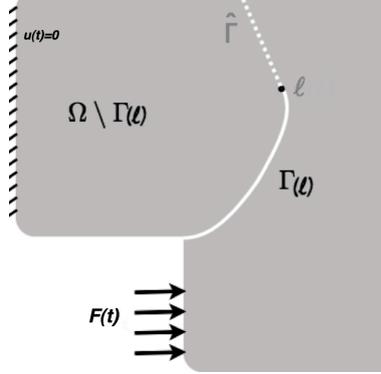


FIGURE 2. Le domaine fissuré

Pour une fissure (connexe) de longueur l , on définit

$$E(t; u; l) = \int_{\Omega \setminus \Gamma(l)} \frac{1}{2} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx - \mathcal{F}(t, u),$$

où $\varepsilon(u) := 1/2(\nabla u + \nabla u)^T$ est le tenseur linéarisé des déformations.

L'évolution est supposée quasistatique. En d'autres termes, l'énergie cinétique est négligée et le domaine est donc en équilibre élastique à chaque instant t .¹ L'énergie $E(t; u; l)$ doit alors être minimisée parmi tous les champs de déplacement u cinématiquement admissibles avec les données à t , le résultat de cette minimisation étant un champ $u(t, l)$. On calcule alors l'énergie potentielle à t , soit

$$\mathcal{P}(t, l) := E(t, u(t, l), l) = \min_{u \text{ k.a.}} E$$

qu'on suppose "régulière" en l .

Le postulat de Griffith [18] se réduit alors essentiellement à deux ingrédients. D'un côté, un principe de stabilité qui caractérise l'état actuel de la fissure comme celui pour tout écart duquel l'énergie potentielle gagnée serait moindre que l'énergie de surface perdue. De l'autre, une énergie de surface $G_c l$ proportionnelle à la longueur de fissuration, traduction macroscopique de l'énergie nécessaire à briser les liaisons dans un réseau cristallin. En introduisant le taux de restitution d'énergie

$$G(t, l) := -\partial \mathcal{P} / \partial l(t, l),$$

on obtient alors qu'à chaque instant la fissure effective $\Gamma(t) \subset \Gamma$, de longueur $l(t)$ satisfait aux conditions suivantes:

$$(1) \quad \begin{cases} G(t, l(t)) \leq G_c \\ \frac{dl}{dt}(t) \geq 0 \\ (G(t, l(t)) - G_c) \frac{dl}{dt}(t) = 0. \end{cases}$$

La dernière condition qui dit que la fissure ne peut grandir que si la stabilité est marginale vient bien après Griffith et est vraisemblablement une contribution due à J. Rice.

¹Les modèles de rupture dynamiques n'ont pas encore, à ce jour, acquis une maturité mécanique qui rendrait possible une analyse mathématique du modèle

Malgré ses succès et sa prévalence en mécanique, cette formulation est entachée de problèmes. D’abord, les équations (1) ne sont pas suffisantes pour déterminer un chemin de fissuration. Comment alors expliquer le branchement, c’est à dire le changement soudain de direction de propagation d’une fissure? Puis, on pourrait montrer, ce qui ne sera pas fait ici, que cette formulation interdit génériquement l’initiation dans un domaine dépourvu de (pré)fissure. Enfin, si le taux de restitution d’énergie devient critique dans une région de concavité du paysage énergétique de \mathcal{P} , alors augmenter la longueur de fissure ne rendra pas G sous-critique et on aura besoin d’un saut brutal de longueur finie de la fissure pour atteindre une région de convexité de ce paysage et ainsi regagner la sous-criticalité.

Ces obstacles bien connus ont motivé Jean-Jacques Marigo et moi-même à proposer en 1998 de procéder à un réexamen de Griffith dans un esprit variationnel [17].

