Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2022-2023

Exposé n° XIII (13 juin 2023)

Jérôme Buzzi

ENTROPIE ET CLASSIFICATION EN DYNAMIQUE

https://doi.org/10.5802/slsedp.163

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

Publication membre du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 2266-0607

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2022-2023
Exposé n° XIII, 1-23

Entropie et classification en dynamique

Jérôme Buzzi
C.N.R.S., Institut de Mathématique d'Orsay
jerome.buzzi@math.universite-paris-saclay.fr

Résumé

Cet exposé présente quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques topologiques ou différentiables munis de l'ensemble de leurs mesures invariantes - ce qu'on pourrait qualifier de façon un peu provocatrice de *théorie ergodique sans mesure distinguée*. Nous expliquons comment les entropies topologiques et de Kolmogorov-Sinaï structurent l'ensemble des mesures invariantes et distinguent des mesures maximisant l'entropie. En fait, pour les difféomorphismes de surfaces, le nombre et le type de ces mesures suffisent à décrire une large part de la dynamique.

Dans un travail récent avec Sylvain Crovisier et Omri Sarig (2022), nous avons démontré une conjecture de Newhouse (1990) et analysé ces mesures dans le cas des difféomorphismes lisses et bi-dimensionnels. Ces résultats ont pour corollaire une classification des difféomorphismes C^∞ de surfaces compactes et d'entropie non nulle. En conclusion, nous indiquons quelques perspectives et travaux en cours.

Table des matières

1 Introduction

Cet exposé se décompose en deux parties. La première est une introduction rapide et partiale à la théorie des systèmes dynamiques topologiques dépourvus de mesure invariante distinguée (dans ce texte « mesure » désigne toujours une mesure de probabilité borélienne). La seconde partie présente quelques avancées récentes dans le domaine de la dynamique différentiable des surfaces et en particulier la solution [9] apportée avec Sylvain Crovisier et Omri Sarig au problème suivant, posé par Sheldon Newhouse [25] au congrès international des mathématiciens de Kyoto (1990) :

> *Montrer que, sur les surfaces, les difféomorphismes de classe C^∞ admettent un nombre fini de mesures de probabilité ergodiques maximisant l'entropie.*

En guise de conclusion, nous évoquerons quelques conséquences et prolongement de ces travaux.

2 Un peu de dynamique

Un système dynamique est un espace d'une certaine catégorie sur lequel on considère l'itération d'un automorphisme. Dans ce texte, on s'intéressera surtout aux *dynamiques topologiques* définies par la donnée (X, f) d'un homéomorphisme $f : X \to X$ et d'un espace métrique compact X, ainsi qu'aux *dynamiques probabilistes* définies par la donnée $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ d'un espace de probabilité standard $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et d'une application $f : X \to X$ définie μ-presque partout, mesurable et inversible. Dans ces deux cas, on cherche à comprendre les *propriétés asymptotiques des orbites :* $(f^n(x))_{n\geq 0}$ pour $x \in X$.

Exemples de dynamiques topologiques. On considèrera des dynamiques différentiables données par un difféomorphisme d'une variété compacte, comme l'automorphisme T_A de $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) x$.

On considèrera aussi des dynamiques symboliques, i.e., données par le décalage à gauche $\sigma : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ sur une partie fermée invariante Σ d'un espace de suites $\Sigma_d := \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}}$. Un exemple classique est fourni par l'ensemble des suites sur $\{0, 1\}$ ne présentant pas deux symboles 1 consécutifs : $\Sigma_{\not{1}1} := \{x \in \Sigma_2 : \forall n \in \mathbb{Z}\ x_n x_{n+1} = 0\}$.

Plus généralement, pour toute matrice $d\times d$, l'ensemble de suites $\Sigma_A := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d : \forall n \in \mathbb{Z}\ A(x_n, x_{n+1}) = 1$ muni de la restriction σ_A du décalage est appelé *décalage de type fini.* La matrice A est associé au graphe orienté $a \to b \iff A(a, b) = 1$. Le décalage Σ_A est l'ensemble des chemins bi-infinis sur ce graphe.

Notions d'irréductibilité et d'apériodicité. On dit que (X, f) est :

- *topologiquement transitif* s'il existe une orbite positive dense : $X = \overline{\{f^n x : n \geq 0\}}$ pour un certain $x \in X$;
- *topologiquement mélangeant* si pour toute paire d'ouverts non-vides $U, V \subset X$ alors, pour tout n assez grand, $U \cap f^{-n}(V) \neq \varnothing$.

La transitivité topologique est une condition d'irréductibilité : elle implique qu'on ne peut pas écrire X comme une union $Y \cup Z$ avec $Y, Z \subsetneq X$

compacts et invariants ($f^{-1}(Y) = Y$, $f^{-1}(Z) = Z$). Le mélange topologique est une condition d'apériodicité et implique la transitivité topologique.

Comportements asymptotiques

On peut décrire la répartition de l'orbite issue d'un point $x \in X$ par sa *mesure empirique* :

$$\mu_x := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k x} \text{ lorsque cette limite existe,}$$

où δ_y est la masse de Dirac en y. Dans ce texte, une *mesure* sera toujours, une mesure de probabilité borélienne, c'est-à-dire définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ engendrée par les ouverts de X.

Autrement dit, μ_x est la limite faible [1] des mesures définies par les n premiers itérés de x. Il est facile de vérifier que toute mesure empirique appartient à l'ensemble $\mathbb{P}(f)$ des mesures invariantes par $f : \mu \circ f^{-1} = \mu$. Muni de la topologie faible, l'ensemble des mesures sur X est un espace compact métrisable. Le théorème de Krylov-Bogolioubov s'ensuit : $\mathbb{P}(f)$ est compact et non-vide.

Un tout petit peu de théorie ergodique

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ une dynamique probabiliste, c'est-à-dire un automorphisme f d'un espace de probabilité défini sur un espace de Borel standard.

Notions d'irréductibilité et d'apériodicité. La condition d'irréductibilité naturelle est l'*ergodicité* :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad B = f^{-1}(B) \implies \mu(B) = 0 \text{ ou } 1.$$

On a cette fois un théorème de décomposition : toute mesure $\mu \in \mathbb{P}(f)$ s'écrit d'une façon essentiellement unique comme $\mu = \int \nu \, dP(\nu)$ où P est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}_{\rm erg}(f)$, l'ensemble des points extrémaux de $\mathbb{P}(f)$.

Une condition d'apériodicité est le *mélange fort* :

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Il est facile de voir que le mélange fort implique l'ergodicité.

Exemples de dynamiques probabilistes. Un exemple classique est celui des *schémas de Bernoulli.* Si P est une probabilité quelconque sur $\{1, \ldots, d\}$, on prend le décalage complet σ_d sur Σ_d muni de la probabilité borélienne produit $P^{\otimes \mathbb{Z}}$. On obtient ainsi une famille, indexée par P, de dynamiques probabilistes ergodiques $(\Sigma_d, \mathcal{B}, P^{\otimes\mathbb{Z}}, \sigma_d)$. C'est la version dynamique des processus de Bernoulli (suite i.i.d. de variables aléatoires de loi P).

1. Il y a convergence faible (ou $*$ faible selon la terminologie des analystes) si les intégrales de toutes les fonctions continues convergent.

Si $d \geq 2$, on obtient ainsi une famille non-dénombrable de mesures invariantes et ergodiques pour la même dynamique topologique (Σ_d, σ_d). Cela suggère la richesse de la partition de l'équation (1) ci-dessus.

L'automorphisme $T : x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)x$ préserve la mesure d'aire m sur $\mathbb{T}^2$. La donnée (m, T) définit donc une dynamique probabiliste. En utilisant les séries de Fourier on montre facilement que (m, T) est même ergodique. Les orbites périodiques (correspondant aux points rationnels) fournissent d'autres exemples de dynamiques probabilites induites par T.

Théorème ergodique ponctuel. Le théorème de Birkhoff est un des résultats fondateurs de la théorie ergodique [2].