1.2. Reformulation de Griffith. On considère l’énergie totale définie comme suit:

$$\mathcal{E}(t; u; l) := \int_{\Omega \setminus \Gamma(t)} \frac{1}{2} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c l - \mathcal{F}(t, u).$$

Alors on peut facilement montrer que, à condition de supposer la régularité de tous les champs-solutions, Griffith – qui produit le couple $l(t), u(t) = u(t, l(t))$ – est équivalent à

1. Un principe de stationnarité unilatérale qui est en gros une condition nécessaire du premier ordre pour la minimalité locale (métastabilité) de \mathcal{E} au point $(u(t), l(t))$ parmi les champs cinématiquement admissibles et les fissures de longueur $\geq l(t)$. Ceci rend compte de l’équilibre élastique et de la condition de stabilité $G(t) \leq G_c$;
2. $l(t) \nearrow$ with t , ce qui rend compte de l’irréversibilité de la fissuration;
3. Une balance d’énergie,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t; u(t), l(t)) = \int_{\partial\Omega} \sigma(t)n \cdot \frac{\partial g}{\partial t}(t) d\mathcal{H}^{N-1} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(t, u(t)),$$

où $\sigma(t) := A\varepsilon(u(t))$ est la contrainte et qui rend compte de la condition $G(t) = G_c$ si $dl/dt(t) \neq 0$.

Ce modèle est déjà de nature variationnelle, mais il est impossible à analyser mathématiquement, principalement à cause de la condition de stationnarité pour laquelle les outils sont inexistantes en l’absence de convexité. On est donc dans un premier temps amené à renforcer la première condition en remplaçant la stationnarité unilatérale par la minimalité globale. Ce faisant, nous obtenons un modèle qui est du type de ceux proposés dans un cadre plus général par A. Mielke depuis le début des années 2000 (voir e.g. [19]).

Comme l’on cherche un minimum global à \mathcal{E} , on n’a plus à se limiter à un chemin de fissuration prédéfini et l’on peut élargir les fissures test autant que bon nous semble. Si l’on se permet n’importe quelle fissure test, on obtient la formulation suivante qui vaut en toute dimension N .

Définissons, pour tout $\Gamma \subset \bar{\Omega}$ et tout u ,

$$\mathcal{E}(t, u, \Gamma) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} A\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) - \mathcal{F}(t, u).$$

Alors,

1. $(u(t), \Gamma(t))$ minimise \mathcal{E} pami tous les $\Gamma \supset \Gamma(t)$ et tous les champs $u = g(t)$ sur $\partial\Omega_{Dir} \setminus \Gamma$ (en effet la fissure peut aller jusqu'au bord du domaine);
2. $\Gamma(t) \nearrow$ with t ;
3. $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t; u(t), l(t)) = \int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \nabla \frac{\partial g}{\partial t}(t) dx - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(t, u(t))$, où $\sigma(t) := A\varepsilon(u(t))$.

Notons que, dans la troisième condition, on a remplacé une intégrale de surface par une intégrale de volume en supposant que $g(t)$ est en fait défini sur tout \mathbb{R}^N .

2. UN RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR UNE ÉNERGIE INTERNE DE LA FORME $W(\nabla u)$; LE CAS DE L'ÉLASTICITÉ FINIE

Dans cette section nous décrivons rapidement le résultat canonique d'existence pour l'évolution le long d'un chemin de minimiseurs globaux.

2.1. Discrétisation temporelle. Dans une première étape, on procède à une discrétisation temporelle du problème. On pose $I_n = \{0 = t_0^n, \dots, T = t_{k(n)}^n\}$, $t_{i+1}^n - t_i^n = \delta_n \searrow 0$ avec n . A chaque instant t_i^n , on va chercher u_i^n, Γ_i^n qui minimise

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma} W(\nabla u) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) - \mathcal{F}(t_i^n, u)$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma_{i-1}^n \subset \Gamma \subset \bar{\Omega} \\ u = g(t_i^n) \text{ sur } \partial\Omega_{Dir} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

En supposant ce problème résolu, on définit l'interpolation suivante:

$$u^n(t) := u_i^n, \Gamma^n(t) := \Gamma_i^n \text{ sur } [t_i^n, t_{i+1}^n),$$

et on se devra de passer à la limite $n \nearrow \infty$, espérant alors retrouver le modèle en temps continu.

Prenons le cas simplifié où le seul chargement est du à des déplacements sur une partie du bord. Un phénomène bien documenté dans la littérature doit alors être évité, celui de la passoire de Neumann. Plaçons-nous par exemple sur le rectangle $\Omega := (-1, 1) \times (0, 1)$ et considérons

$$-\Delta u_n = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Gamma_n, \quad u_n = 0 \text{ si } x = -1, \quad u_n = 1 \text{ si } x = 1,$$

avec $\Gamma_n := \{0\} \times [(0, 1) \setminus \cup_{p=1, \dots, n} (p/n - \exp(-n), p/n + \exp(-n))]$ représentant la fissure. les conditions sur les bords restants de $\Omega \setminus \Gamma_n$ sont les conditions de Neumann homogènes naturelles. Quand $n \nearrow \infty$, $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_n) \nearrow 1$. Pourtant,

$$u_n \not\rightarrow v := \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

En effet, ceci est un problème capacitaire et la limite de u_n est en fait u solution, pour un $\mu > 0$, de

$$-\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu[u] \text{ sur } \Gamma := \{0\} \times (0, 1),$$

avec $u = 0$ si $x = -1$, $u = 1$ si $x = 1$ et des conditions de Neumann homogènes sur les deux bords restants. Cette solution a une énergie de Dirichlet $\alpha > 0$.

Pour éviter ce type de pathologie, Dal Maso & Toader [15] ont supposé Γ_n connexe et ont obtenu en dimension 2 et dans le cas $W(F) = 1/2|F|^2$ un résultat d'existence qui se base sur des travaux de Chambolle & Doveri [11] et de Bucur

& Varchon [7] concernant la continuité des problèmes de Neumann par rapport au domaine.

En fait, le phénomène de la passoire ne peut arriver. Toujours dans notre cas d'école, considérons, pour $2\varepsilon < \alpha$, n_ε assez grand et tel que, pour $n \geq n_\varepsilon$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon =: \alpha - \varepsilon, \quad \mathcal{H}^1(\Gamma_n) \geq 1 - \varepsilon.$$

Alors le couple test (u_n, Γ_n) a une énergie

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \mathcal{H}^1(\Gamma_n) \geq 1 + \alpha - 2\varepsilon$$

Mais, pour ces n , le couple test (v, Γ) a pour énergie 1. Il est donc énergiquement préférable à (u_n, Γ_n) . En d'autres termes, les trous sont remplis au niveau n ! L'hypothèse de connexité de la fissure doit donc être inutile.

Ceci conduit à proposer une formulation faible à la De Giorgi du problème discret. On propose, pour une énergie W qui est p -coercitive ($p > 1$), de résoudre le problème suivant:

$$(2) \quad \min \left\{ \int_{\Omega} W(\nabla u) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1} \llbracket_{(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_{Dir})^c} (S(u) \setminus \cup_{j < i} S(u_j^n)) - \mathcal{F}(t_i^n, u); \right. \\ \left. u \in GSBV_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), u \equiv g_i^n \text{ hors } \bar{\Omega} \right\},$$

où

$$GSBV_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) := \{u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : \phi(u) \in SBV_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ \forall \phi \in C^1(\mathbb{R}^N) \text{ avec } \text{supp}(\nabla \phi) \text{ compact ; } \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^2})\}.$$

A condition de faire les bonnes hypothèses sur \mathcal{F} [13], l'existence d'une solution est garantie par un théorème de compacité et de s.c.i. faible du à Ambrosio (voir e.g. [1]).