Théorème 1 (Birkhoff)**.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ une dynamique probabiliste et ergodique. Si $\psi \in L^1(\mu)$, alors μ-p.t. $x \in X$ et dans $L^1(\mu)$:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k x) \text{ existe et vaut } \mu(\psi).$$

Application à la dynamique topologique

Revenons au cas d'une dynamique topologique (X, f). On note $\mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f) \subset \mathbb{P}(f)$ l'ensemble des mesures invariantes et ergodiques. Notons que, dans le cadre topologique, cet ensemble $\mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ est essentiellement arbitraire (voir [12] pour une formulation précise). On verra qu'il est non-dénombrable pour les difféomorphismes qui nous intéressent.

Dans le cadre topologique, chaque $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ définit une dynamique probabiliste $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ ergodique. On en déduit :

Corollaire 2. *Si on définit le bassin ergodique de μ comme :*

$$\mathfrak{B}(\mu) := \{x \in X : \mu_x \text{ existe et vaut } \mu\}$$

alors ce borélien est de μ-mesure égale à 1 si et seulement si μ est ergodique.

En particulier, toute mesure ergodique $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ est la mesure empirique d'un point au moins (la réciproque est fausse).

Pour chaque $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$, le couple (μ, f) définit une dynamique probabiliste portée par l'ensemble borélien invariant $\mathfrak{B}(\mu)$. On a ainsi une partition borélienne et invariante, souvent non-dénombrable :

$$X := \bigsqcup_{\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)} \mathfrak{B}(\mu) \sqcup X_0 \tag{1}$$

où X_0 est un borélien de mesure nulle pour toute mesure $\mu \in \mathbb{P}(f)$.

Remarque 3. Ce dernier ensemble X_0 contient les points sans mesure empirique ou dont la mesure empirique n'est pas ergodique. L'ensemble X_0, négligeable pour les mesures invariantes, peut être gros selon d'autres points de vue. On peut vérifier que dans le cas du décalage complet avec $d \geq 2$ symboles, X_0 est gros aussi bien du point de vue topologique (il

2. Les théorèmes ergodiques ont été ainsi nommés parce qu'on espérait qu'ils justifient l'hypothèse ergodique de la mécanique statistique.

contient un G_δ dense) que du point de vue de sa dimension de Hausdorff $\ln d$, égale à celle de l'espace tout entier si on le munit de la distance $d(x,y) := \exp(-\{|n| : x_n \neq y_n\})$.

3 Entropies topologiques et probabilistes

L'entropie en dynamique admet de multiples déclinaisons. Présentons l'entropie topologique et l'entropie de Kolmogorov-Sinaï dans le cadre (anhistorique) d'une dynamique topologique (X,f). On en verra ultérieurement une troisième l'entropie de queue.

Entropie topologique

Adler, Konheim, McAndrew [1] (1968) ont introduit l'*entropie topologique* $h_{\mathrm{top}}(f,X)$ (ou $h_{\mathrm{top}}(f)$ ou $h_{\mathrm{top}}(X)$). Dans l'approche de Bowen et Dinaburg, on introduit les boules dynamiques :

$$B_f(x,\varepsilon,n) := \{y \in X : \forall 0 \leq k < n \quad d(f^k y, f^y) < \varepsilon\}$$

i.e., l'ensemble des points définissant le « même » segment d'orbite de longueur n à la précision $\varepsilon > 0$. Cela définit un nombre de recouvrement :

$$r_f(\varepsilon,n,Y) := \min\{|C| : Y \subset \bigcup_{x\in C} B_f(x,\varepsilon,n)\}$$

On peut alors calculer l'entropie topologique par une double limite :

$$h_{\mathrm{top}}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} h_{\mathrm{top}}(f,\varepsilon) \text{ et } h_{\mathrm{top}}(f,\varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_f(\varepsilon,n,X).$$

La théorie de l'entropie d'extension symbolique [3] permet de comprendre la présence systématique d'une telle sorte de double limite.

On déduit facilement de cette définition la majoration :

$$h_{\mathrm{top}}(f) \leq \dim_B(M) \cdot \log^+ \mathrm{Lip}(f)$$

où $\dim_B$ est la dimension de boîte et $\mathrm{Lip}(f)$ la meilleure constante de Lipschitz. On retrouve ainsi le théorème de Kushnirenko : l'entropie topologique de tout difféomorphisme d'une variéré compacte est finie.

On peut calculer l'entropie dans les exemples mentionnés précédemment : $h_{\mathrm{top}}(R_\alpha) = 0$,

$$h_{\mathrm{top}}(T_A) = \log \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ h_{\mathrm{top}}(\Sigma_d) = \log d,\ h_{\mathrm{top}}(\Sigma_{\not{1}1}) = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Entropie probabiliste

Etant donnée une dynamique probabiliste $(X,\mathcal{B},\mu,f)$, Kolmogorov et Sinaï (1958) [22, 30] ont défini son entropie $h(f,\mu)$ en s'appuyant sur la *théorie de l'information* de la façon suivante.

Si Q est une partition mesurable finie de X, son entropie moyenne par rapport à μ est $H_\mu(Q) := -\sum_{A\in Q}\mu(A)\log\mu(A)$. L'entropie dynamique par rapport à Q est l'entropie au sens de Shannon du processus $(Q(f^n x))_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire :

$$h(f,\mu,Q) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(Q^n) = \inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}H_\mu(Q^n)$$

où $Q^n := Q \vee f^{-1}(Q) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(Q)$. L'entropie de Kolmogorov-Sinaï est

$$h(f,\mu) := \sup_{Q \text{ partition mesurable finie}} h(f,\mu,Q)$$

Un théorème de Sinaï garantit que $h(f,\mu) = h(f,\mu,Q)$ si la partition mesurable finie Q est *génératrice*, i.e., s'il existe $X_1 \subset X$ de mesure totale vérifiant : pour tous $x,y \in X_1$, si $Q(f^n x) = Q(f^n y)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $x = y$.

Remarque 4. L'entropie dynamique ne dépend pas du choix d'une échelle ou d'une observable.

On peut calculer l'entropie dans les exemples mentionnés précédemment :

$$h(T_A,m) = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad h(\sigma,P^{\otimes\mathbb{Z}}) = -\sum_{i=1}^{d}P_i\log P_i.$$

Comme toute quantité fondamentale, elle peut se caractériser et se comprendre selon une grande variété de points de vue :
- comptage d'après le théorème de Shannon-McMillan-Breiman ;
- capacité à simuler des schémas de Bernoulli selon un théorème de Sinai ;
- nombre de symboles nécessaires à un codage fidèle selon le théorème de Jewett-Krieger [19].

Nous serons particulièrement intéressés par le résultat suivant, selon lequel l'entropie fournit un critère pour plonger une dynamique probabiliste ergodique dans un difféomorphisme de surface.

Théorème 5 (Katok)**.** *Soit f un difféomorphisme de classe C^2 d'une surface compacte*[3] *M.*

Toute dynamique probabiliste (ν,g) ergodique, sans atomes et d'entropie strictement plus petite que celle d'une mesure $\mu \in \mathbb{P}(f)$ fortement mélangeante, peut se plonger dans (X,f) : il existe $\tilde{\nu} \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ telle que (ν,g) et $(\tilde{\nu},f)$ sont conjugués au sens probabiliste.

Cet énoncé se déduit d'un théorème de dynamique différentiable de Katok [21] en utilisant le théorème de Jewett-Krieger.

Lien entre entropie topologique et probabiliste

Lorsque (X,f) est une dynamique topologique, Katok a établi des formules parallèles aux formules décrites plus haut dans le cadre topologique.