Définissons alors

$$\begin{cases} u^n(t) := u_i^n \\ \Gamma^n(t) := \cup_{j \leq i} S(u_j^n) \end{cases} \quad \text{sur } [t_i^n, t_{i+1}^n).$$

Si g est régulier en t , alors on exhibe aisément une constante $C > 0$ telle que

$$(3) \quad \begin{cases} \|u_n(t)\|_{L^1} \leq C \\ \|\nabla u_n(t)\|_{L^p} \leq C \\ \mathcal{H}^{N-1}(\cup_{s \leq t} S(u^n(s))) \leq C, \end{cases}$$

et donc une sous-suite $\{u^{n_t}(t)\}_{n_t}$ est telle que

$$u^{n_t}(t) \xrightarrow{GSBV_p} u(t).$$

Il reste à examiner ce que satisfait $u(t)$.

2.2. Passage à la limite. Supposons, par souci de simplicité, que $\mathcal{F} \equiv 0$ (mais qu'on a encore les estimations (3)). Notons que $u^{n_t}(t)$ est en particulier un minimum pour son propre saut, i.e.,

$$(4) \quad \int_{\Omega} W(\nabla u^{n_t}(t)) dx - \mathcal{F} \leq \int_{\Omega} W(\nabla v) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(S(v) \setminus S(u^{n_t}(t))),$$

avec v fonction test admissible à t . Est-ce encore vrai pour $u(t)$?

Le membre de gauche de (4) est s.c.i. grace au résultat de s.c.i. faible d'Ambrosio. Il reste à passer à la limite (inf ou sup) dans le deuxième terme du membre de droite de (4). Or on ne peut génériquement avoir

$$\liminf \mathcal{H}^{N-1}(S(v) \setminus S(u^{n_t}(t))) \leq \mathcal{H}^{N-1}(S(v) \setminus S(u(t))).$$

La raison est illustrée par la Figure 3 ci-dessous. Il faut alors modifier le champ



FIGURE 3. Sauts tests

test v en un champ v_{n_t} de façon à transférer la partie du saut de v contenue dans celui de $u(t)$ en un saut contenu dans celui de $u_{n_t}(t)$. Mais alors, on doit également avoir

$$\begin{cases} \nabla v_{n_t} \xrightarrow{L^p \text{ fort}} \nabla v \\ \mathcal{H}^{N-1}(S(v) \setminus S(u(t))) \geq \limsup(\text{ou } \liminf) \mathcal{H}^{N-1}(S(v_{n_t}) \setminus S(u_{n_t}(t))) \end{cases}$$

pour pouvoir passer à la limite dans (4). C'est là l'objet du théorème de transfert de saut de Francfort & Larsen [16].

A partir de ce résultat, on établit facilement la minimalité globale de $u(t)$.

Il faut alors définir la fissure limite, i.e., la limite de $\Gamma^n(t)$. Pour cela, la notion de σ^p -convergence de Dal Maso, Francfort & Toader est utilisée. On dit que $\Gamma^n \xrightarrow{\sigma^p} \Gamma$ si, et seulement si

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma^n) \leq C \\ u_j \xrightarrow{SBV_p} u \text{ et } S(u_j) \subset \Gamma^{n_j} \text{ (} n_j \xrightarrow{j} \infty \text{)} \Rightarrow S(u) \subset \Gamma \\ \exists u_n, u \text{ tels que } u_n \xrightarrow{SBV_p} u, S(u_n) \subset \Gamma^n \text{ et } S(u) = \Gamma. \end{cases}$$

Un théorème de compacité de Γ^n satisfaisant une borne uniforme est démontré dans [13] et, avec le théorème d'Helly, il permet de conclure à l'existence d'une sous-suite $\{\Gamma^{n_k}(t)\}_{n_k}$ et de $\Gamma(t)$ croissant avec t tels que $\Gamma^{n_k}(t) \xrightarrow{\sigma^p} \Gamma(t), \forall t$.

Il reste encore à établir la balance d'énergie, ce dont nous ne parlerons pas ici. En conclusion, on obtient l'existence d'une évolution faible [13].

Theorem 2.1. *On suppose*

1. $W : \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, C^1$ sur son domaine, avec croissance p (ou sans, voir Dal Maso & Lazzaroni [14]), p -coercitive, (p -quasi)convexe;
2. Ω Lipschitz borné;
3. $g(t) \in AC((0, T); W^{1,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N))$;
4. Des hypothèses sur $\mathcal{F}(t, \cdot)$ non détaillées ici.

Alors $\exists \Gamma(t) \nearrow, \exists u(t) \in GSBV_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tels que

1. $u(t)$ minimise

$$\int_{\Omega} W(\nabla v) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(S(v) \setminus \Gamma(t)) - \mathcal{F}(t, v),$$

avec $u(t) \equiv g(t)$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$;

2. $S(u(t)) \subset \Gamma(t)$ et $\Gamma(t) = \bigcup_{\text{ens. dense de temps } \{s \leq t\}} S(u(s))$;

3. $\mathcal{E}(t) := \int_{\Omega} W(\nabla u(t)) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma(t)) - \mathcal{F}(t, u(t))$ satisfait

$$d\mathcal{E}/dt(t) = \int_{\Omega} DW(\nabla u(t)) \cdot \nabla \frac{\partial g}{\partial t}(t) dx - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(t, u(t)).$$

Notons que ce type d'évolution est très différent d'un flot gradient car on n'a pas de régularité u en temps.

Notons aussi qu'il n'y a pas de résultat similaire en élasticité linéarisée dans un cadre *SBD* car on n'a pas à ce jour de théorème de la de co-aire. Un résultat similaire à celui de Dal Maso & Toader [15] dans le cas 2d et pour des fissures connexes a été établi par Chambolle [9].

3. D'AUTRES MODÈLES

Très tôt, il a été reconnu que le type d'énergie de surface proposée par Griffith ne rendait pas compte de la présence de forces de cohésion qui s'opposent à la formation d'une fissure et sont la traduction des forces attractives présentes dans le réseau cristallin sous-jacent. C'est la raison de l'introduction d'énergies cohésives à la Barenblatt [5] du type de la Figure 4 ci-dessous.

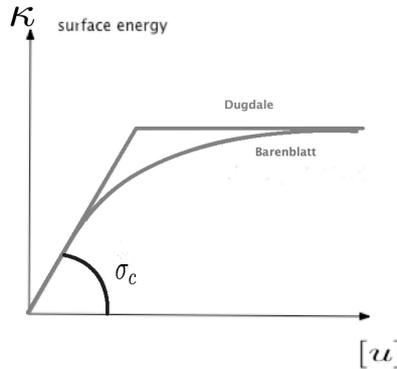


FIGURE 4. Energies de surface cohésives, fonctions de l'amplitude du saut

Dans notre approche variationnelle, il s'agit alors simplement de prendre, dans un cas isotrope pour lequel l'énergie de surface ne peut dépendre que du saut normal et du module du saut tangent,

$$\mathcal{E}(t, u, \Gamma) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} A \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \int_{\Gamma} \kappa(\psi(t, [u \cdot \nu]), |[u] - [u \cdot \nu] \nu|) dl - \mathcal{F}(t, u).$$

Ici, par exemple, $\psi(t, v) := \max(v, \sup_{s < t} [u(s) \cdot \nu])$ est la mémoire de l'irréversibilité qui correspond à ne payer d'énergie de surface supplémentaire que lorsque

la fissure voit un déplacement normal de ses lèvres qui excède celui des temps précédents. Notez que l'on pourrait envisager d'autres critères d'irréversibilité pour ces modèles.