3. Dans ce texte, les variétés compactes sont sous-entendues sans bord, sauf mention contraire.

Pour tout $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$,

$$h(f,\mu) := \lim_{\varepsilon\to 0} h_{\mathrm{top}}(f,\varepsilon) \text{ et } h(f,\mu,\varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\mu(Y)>1/2} r_f(\varepsilon,n,Y).$$

Dans le cas général, on peut utiliser la décomposition ergodique : $\mu = \int_{\mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)} \nu \, dP(\nu)$ et poser :

$$h(f,\mu) := \int_{\mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)} h(f,\nu)\, dP(\nu). \tag{2}$$

Avec ces définitions, l'inégalité $\sup_{\mu\in\mathbb{P}(f)} h(f,\mu) \leq h_{\mathrm{top}}(f)$ est évidente. On peut réciproquement approximer l'entropie topologique par l'entropie de mesures invariantes et obtenir :

Théorème 6 (Principe variationnel)**.** *Pour toute dynamique topologique (X,f),*

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{\mu\in\mathbb{P}(f)} h(f,\mu) =^{4} \sup_{\mu\in\mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)} h(f,\mu).$$

Mesures maximisant l'entropie

Le principe variationnel précédent encourage à introduire l'ensemble des mesures ergodiques $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ maximisant l'entropie :

$$\mathrm{MME}(f) := \{\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f) : h(f,\mu) = h_{\mathrm{top}}(f)\}.$$

D'après un théorème de Newhouse, la régularité C^∞ implique l'existence d'une telle mesure maximisant l'entropie, tandis que la régularité C^r avec r fini n'est pas suffisante [24, 6].

La question de leur multiplicité ou de leur structure est encore plus délicat. Sa résolution requiert en règle générale une compréhension fine de la dynamique. Le cas des décalages de type fini est bien compris depuis les années 1960 :

Théorème 7 (Parry)**.** *Un décalage de type fini Σ n'admet qu'un nombre fini de mesures ergodiques maximisant l'entropie.*

De plus, si Σ est topologiquement transitif, il admet une unique mesure maximisant l'entropie. Si Σ est topologiquement mélangeant, l'unique mesure maximisant l'entropie est fortement mélangeante.

Le cas des difféomorphismes uniformément hyperboliques (comme T_A) peut se ramener au théorème précédent : ils ont un nombre fini de mesures maximisant l'entropie et une exactement qui est un Bernoulli s'ils sont topologiquement mélangeants comme T_A.

Preuve du théorème de Parry. Indiquons la preuve dans le cas particulier fondamental suivant :

Lemme 8. *Dans le cas du décalage complet sur d symboles, l'unique mesure maximisant l'entropie est le schéma de Bernoulli $P_0^{\otimes\mathbb{Z}}$ défini par la mesure uniforme P_0 sur $\{1,\dots,d\}$.*

4. Cette dernière égalité est une conséquence immédiate de l'équation (2).

Démonstration. Remarquons que la partition $Q_0 := \{\{x \in \Sigma_d : x_0 = i\} : i = 1, \ldots, d\}$ est génératrice pour toute mesure. On note que, pour tout $n \geq 1$,

$$h(f, \mu) = h(f, \mu, Q_0) \leq \frac{1}{n} H_\mu(Q_0^n) \leq H_\mu(Q_0) \leq \log d.$$

Toutes ces inégalités sont des égalités pour $\mu = P_0^{\otimes \mathbb{Z}}$. Réciproquement, si $\mu \in \mathbb{P}(\sigma)$ maximise l'entropie alors les trois inégalités doivent être des égalités. L'égalité $H_\mu(Q_0^n) = n \cdot H_\mu(Q_0)$ implique que Q_0 et $\sigma^{-1}(Q_0^n)$ sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et donc μ est Bernoulli. La deuxième égalité implique $\mu(A) = 1/d$ pour chaque $A \in Q_0$, i.e., $\mu = P_0^{\otimes \mathbb{Z}}$. □

Le cas général du théorème de Parry repose en particulier sur un théorème de combinatoire, dit de décomposition spectrale [5], qui permet de se ramener au cas topologiquement mélangeant. □

4 Classifications dynamiques

Peut-on espérer classifier par des invariants raisonnables de larges classes de systèmes dynamiques ? Rappelons qu'un isomorphisme (on dit plutôt une *conjugaison*) entre systèmes dynamiques d'une certaine catégorie est la donnée d'un isomorphisme entre espaces $\psi : X \to Y$ vérifiant $f \circ \psi = \psi \circ g$, i.e., préservant les orbites. L'isomorphisme peut appartenir à la même catégorie que les dynamiques, mais le plus souvent on se contente d'un isomorphisme appartenant à une catégorie plus « pauvre ». Voyons cela.

Conjugaison topologique

La conjugaison topologique, ou isomorphisme entre dynamiques topologiques, se définit par la donnée d'un homéomorphisme $\psi : X \to Y$ vérifiant $\psi \circ f = g \circ \psi$. Il est facile de vérifier que l'entropie topologique est bien un invariant de conjugaison topologique.

Les homéomorphismes du cercle [11] ont tous entropie nulle et donc l'entropie n'intervient pas dans leur classification. Poincaré (1885) a étudié les homéomorphismes du cercle préservant l'orientation et topologiquement transitifs grâce à un invariant naturel appelé nombre de rotation [6]. Même lorsque les difféomorphismes ont une régularité élevée, les conjugaisons ne sont pas nécessairement aussi régulières ou même lisses : il peut y avoir une perte de régularité [7].

5. La décomposition du graphe d'adjacence en composantes fortement connexes permet de se ramener au cas topologiquement transitif. Enfin le mélange topologique est équivalent à la primitivité de la matrice d'adjacence.

6. Denjoy (1932) a montré que l'hypothèse de transitivité topologique était satisfaite dès que le nombre de rotation est irrationnel et le difféomorphisme C^2.

7. Les travaux de Yoccoz ont établi la borne optimale sur cette perte de régularité en fonction des propriétés arithmétiques du nombre de rotation.

La classification topologique des endomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$ [11] est également bien comprise au travers d'invariants de repliement (*kneading invariants*) définis par les orbites des points critiques. Si on se place parmi les applications C^1 de l'intervalle topologiquement transitives avec un unique point critique, l'entropie topologique détermine cet invariant et classifie donc ces systèmes topologiques à conjugaison près.

Remarque 9. Il existe des décalages de type fini topologiquement mélangeants et de même entropie topologique (et même ayant le même nombre de points périodiques de chaque période) qui ne sont pas topologiquement conjugués [23, chap. 7]. Encore aujourd'hui, malgré de nombreux travaux ([18] et les références de cet article), on ne sait pas si la conjugaison topologique de deux décalages de type fini Σ_A et Σ_B est un problème décidable, bien que ce problème ait été formulé depuis les années 1970 en termes purement matriciels [33].

Remarque 10. Foreman et Gorodetski [14] ont annoncé le résultat d'impossibilité suivant. La conjugaison topologique parmi les difféomorphismes C^∞ d'une surface S donnée n'est pas une relation borélienne [8]. En particulier, il n'existe pas d'invariant complet borélien, autrement dit de fonction borélienne $I : \mathrm{Diff}^\infty(S) \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs dans un espace borélien standard comme $\mathbb{R}^\mathbb{N}$) telle que f, g sont topologiquement conjugués si et seulement si $I(f) = I(g)$.

Conjugaison probabiliste et théorème d'Ornstein

La conjugaison de deux systèmes probabilistes

$$(X, \mathcal{B}, \mu, f) \quad \text{et} \quad (Y, \mathcal{C}, \nu, g)$$

signifie l'existence d'une application $\psi : X \to Y$ définie presque partout, mesurable et d'inverse mesurable avec $\psi \circ f = g \circ \psi$. Cette notion a été introduite par von Neumann.

Dès le début de la théorie, les dynamiques à spectre purement ponctuel (des dynamiques quasi-périodiques, généralisant les rotations sur les groupes compacts) ont été classifiés par le spectre de leur action sur les fonctions de carré intégrable (von Neumann 1932). Le cas des dynamiques chaotiques est, lui, longtemps resté complètement ouvert, y compris pour la classe des schémas de Bernoulli, fondamentale du point de vue probabiliste.

Savoir si oui ou non les schémas de Bernoulli définis par les probabilités $(1/2, 1/2)$ et $(1/3, 1/3, 1/3)$ étaient conjugués comme dynamiques probabilistes est resté un problème ouvert pendant plus de vingt ans. C'est pour le résoudre que Kolmogorov et Sinai introduisirent la notion d'entropie exposée ci-dessus. Leur définition entraîne immédiatement qu'il s'agit d'un invariant de conjugaison probabiliste. Ainsi les deux schémas de Bernoulli précédents, étant d'entropies $\log 2$ et $\log 3$, ne peuvent être conjugués.

Ornstein a montré que l'entropie était un invariant complet dans cette classe :

8. Plus précisément et pour toute variété M de dimension ≥ 2, le graphe $\{(f, g) \in \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty(M) : f, g \text{ topologiquement conjugués}\}$ n'est pas un ensemble borélien.

Théorème 11 (Ornstein (1971))**.** *Deux schémas de Bernoulli sont conjugués de façon probabiliste si et seulement s'ils ont même entropie.*

Au-delà de ce résultat spectaculaire, la théorie développée par Ornstein a permis de montrer l'abondance des dynamiques probabilistes conjugués à un schéma de Bernoulli parmi les mesures naturelles de beaucoup de systèmes « chaotiques ». Ces résultats ont également ouvert la voie à des classifications par l'entropie au-delà du cadre probabiliste, comme ceux dont nous allons parler.

Classifications boréliennes

La conjugaison borélienne est un intermédiaire naturel entre les conjugaisons probabilistes et topologiques. Elle est définie par la donnée d'une bijection borélienne $\psi : X \to Y$ telle que $\psi \circ f = g \circ \psi$. C'est une notion strictement plus faible que la conjugaison topologique. Elle ouvre la voie à une classification plus facile et plus simple des cas difficiles.

Elle implique une certaine correspondance entre les mesures invariantes et ergodiques :

Lemme 12. *Si (X, f) et (Y, g) admettent une conjugaison borélienne $\psi : X \to Y$, alors on note les invariants :*

1. $\psi_* : \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f) \to \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(g)$ *est une bijection avec* $\forall \mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ *les dynamiques probabilistes* (μ, f) *et* $(\psi_*(\mu), g)$ *sont conjuguées ;*
2. $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(g)$.
3. $\psi_* : \mathrm{MME}(f) \to \mathrm{MME}(g)$ *est une bijection avec conjugaison de* (m, f) *et* $(\psi_*(m), g)$ *pour tout* $m \in \mathrm{MME}(f)$.

Remarque 13. L'entropie topologique (que nous avons définie en utilisant une distance) est en fait invariante par conjugaison *borélienne* entre dynamiques topologiques.

Remarque 14. Une conjugaison borélienne $\psi : M \to M$ entre deux dynamiques topologiques définies par des difféomorphismes $f, g : M \to M$ préservant une forme volume vol sur une variété compacte M n'induit pas nécessairement une conjugaison entre les dynamiques probabilistes $(\mathrm{vol}, \mathrm{f})$ et (vol, g) : on n'a pas nécessairement $\psi_*\mathrm{vol} = \mathrm{vol}$.

Remarque 15. La réciproque du lemme est fausse en général : la conjugaison 2 à 2 des mesures invariantes n'implique pas une conjugaison borélienne [31, 32, 13].

Démonstration. Le point 1 est évident. En particulier, vu l'invariance de l'entropie $h(f, \mu) = h(g, \psi_*(\mu))$. Le point 2 découle du principe variationnel. Le point 3 est une conséquence des précédents. □

Une différence essentielle entre conjugaisons topologiques et boréliennes, c'est que pour ces dernières, on peut séparer l'étude des points périodiques :

Lemme 16. *Deux dynamiques (X, f) et (Y, g) sont Borel-conjuguées si et seulement si :*

i) il existe une conjugaison borélienne entre leurs restrictions apériodiques :

$$(X_{\text{aper}} := \{x \in X : \mathcal{O}(x) \text{ infini}\}, f) \text{ et } (Y_{\text{aper}}, g);$$

ii) les ensembles de points périodiques de chaque période $n \geq 1$ ont même cardinal :

$$\kappa(f, n) := \text{Card}\{x \in X : f^n(x) = x\} = \kappa(g, n).$$

Hochman [17] a montré le

Théorème 17 (Hochman)**.** *Deux décalages de type fini topologiquement mélangeants ont leurs parties apériodiques Borel-conjuguées si et seulement s'ils ont même entropie topologique.*

Ce théorème contient (et sa preuve utilise) le résultat d'Ornstein ainsi qu'une version borélienne du théorème de Jewett-Krieger. Il implique que deux décalages de type fini topologiquement mélangeants sont Borel-conjugués si et seulement s'ils ont même entropie topologique et mêmes nombres de points périodiques de chaque période, en opposition avec le cas de la conjugaison topologique (cf. remarque 9).

Hochman souligne le :

Problème 1 (Hochman)**.** Deux décalages de type fini topologiquement mélangeants d'égale entropie ont-ils nécessairement des parties apériodiques *topologiquement* conjuguées ?

Il est naturel de poser le :

Problème 2. Classifier les difféomorphismes de surfaces compactes à conjugaison borélienne près.

Toutefois les résultats négatifs de Foreman et Gorodetski cités plus haut suggèrent que ce problème est trop difficile :

Conjecture. La relation de conjugaison borélienne parmi les difféomorphismes C^∞ d'une surface donnée quelconque n'admet pas un graphe borélien (a fortiori d'invariant numérique complet dépendant de façon Borel dans la topologie C^∞).

MME comme invariants principaux

Pour certains difféomorphismes, on peut réduire le problème de la classification borélienne à celui de la classification des mesures maximisant l'entropie et du comptage des orbites périodiques (on peut oublier toutes les mesures de "complexité intermédiaire" ainsi que la dynamique non-probabiliste – remarque 15).

Pour formuler un tel jeu de conditions, on introduit une entropie restreinte aux mesures mélangeantes et hyperboliques :

$$h_{\text{mel}}(f) := \sup\{h(f, \mu) : \mu \in \mathbb{P}(f) \text{ fortement mélangeante et hyperbolique}\}$$

La condition d'hyperbolicité sera définie plus bas, mais notons qu'elle peut être omise en dimension 2 sans affecter le théorème suivant.

Théorème 18. *Fixons M, N deux variétés compactes et deux difféomorphismes $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$, $g \in \mathrm{Diff}^2(M)$. Supposons que le principe variationnel admette le renforcement suivant :*

$$h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{mel}}(f) > 0 \text{ et } h_{\mathrm{top}}(g) = h_{\mathrm{mel}}(g) > 0.$$

Alors les parties apériodiques de f et de g sont Borel-conjugués si et seulement si

(A0) $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(g)$ *;*

(A1) il existe une bijection $\Psi : \mathrm{MME}(f) \to \mathrm{MME}(g)$ telle que, pour tout $\mu \in \mathrm{MME}(f)$, (μ, f) et $(\Psi(\mu), g)$ sont conjugués au sens probabiliste.

Notons que la condition (A0) est nécessaire si f et g n'ont pas de mesures maximisant l'entropie : la condition (A1) est alors vide.

D'après le lemme 16, la conjugaison borélienne de f et g est équivalente à (A0), (A1) et (A2) définie comme l'égalité des cardinaux des points périodiques de chaque période.

Remarque 19. Sans hypothèse de mélange on doit faire intervenir les « périodes » des mesures et notamment considérer l'entropie et les mesures maximisant l'entropie *à période fixée.*

Démonstration. La preuve de ce théorème [7] utilise le théorème du fer à cheval de Katok (voir le théorème 5) et les théorèmes de générateurs de Krieger et Hochman (en particulier [16, 17]). □

On peut lire ce théorème comme un résultat de *rigidité* de l'ensemble des mesures ergodiques et invariantes des difféomorphismes considérés (à l'opposé de la situation générale des homéomorphismes) : les mesures d'entropie maximale suffisent à déterminer toutes les autres mesures invariantes apériodiques. Le problème de la classification de tels difféomorphismes se réduit donc à l'étude de leurs MMEs. Il nous faut donc résoudre le problème de Newhouse.