Dans le cas cohésif, le critère de minimalité globale ne conduit pas à l'existence d'un minimum. En 1d par exemple, si la contrainte doit dépasser σ_c (voir Figure 4), alors il est préférable de limiter cette contrainte à σ_c en créant des petits sauts. En effet, si la déformation imposée sur un domaine de longueur 1 est f , alors, en l'absence de saut, on paie $1/2Ef^2 - E$, le module d'Young, étant ce qui reste de l'élasticité en dimension 1-, alors que si l'on a une déformation de af , $0 < a < 1$, puis n sauts d'amplitude af/n , on paie $1/2E(af)^2 + n\kappa((1-a)f/n)$ qui tend vers

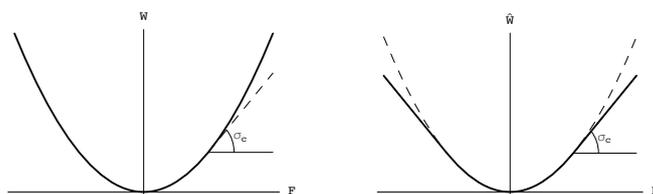


FIGURE 5. Energie d'origine $W(F)$ vs. énergie relaxée $\hat{W}(F)$

$1/2E(af)^2 + \sigma_c(1-a)f$ quand $n \nearrow \infty$. La solution avec saut est donc meilleure si $Ef \geq 2\sigma_c/(1+a) \rightarrow \sigma_c$ quand $a \rightarrow 1$. Ceci est un phénomène de relaxation qui correspond à une énergie interne devenant linéaire pour des pentes supérieures à σ_c (voir Figure 5).

Mais alors, d'un point de vue mécanique, on a introduit un modèle de rupture ductile (avec plasticité)! Mathématiquement, le problème relaxé admet un minimum dans BV et non plus dans $(G)SBV$. Il pourrait donc y avoir des parties Cantoriennes qui ne ressemblent pas à des fissures, quoique le cas 1d exhibe des minima qui sont bien dans SBV (voir Braides, Dal Maso & Garroni [8]). En tout état de cause, on n'a pas à ce jour de résultat d'évolution dans ce cadre relaxé.

4. LE BRANCHEMENT

La question du branchement a été soulevé au début de ces notes. Classiquement le branchement bi-dimensionnel dans un cadre Griffith classique en élasticité linéaire isotrope se modèle comme suit (voir Figure 6).

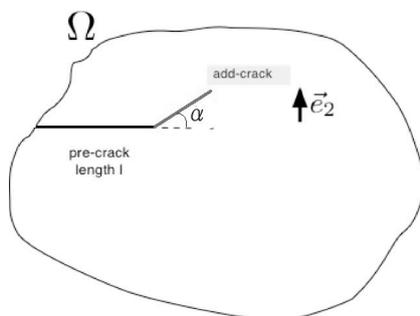


FIGURE 6. Le branchement

On suppose que la préfissure est droite (de longueur l) jusqu'au point de branchement puis de nouveau droite sur un segment de longueur l' faisant un angle α avec la préfissure. Alors la singularité en pointe de fissure peut s'écrire (en coordonnées polaires centrées au fond de fissure)

$$u = \sqrt{r} \sum_{i=1,2} \{K_i(t, l + l', \alpha) \varphi_i\} + \hat{u}$$

où \hat{u} est plus régulier (disons $W_{loc}^{2,2}$), où les φ_i sont des fonctions universelles de α et où les "facteurs d'intensité de contraintes" K_i dépendent de toutes les données du problème. Notons de plus que $K_2 = 0$ si $\sigma \nu \parallel \nu$, ν étant la normale à la fissure à l'avant de la pointe de fissure.

D'après Griffith, et en admettant l'évolution régulière en t , le taux de restitution d'énergie $G(t, l, \alpha)$ à la pointe de la préfissure dans la direction α de la nouvelle fissure vérifie $G(t, l, \alpha) = G_c$ au temps t pour lequel la fissure branche ($l(t) = l$). Le problème est de déterminer l'angle de branchement α . Deux écoles s'affrontent: celle qui veut maximiser $G(t, l, \alpha')$ parmi tous les α' versus celle qui préconise que

$$K_2^*(t, l, \alpha) := \lim_{\delta t \searrow 0} K_2(t, l(t + \delta t))$$

doit être 0 pour l'angle de branchement α . D'après un résultat d'Amestoy & Leblond [3] ces deux critères diffèrent.

Dans l'approche que nous proposons, il n'y a pas lieu d'importer de critère complémentaire. On se contente donc d'écrire dans ce cas particulier la balance d'énergie et la (méta-)stabilité, soit

1. Au temps t de branchement $G(t, l, \alpha) = G_c$;
2. Au temps t , la fissure est un minimum local parmi toutes les fissures ajoutées.

Ceci implique immédiatement que $G(t, l, \alpha') \leq G_c, \forall \alpha'$ et semble donc valider le principe de maximisation de G . Cependant, il est facile de montrer que, si $\alpha = 0$ correspond au maximum de G (donc si la fissure se propage dans la direction de la préfissure), alors $K_2(t, l, 0) = 0$.

Donc, si maintenant $\alpha \neq 0$, alors toute extension régulière après branchement implique que $K_2(t + \delta t, l(t + \delta t), \alpha) = 0$, donc, par continuité, que $K_2^*(t, l, \alpha) = 0$, d'où aussi le critère $K_2^* = 0$. Mais ces deux critères sont contradictoires d'après [3].

En fait, on peut montrer (voir [12]), dans le même esprit, qu'il ne peut y avoir de branchement continu en t sur une branche Γ telle que

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(0, r))}{2r} = 1/2.$$

En conclusion, méta-stabilité plus connectivité prohibent un mécanisme de branchement comme celui de la Figure 6 et donc le débat entre mécaniciens est "sans objet"! Il resterait à comprendre quel est le mécanisme de branchement: peut-il y avoir un saut de longueur, ou bien s'agirait-il d'un branchement en forme de fourche, l'une des branches étant alors arrêté par une condition de non-interpénétration (une notion que nous n'avons pas évoquée dans ces notes).

5. NUMÉRIQUE

Pour calculer une évolution dans le cas le plus simple, celui d'une énergie de type Griffith, une méthode qui a porté ses fruits est celle d'une régularisation de

l'évolution discrétisée à la Ambrosio & Tortorelli [2]. On considère la fonctionnelle suivante définie sur $H^1(\Omega; \mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$

$$(5) \quad (u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \left\{ (v^2 + \eta_{\varepsilon}) W(\nabla u) + G_c \left(\varepsilon |Dv|^2 + \frac{(1-v)^2}{4\varepsilon} \right) \right\} dx$$

avec $0 < \eta_{\varepsilon} \ll \varepsilon$. Quand $\varepsilon \searrow 0$, cette fonctionnelle $\Gamma(L^2)$ -converge vers

$$\int_{\Omega} W(\nabla u) dx + G_c \mathcal{H}^{N-1}(S(u)).$$

Une telle fonctionnelle est à la base de l'implémentation numérique des problèmes de rupture. En l'absence d'un terme de forces, à chaque temps discret, on minimise (5) sous la contrainte d'irréversibilité $v \geq v_{i-1}$ à $t = t_i$ et avec les conditions aux limites appropriées. Cette approximation est aussi valable dans le cas de l'élasticité linéarisée (cadre $SBD(\Omega)$) en dépit de l'absence de preuve de l'existence d'une évolution en temps continu dans ce cas [10].

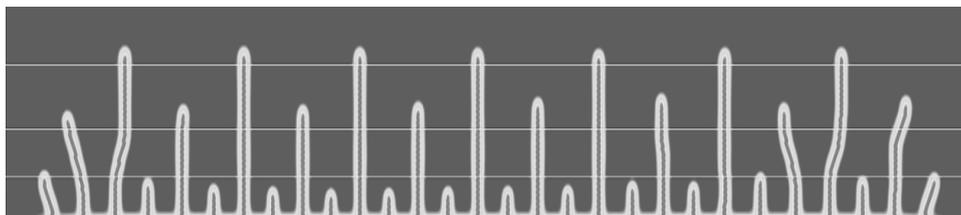


FIGURE 7. Le parking numérique

Au delà de ces généralités, une véritable implémentation numérique est très délicate et a fait l'objet de nombreux travaux de Bourdin (voir e.g. [6, Chapter 8]). En particulier, la fonctionnelle (5) est convexe séparément en u et en v mais n'est pas convexe en (u, v) , ce qui rend la recherche de minima assez difficile.