5 Solution du problème de Newhouse

Enoncé du résultat principal

Dans le travail [9], nous avons résolu avec Sylvain Crovisier et Omri Sarig le problème de Newhouse. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 20 (Buzzi-Crovisier-Sarig)**.** *Soit $f \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ avec M une surface compacte. Supposons $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$. Alors :*

1. *Il y a un nombre fini de mesures $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ maximisant l'entropie ;*
2. *Si f est topologiquement transitive, il existe une unique mesure maximisant l'entropie μ et la dynamique probabiliste (f, μ) est conjuguée au produit d'un schéma de Bernoulli et d'une permutation circulaire ;*
3. *Si f est topologiquement mélangeante, alors l'unique $\mu \in \mathrm{MME}(f)$ est fortement mélangeante et donc (μ, f) est conjugué en mesure à un schéma de Bernoulli.*

Cet énoncé est « optimal » au sens où on ne peut en enlever aucune des hypothèses. Si l'entropie topologique est nulle, la finitude peut tomber en défaut (considérer l'identité) ; en dimension ≥ 3 (considérer des produits $f \times \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^1}$) ou encore dans n'importe quelle classe de différentiabilité finie (pour garder la finitude il suffit de renforcer la condition sur l'entropie en $h_{\mathrm{top}}(f) > \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Lip}(f^n)$.

Le cas des difféomorphismes axiome A [29] montre que l'unicité (resp. le mélange) peut tomber en défaut en l'absence de transitivité topologique (resp. mélange topologique), y compris dans le cas d'une surface connexe.

La lectrice attentive aura remarqué que les conclusions de ce théorème sont les mêmes que celles du théorème 7 sur les décalages de type fini. Ce n'est pas un hasard : nous adaptons au cadre des difféomorphismes de surfaces d'entropie non nulle les concepts de la théorie classique des dynamiques uniformément hyperboliques rappelés plus bas. Cette théorie fournit une dynamique symbolique ou codage pour ces dynamiques uniformes, i.e., les représentent (dans un sens à préciser) par des décalages de type fini.

Pour l'heure, remarquons que notre réponse au problème de Newhouse combinée au théorème 18, donne un résultat de classification borélienne particulièrement simple :

Corollaire 21. *Soient $f, g \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ deux difféomorphismes de classe C^∞ d'une surface M compacte. Supposons f et g topologiquement mélangeantes et d'entropies topologiques non nulle.*

Les parties apériodiques de f et de g sont Borel-conjuguées si et seulement si $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(g)$.

Corollaire 22. *Dans le cadre précédent, les transformations f et g sont Borel-conjuguées si et seulement si $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(g)$ et les cardinaux de leurs points périodiques coïncident : $\forall n \geq 1$ $\kappa(f, n) = \kappa(g, n)$.*

6 Preuve

Dans le reste de cet exposé, nous essaierons de donner une idée des grandes lignes de notre preuve. Nous utilisons les outils suivants :

— la théorie de Yomdin et Newhouse majorant l'entropie à petite échelle en grande différentiabilité et établissant notamment la semicontinuité supérieure de l'entropie de Kolmogorov-Sinaï ;
— la dynamique hyperbolique des compacts invariants (Anosov-Smale-Bowen) et des mesures sans exposants nuls (Oseledets-Pesin) ;
— la dynamique symbolique, i.e., le "codage" de la dynamique d'un difféomorphisme par un décalage de type fini généralisé ;
— une relation homocline généralisée aux mesures hyperboliques ;
— un lemme de Sard adapté aux dimensions transverses des feuilletages dynamiques associés aux compacts invariants hyperboliques.

Jusqu'à nouvel ordre, f est un difféomorphisme de classe C^∞ sur une variété compacte M.

Expansivité et théorème d'existence de Newhouse

Newhouse pose son problème dans la foulée du résultat d'existence suivant qu'il déduit des travaux de Yomdin [34] sur la complexité locale des itérés d'un difféomorphisme.

Théorème 23 (Newhouse 1989)**.** *Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une variété compacte.*

La fonction entropie $h : \mathbb{P}(f) \to \mathbb{R}$ est semicontinue supérieurement par rapport à la topologie faible. Elle admet donc au moins une mesure maximisant l'entropie : $\mathrm{MME}(f) \neq \varnothing$*.*

La preuve de la semicontinuité repose sur une condition suffisante due à Misiurewicz : une propriété d'expansivité (i.e., de séparation des orbites). Elle est définie par l'annulation de l'*entropie de queue* (ou entropie topologique conditionnelle) :

$$h^*(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} h^*(f,\varepsilon) \text{ où}$$
$$h^*(f,\varepsilon) := \lim_{\delta\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\max_{x\in X} r_f(\delta,n,B_\varepsilon(x,n))\right].$$

L'expression entre crochets compte le nombre maximal de (δ, n)-boules nécessaires pour recouvrir une (ε, n)-boule. L'entropie de queue quantifie le défaut de convergence uniforme de l'entropie de Kolmogorov-Sinai quand $\varepsilon \to 0$.

La théorie de Yomdin [34] permet de montrer que $h^*(f) = 0$ pour toute application C^∞ d'une variété compacte [5] (voir [26] pour la preuve originelle de la semicontinuité).

Notons que l'inégalité $h^*(f) < h_{\mathrm{top}}(f)$ donne un premier argument pour la finitude de $\mathrm{MME}(f)$. En effet cette inégalité oblige les mesures maximisant l'entropie « à occuper l'espace ». En effet si $K \subset M$ vérifie $\sup_{n\geq 0}\mathrm{diam}(f^n(K)) < \varepsilon$ avec $h^*(f,\varepsilon) < h_{\mathrm{top}}(f)$, alors $\mu(K) = 0$ pour toute $\mu \in \mathrm{MME}(f)$.

Hyperbolicité uniforme et de Pesin

Classiquement, un point périodique $x = f^n(x)$, $n \geq 1$, est hyperbolique si son multiplicateur $Df^n : T_xM \to T_xM$ n'admet pas de valeur propre de module 1. Cette notion s'étend à des compacts invariants et des mesures invariantes de la façon suivante.

Exposants de Lyapunov et multiplicités. Un *exposant de Lyapunov* en un point $x \in M$ est, si elle existe, la limite :

$$\lambda(x,v) := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|Df^n.v\| \text{ avec } v \in T_xM \setminus 0.$$

Etant donnée une mesure ergodique $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$, le *théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets* [15] affirme qu'il existe $X_1 \subset X$ avec $\mu(X_1) = 1$ tel que $\lambda(x, v)$ est bien défini pour tout $(x, v) \in X_1 \times (T_xM \setminus 0)$. L'ensemble

$$\sigma(\mu) := \{\lambda(x,v) : x \in X_1 \text{ et } v \in T_xM \setminus 0\}$$

est le *spectre de Lyapunov* de la mesure μ. Plus précisément, on peut trouver une base $(v_x^1, \ldots, v_x^d)$ de T_xM telle que chaque double limite $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n.v\|$ existe. La multiplicité d'un exposant $\lambda \in \sigma(\mu)$ est l'entier $m_\mu(\lambda) := \#\{i : \lambda(x, v_x^i) = \lambda\}$.

Dans le cas particulier où $x = f^n(x)$, les exposants de Laypunov sont les $\lambda := n^{-1} \log |\Lambda|$ où Λ parcourt les valeurs propres de $Df^n : T_xM \to T_xM$ et la multiplicité de λ coïncide avec la somme des multiplicités des valeurs propres de $Df^n : T_xM \to T_xM$ de module $e^{n\lambda}$.

Entropie, exposants et dimensions. L'entropie, l'hyperbolicité et la géométrie fractale d'une mesure sont liées par le spectaculaire résultat suivant :

Théorème 24 (Ledrappier-Young)**.** *Soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ avec M une variété compacte.*

L'entropie de Kolmogorov de toute mesure $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ s'exprime en fonction des exposants et de dimensions fractales $0 \leq \gamma(\lambda) \leq m_\mu(\lambda)$:

$$h(f, \mu) = \sum_{\lambda\in\sigma(\mu)} \gamma_\mu(\lambda) \max(\lambda, 0) = \sum_{\lambda\in\sigma(\mu)} \gamma_\mu(\lambda) \max(-\lambda, 0).$$

Retenons-en les deux conséquences suivantes : 1) une mesure d'entropie non nulle est associée à des dimensions fractales non nulles ; 2) la majoration suivante de l'entropie par les exposants :

Théorème 25 (Ruelle)**.** *Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Pour tout $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$,*

$$h(f, \mu) \leq \sum_{\lambda\in\sigma(\mu)} m_\mu(\lambda) \max(\lambda, 0).$$

Théorie de Pesin. Une mesure $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$ est dite *hyperbolique au sens de Pesin* si $0 \notin \sigma(\mu)$, i.e., tout exposant est soit strictement positif, soit strictement négatif. Il est souvent délicat de vérifier cette propriété. Sur les surfaces, l'entropie implique l'hyperbolicité selon la remarque suivante de Katok, facile mais fondamentale :

Corollaire 26 (Katok)**.** *Soient $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ avec M une* surface *compacte et $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$.*

Si l'entropie $h(f, \mu)$ est non nulle, alors la mesure μ est hyperbolique au sens de Pesin.

Remarque 27. La réciproque de ce corollaire n'a pas lieu : l'hyperbolicité n'implique pas la stricte positivité de l'entropie, comme le montre le cas d'un point fixe hyperbolique. Le théorème 5 fournit des exemples non périodiques, mais montre également que l'existence d'une mesure hyperbolique non atomique implique l'existence d'une *autre* mesure d'entropie non nulle.

En dimension supérieure, l'entropie non nulle n'interdit plus l'annulation de certains exposants, comme on peut le vérifier facilement en considérant les produits $f \times R$ où R est une rotation et $f \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ avec $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$ et en utilisant que $h(f \times R, \mu) = h(f, \pi_*\mu)$ si π est la projection sur le premier facteur f.

Remarque 28. L'hyperbolicité au sens de Pesin, même pour toutes les mesures $\mu \in \mathrm{MME}(f)$, y compris avec minoration des valeurs absolues des exposants, n'est pas suffisante pour forcer la finitude de $\mathrm{MME}(f)$ comme le montrent certains exemples de difféomorphismes de surfaces de classe C^r avec $1 << r < \infty$.

Hyperbolicité uniforme. On appelle uniforme la situation où la non-nullité des exposants apparaît au bout d'un temps uniforme sur un certain compact invariant Λ : il existe $\kappa > 0$ et $N \geq 1$ tels que pour pout tout point $x \in \Lambda$ et pour tout $|n| \geq N$, $|\frac{1}{n} \log \|Df^n.v_i^i\|| > \kappa$ (où $(v_x^1, \ldots, v_x^d)$ est la base de T_xM introduite lors de la discussion du théorème d'Oseledets). Si Λ est un ensemble suffisamment gros pour la dynamique ($\Lambda = M$ ou bien encore l'ensemble limite), l'hyperbolicité uniforme sur Λ définit une catégorie de dynamique bien comprise, à la fois riche et rigide [27, 29].

En particulier, les dynamiques uniformément hyperboliques admettent une bonne dynamique symbolique, c'est-à-dire unr représentation « suffisamment fidèle » par des décalages de type fini. Les travaux des classiques (notamment Anosov, Smale et Bowen, voir [29]) aboutissent au résultat suivant (qui inclut une application du théorème 7 de Parry) :

Théorème 29. *Soit f un difféomorphisme C^1 d'une variété compacte.*

S'il est uniformément hyperbolique (vérifie l'axiome A), son ensemble non-errant admet la décomposition spectrale *:*

$$\Omega(f) = \bigcup_{i=1}^{N} K_i \text{ avec } L_i := \bigcup_{j=1}^{p(i)} L_{ij}$$

où les K_{ij} sont des compacts deux-à-deux disjoints avec $f(L_{ij}) = L_{i(j+1)}$ (par convention $L_{i(p(i)+1)} = L_{i1}$).

De plus, $f : K_i \to K_i$ est topologiquement mélangeant et $f^{p(i)} : L_{ij} \to L_{ij}$ est topologiquement mélangeante.

Enfin, chaque $f|K_i$ admet exactement une mesure maximisant l'entropie, conjuguée du point de vue probabiliste au produit d'un schéma de Bernoulli et de la permutation circulaire d'ordre $p(i)$.

C'est cette structure que le problème de Newhouse appelle à généraliser dans un cadre non-uniforme fournit par la stricte positivité de l'entropie topologique et la dimension 2.

Dynamique symbolique de Sarig

Les tentatives de construction d'une dynamique symbolique dans un cadre non-uniformément hyperbolique remontent au moins à Katok [21]. Son théorème du fer à cheval suggère une construction de ce type, mais avec une correspondance qui ne préservait pas les mesures maximisant l'entropie ou même les valeurs mêmes de l'entropie.

C'est Sarig qui a réussi à généraliser utilement du point de vue de l'entropie la dynamique symbolique au cadre non-uniforme. Il parvient à représenter la dynamique par un décalage de Markov, c'est-à-dire un décalage de type fini généralisé (il est défini par un graphie dénombrable et non pas fini comme dans le cas classique). Plus précisément, pour tout

$\chi > 0$, Sarig obtient une représentation qui préserve l'entropie et les mesures maximales. Plus précisément, toute mesure χ-hyperbolique au sens de Pesin, c'est-à-dire sans exposants dans le segment $[-\chi, \chi]$, admet un nombre fini de relèvements sur le décalage, chacun etant conjugué en mesure (à une fibre finie près) avec la mesure sur la surface.

C'est suffisant pour faire correspondre les mesures maximisant l'entropie du décalage et du difféomorphisme. En effet, en supposant que $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$ et en prenant $\chi := h_{\mathrm{top}}(f)/2 > 0$, l'inégalité de Ruelle (théorème 25) montre que toute mesure ergodique d'entropie $> h_{\mathrm{top}}(f)/2$ est bien χ-hyperbolique. Sarig en déduit :

Théorème 30 (Sarig 2013)**.** *Soit f un difféomorphisme de classe C^2 d'une surface compacte. Supposons $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$.*

L'ensemble $\mathrm{MME}(f)$ *est au plus dénombrable.*

Toute mesure $\mu \in$ $\mathrm{MME}(f)$ *est conjuguée au sens probabiliste avec le produit d'un schéma de Bernoulli et d'une permutation cyclique* [9].

Un résultat de Gurevič généralise le théorème de Parry et permet de réduire le calcul du nombre de mesures maximisant l'entropie d'un décalage de Markov à un problème combinatoire : il y en a au plus une par composante fortement connexe [10] du graphe définissant le décalage. Le caractère dénombrable de $\mathrm{MME}(f)$ dans le théorème de Sarig en est une conséquence immédiate.

Remarque 31. La construction de Sarig a été généralisée en toute dimension par Benovadia [2] : étant donné un difféomorphisme d'une variété compacte et un paramètre $\chi > 0$, il existe un décalage de Markov représentant fidèlement (dans le même sens que Sarig) toute mesure invariante et ergodique χ-hyperbolique au sens de Pesin. Soulignons que ceci n'empêche pas l'existence de mesures maximisant l'entropie sans être hyperboliques.

Et la finitude ?

Pour résoudre le problème de Newhouse il suffit de montrer que la régularité C^∞ implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles composantes (ou du moins des composantes d'entropie maximale ou grande). Les techniques de Sarig, basées sur la théorie de Pesin, sont assez indirectes et abstraites. Par ailleurs elles ne font intervenir que la régularité C^2 et l'exploitation d'une régularité supérieure semble difficile.

Un nouvel acteur : la relation homocline

Au lieu de contrôler directement les composantes dans le décalage construit par Sarig, on introduit une notion de *pièce irréductible* sur la surface, ou plus précisément parmi les mesures ergodiques et hyperboliques du difféomorphisme. On montrera ensuite que chacune de ces pièces admet une représentation par une composante irréductible du graphe de Sarig.

9. Le produit d'un schéma de Bernoulli et d'une permutation cyclique. est fortement mélangeant si et seulement si la permutation cyclique est triviale.
10. Une composante fortement connexe est un sous-graphe maximal dont tous les sommets peuvent être joints dans les deux sens.