En conclusion, nous revenons sur le refroidissement diffusif évoqué au début de ces notes. La Figure 7 ci-dessus montre les résultats obtenus par Bourdin en utilisant l'approximation d'Ambrosio & Tortorelli combinée à l'irréversibilité, ce avec les mêmes données mécaniques et de température, mais sur un domaine plus large. La similarité est assez frappante et on peut vérifier que les amplitudes d'espacement des fissures ainsi que les tailles de fissure sont comparables à celles de la Figure 1.

De nombreuses autres illustrations numériques semblent justifier l'approche proposée et produisent des simulations qualitativement proches des évolutions observées, même si l'on ne sait pas précisément comment forcer le schéma numérique à rester sur des chemins minimisants. Il est probable que l'évolution numérique suit en fait des chemins méta-stables plus réalistes que ceux exhibés par l'analyse mathématique.

REFERENCES

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, Oxford (2000).
- [2] L. Ambrosio & V.M. Tortorelli, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence*, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 999-1036.
- [3] M. Amestoy & J.-B. Leblond, *Crack paths in plane situation – II, Detailed form of the expansion of the stress intensity factors*, *Int. J. Solids Struct.* **29** (1989), 465–501.

- [4] H.-A. Bahr, H.-J. Weiss, H.G. Maschke & F. Meissner, *Multiple crack propagation in a strip caused by thermal shock*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics **10** (1988), 219–226.
- [5] G.I. Barenblatt, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, dans: Adv. Appl. Mech., Vol. 7, Academic Press, New York (1962), 55–129.
- [6] B. Bourdin, G. A. Francfort & J.-J. Marigo, *The Variational Approach to Fracture*, Springer, New York (2008).
- [7] D. Bucur & N. Varchon, *Boundary variation for a Neumann problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **29** (2000), 807–821.
- [8] A. Braides, G. Dal Maso & A. Garroni, *Variational formulation of softening phenomena in fracture mechanics : the one dimensional case*, Arch. Rat. Mech. Anal. **146** (1999), 23–58.
- [9] A. Chambolle, *A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications*, Arch. Rational Mech. Anal. **167** (2003), 211–233.
- [10] A. Chambolle, *An approximation result for special functions with bounded variations*, J. Math Pures Appl. **83** (2004), 929–954.
- [11] A. Chambolle & F. Doveri, *Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 811–840.
- [12] A. Chambolle, G. A. Francfort & J.-J. Marigo, *Revisiting Energy Release Rates in Brittle Fracture*, J. Nonlinear Sci. **20** (2010), 395–424.
- [13] G. Dal Maso, G. A. Francfort & R. Toader, *Quasistatic crack growth in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **176** (2005), 165–225.
- [14] G. Dal Maso & G. Lazzaroni, *Quasistatic crack growth in finite elasticity with non-interpenetration*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), 257–290.
- [15] G. Dal Maso & R. Toader, *A Model for the Quasi-Static Growth of Brittle Fractures: Existence and Approximation Results*, Arch. Rational Mech. Anal. **162** (2002), 101–135.
- [16] G. A. Francfort & C. J. Larsen, *Existence and convergence for quasi-static evolution in brittle fracture*, Commun. Pur. Appl. Math. **56** (2003), 1465–1500.
- [17] G. A. Francfort & J.-J. Marigo, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. Mech. Phys. Solids **46** (1998), 1319–1342.
- [18] A.A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **CCXXI-A** (1921), 163–198.
- [19] A. Mielke, *Evolution of rate-independent systems*, dans: Evolutionary equations. Vol. II, Dafermos, A. and Feireisl, E., eds., Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam (2005), 41–559.

(Gilles Francfort) LAGA, UNIVERSITÉ PARIS-NORD & INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FRANCE
E-mail address: gilles.francfort@univ-paris13.fr