Pour définir nos pièces, rappelons la notion de relation homocline introduite par Newhouse. Considérons une orbite périodique hyperbolique $\mathcal{O}$. On sait que :

$$W^s(\mathcal{O}) := \{x \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^n x, \mathcal{O}) = 0\} \text{ et}$$
$$W^u(\mathcal{O}) := \{x \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^{-n} x, \mathcal{O}) = 0\}$$

sont des immersions de sous-variétés lisses. On dit que deux orbites périodiques hyperboliques $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ sont *homocliniquement liées* si $W^u(\mathcal{O}_1)$ et $W^s(\mathcal{O}_2)$ d'une part, et $W^u(\mathcal{O}_2)$ et $W^s(\mathcal{O}_1)$ ont des points d'intersection transverses. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques.

La théorie de Pesin permet d'étendre cette relation d'équivalence à l'ensemble $\mathbb{P}_{\mathrm{hyp}}(f)$ des mesures ergodiques et hyperboliques [11]. On note

$$\mathrm{hc}(\mu) \subset \mathbb{P}_{\mathrm{hyp}}(f),$$

la classe d'équivalence de $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{hyp}}(f)$, qu'on appelle *classe homocline mesurée*. On définit son support par

$$\mathrm{HC}(\mu) := \overline{\bigcup_{\nu\in\mathrm{hc}(\mu)} \mathrm{supp}(\nu)} \subset M.$$

Un théorème de Katok (une version du théorème 5) implique que toute mesure hyperbolique μ est homocliniquement liée à une orbite périodique hyperbolique $\mathcal{O}$. On vérifie que $\mathrm{HC}(\mu)$ coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection transverse :

$$\mathrm{HC}(\mu) := \overline{W^u(\mathcal{O}) \pitchfork W^s(\mathcal{O})}.$$

On peut préciser cette structure. Si $q \in \mathcal{O}$, alors il existe $p \geq 1$ tel que :

$$\mathrm{HC}(\mu) := \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(\overline{W^u(q) \pitchfork W^s(q)}). \tag{3}$$

Ici $W^u(q), W^s(q)$ sont les variétés stables et instables du point q, par exemple $W^s(q) := \{x \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^{kp}x, q) = 0\}$. En particulier, ce sont des courbes (et non des unions de courbes). La figure 1 illustre cette topologie.

Comme on l'a vu, en dimension 2, toute mesure ergodique d'entropie non nulle est hyperbolique et donc appartient à une classe homocline mesurée.

Unicité locale via un codage irréductible

Nous montrons que toute classe homocline mesurée $\mathrm{hc}(\mu)$ peut être représentée par une composante *irréductible* au sein de la dynamique symbolique construite par Sarig. Rappelons qu'on fixe un paramètre $\chi > 0$

11. F. Rodriguez-Hertz, M.-A. Rodriguez-Hertz, Tahzibi et Urès [28] ont introduit généralisation équivalente à la nôtre.

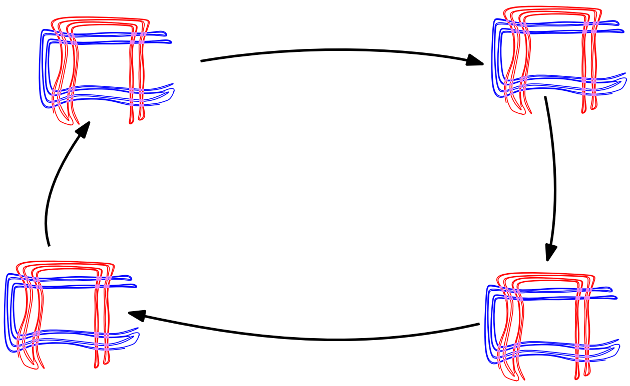

FIGURE 1 – La structure topologique d'une classe homocline.

assez petit. Alors toute mesure χ-hyperbolique appartenant à la classe est représentée dans cette composante. D'après l'inégalité de Ruelle, ceci s'applique à toute mesure ergodique d'entropie $> \chi$. En appliquant le résultat de Gurevič cité plus haut, on obtient le :

Théorème 32 (Unicité locale)**.** *Pour toute mesure ergodique et hyperbolique μ, sa classe homocline mesurée contient au plus une mesure maximisant « localement » l'entropie, i.e.,*

$$m \in \mathrm{hc}(\mu) \text{ avec } h_m(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \in \mathrm{hc}(\mu)\}.$$

De plus le support de la mesure m coïncide avec celui de la classe $\mathrm{HC}(\mu)$*.*

Finitude globale

On procède par contradiction en supposant qu'il existe $\mu_1, \mu_2, \dots \in \mathrm{MME}(f)$, deux-à-deux distinctes.

Par compacité de $\mathbb{P}(f)$, on peut supposer que cette suite converge faiblement vers une certaine mesure $\mu_\infty \in \mathbb{P}(f)$. L'entropie étant semi-continue supérieurement (f est supposé de classe C^∞), la mesure μ_∞ maximise aussi l'entropie. Pour simplifier cet exposé, on suppose également que μ_∞ est ergodique. D'après l'unicité locale, les mesures $\mu_1, \mu_2, \dots$ et μ_∞ appartiennent à des classes homoclines mesurées distinctes.

Chacune des mesures μ_n, $1 \leq n \leq \infty$, est donc portée par le support d'une classe homocline $\mathrm{HC}(\mathcal{O}_n)$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_\infty$ des orbites périodiques hyperboliques homocliniquement indépendantes.

On se sert de la topologie bidimensionnelle et de la structure du support des classes homoclines décrite par l'équation (3). Cela permet de déduire de la convergence faible $\mu_n \to \mu_\infty$ le fait suivant, pour $n \gg 1$: si les variétés stables et instables de $\mathcal{O}_n$ ne traversent pas celles de $\mathcal{O}_\infty$, alors l'essentiel de la masse de μ_n est piégé dans des « trous »[12] définis par $\mathrm{HC}(\mathcal{O}_\infty)$ de diamètres arbitrairement petits (voir Figure 2). Mais

12. Il s'agit de disques topologiques bornés par des segments de $f^k(W^s(\mathcal{O}_n))$ et de $f^k(W^u(\mathcal{O}_n))$ pour un certain $k \geq 0$.

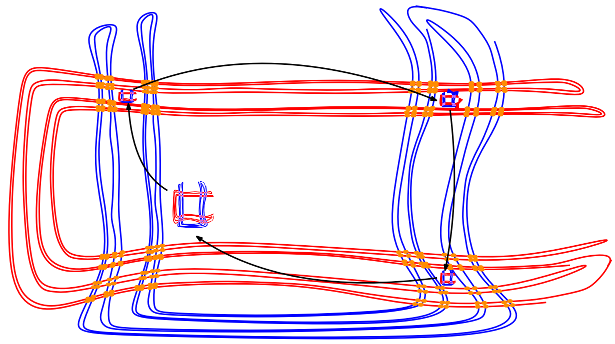

Figure 2 – Une classe homocline enfermée par une autre.

l'entropie de μ_n devrait alors être essentiellement bornée par l'entropie de queue $h^*(f, \varepsilon)$ dès que le diamètre de ces "trous" est inférieur à ε. Comme $h^*(f) = 0$ pour f de classe C^∞, on peut supposer $h^*(f, \varepsilon) < h_{\rm top}(f)$ et ceci contredit $\mu_n \in \mathrm{MME}(f)$.

Cette première contradiction montre que les variétés stables et instables de $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O}_\infty$ doivent se traverser. L'indépendance homocline de μ_n et μ_∞ implique que toutes ces intersections sont non-transverses. Montrons que c'est encore impossible.

Pour trouver des intersections transverses, on utilise le fait que les variétés stables et instables considérées appartiennent à des feuilletages dynamiques : les feuilletages stables et instables définis par des compacts uniformément hyperboliques construits à partir des mesures μ_n et μ_∞ en utilisant une variante du théorème de Katok.

Or les dimensions transverses de ces feuilletages sont non nulles à cause de la non-nullité de l'entropie des mesures μ_n, μ_∞ (comparer avec le théorème 24). Une version du théorème de Sard adaptée à la régularité de ces feuilletages dynamiques force l'existence d'intersections transverses, ce qui conclut notre preuve par l'absurde. La finitude est démontrée.

Théorème de décomposition spectrale

Nos arguments permettent de généraliser la décomposition spectrale établie par Smale dans le cas des difféomorphismes uniformément hyperboliques. Nous obtenons :

Théorème 33 (Buzzi-Crovisier-Sarig)**.** *Pour tout difféomorphisme f de classe C^∞ d'une surface compacte, il existe une collection $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'orbites périodiques hyperboliques vérifiant les propriétés suivantes :*

— *toute mesure $\mu \in \mathbb{P}_{\rm hyp}(f)$ est homocliniquement liée à exactement une orbite $\mathcal{O}_i$. En particulier $\mu(\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i)) = 1$;*

— *si $i \neq j$, $h_{\rm top}(f|\,\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i) \cap \mathrm{HC}(\mathcal{O}_j)) = 0$;*

— *chaque $f|\,\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i)$ est topologiquement transitif ;*

— *$p_i := \mathrm{pgcd}(\{|\mathcal{O}| : \mathcal{O}$ homocliniquement liée $\mathcal{O}_i\})$ est caractérisé par l'existence d'un compact L_i tel que $\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i) = L_i \cup f(L_i) \cup$*

$\cdots \cup f^{p_i-1}(L_i)$ avec $f^{p_i} : L_i \to L_i$ topologiquement mélangeant et $h_{\text{top}}(f|L_i \cap f^k(L_i)) = 0$ pour tout $0 < k < p_i$;
— *pour tout $i \in I$, il existe une unique mesure $m_i \in \mathbb{P}(\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i))$ maximisant l'entropie. De plus, cette mesure*
  — *est de support $\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i)$;*
  — *définit une dynamique probabiliste conjuguée au produit d'un Bernoulli et d'une permutation circulaire de période p_i ;*
— *pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre de $i \in I$ avec $h_{\text{top}}(f|\,\mathrm{HC}(\mathcal{O}_i)) > \varepsilon$ est fini ;*
— *si f est topologiquement transitif, alors il existe au plus un indice $i_0 \in I$, avec $\mathrm{HC}(\mathcal{O}_{i_0})$ infini ;*
— *si f est topologiquement mélangeant, alors la période p_{i_0} est égale à 1.*

La solution du théorème de Newhouse (théorème 20) s'en déduit facilement.

Remarque 34. Ceci est une version faible de la décomposition spectrale de Smale pour les difféomorphismes uniformément hyperboliques. En effet, notre version ne contrôle que les mesures d'entropie non nulle et peut comporter une infinité de pièces.

7 Conclusion et perspectives

La solution au problème de Newhouse a mobilisé une large partie de la théorie ergodique des systèmes différentiables, de la théorie de Pesin à celle de Yomdin en passant par la dynamique symbolique et la géométrie fractale des mesures et compacts hyperboliques. Au-delà de la réponse positive à la question posée en 1990, nous avons justifié l'intuition selon laquelle les difféomorphismes de surface en régularité C^∞ partagent les propriétés qualitatives des systèmes uniformément hyperboliques vis-à-vis des mesures d'entropie non nulle.

Cela soulève deux types de questions :
– ces difféomorphismes satisfont-ils également les propriétés quantitatives des systèmes uniformément hyperboliques (mélange exponentiel, théorème central limite, etc.) ? En effet, de telles propriétés sont connues pour nombre de dynamiques « non-uniformément hyperboliques », notamment sous la forme d'un « trou spectral » ;
– ce phénomène s'étend-il en dimension supérieure pour des classes importantes (par exemple des ouverts loin de l'hyperbolicité uniforme et sous des conditions naturelles) ?

Un travail en cours, en collaboration avec Sylvain Crovisier et Omri Sarig, apporte une réponse affirmative à la première question en s'appuyant sur une propriété de stabilité des exposants de Lyapunov pour les mesures d'entropie proche de l'entropie topologique. Ce même travail fournit une version multidimensionnelle de cette propriété de stabilité des exposants, mais c'est là une autre histoire.

Références

[1] R. Adler, A. Konheim, M. McAndrew, Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* 114 (1965), 309–319.

[2] S. Ben Ovadia, Symbolic dynamics for non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms of compact smooth manifolds *J. Mod. Dyn.* 13 (2018), 43–113.

[3] M. Boyle, T. Downarowicz, The entropy theory of symbolic extensions, *Invent. Math.* 156 (2004), no. 1, 119–161.

[4] M. Boyle, J. Buzzi, The almost Borel structure of surface diffeomorphisms, Markov shifts and their factors, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 19 (2017), no. 9, 2739–2782.

[5] J. Buzzi, Intrinsic ergodicity of smooth interval maps, *Israel J. Math.* 100(1997), 125–161.

[6] J. Buzzi, C^r surface diffeomorphisms with no maximal entropy measure, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 34 (2014), no. 6, 1770–1793.

[7] J. Buzzi, The almost Borel structure of diffeomorphisms with some hyperbolicity, *Proc. Sympos. Pure Math.* 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 9–44.

[8] J. Buzzi, The degree of Bowen factors and injective codings of diffeomorphisms, *J. Mod. Dyn.* 16 (2020), 1–36.

[9] J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig, Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms, *Ann. of Math. (2)* 195 (2022), no. 2, 421–508.

[10] J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig, Continuity properties of Lyapunov exponents for surface diffeomorphisms, *Invent. Math.* 230 (2022), no. 2, 767–849.

[11] W. de Melo, S. van Strien, *One-dimensional dynamics,* Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 25 Springer-Verlag, Berlin, 1993, xiv+605 pp.

[12] T. Downarowicz, B. Weiss, Pure strictly uniform models of non-ergodic measure automorphisms, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 42 (2022), no. 2, 863–884.

[13] S. Eigen, A. Hajian, B. Weiss, Borel automorphisms with no finite invariant measure. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), no.12, 3619–3623.

[14] M. Foreman, A. Gorodetski, *Anti-classification results for smooth dynamical systems. Preliminary Report.* `arXiv:2206.09322`, 2022.

[15] C. González-Tokman, A. Quas, A concise proof of the multiplicative ergodic theorem on Banach spaces, *J. Mod. Dyn.* 9 (2015), 237–255.

[16] M. Hochman, Isomorphism and embedding of Borel systems on full sets, *Acta Appl. Math.* 126 (2013), 187–201.

[17] M. Hochman, Every Borel automorphism without finite invariant measures admits a two-set generator, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 21 (2019), no. 1, 271–317.

[18] E. Jeandel, *Strong shift equivalence as a category notion.* `arXiv:2107.10734`, 2021.

[19] W. Krieger, On entropy and generators of measure-preserving transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 149 (1970), 453–464.

[20] V. Kaloshin, Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits, *Comm. Math. Phys.* 211 (2000), no. 1, 253–271.

[21] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 51, 137–173.

[22] A. Kolmogorov, Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 124 (1959), 754–755.

[23] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding,* Cambridge Math. Lib. Cambridge University Press, Cambridge, 2021, xix+550 pp.

[24] M. Misiurewicz, Diffeomorphism without any measure with maximal entropy, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 21 (1973), 903–910.

[25] S. Newhouse, Entropy in smooth dynamical systems, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990),* 1285–1294. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1991.

[26] S. Newhouse, Continuity properties of entropy, *Ann. of Math. (2)* 129 (1989), no. 2, 215–235.

[27] C. Robinson, *An introduction to dynamical systems—continuous and discrete,* Pure Appl. Undergrad. Texts, 19 American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, xx+733 pp.

[28] F. Rodriguez-Hertz, M.-A. Rodriguez-Hertz, A. Tazhibi, R. Urès,

[29] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques,* Astérisque, 56. Société Mathématique de France, Paris, 1978, iv+211 pp.

[30] Ya. Sinai, On the concept of entropy for a dynamic system, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 124(1959), 768–771.

[31] B. Weiss, Measurable dynamics. Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), 395–421. *Contemp. Math.,* 26 American Mathematical Society, Providence, RI, 1984

[32] B. Weiss, Countable generators in dynamics—universal minimal models. in *Measure and measurable dynamics* (Rochester, NY, 1987), 321–326.

[33] R. Williams, *Strong shift equivalence of matrices in GL(2,Z),* Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991), 445–451. Contemp. Math., 135 American Mathematical Society, Providence, RI, 1992

[34] Y. Yomdin, Volume growth and entropy, *Israel J. Math.* 57 (1987), no. 3, 285–300.