



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012

Olivier Glass

Estimées d' ε -entropie pour les lois de conservation scalaires

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n° XX, 13 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A20_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz,
École polytechnique, 2011-2012.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Estimées d' ε -entropie pour les lois de conservation scalaires

Olivier Glass*
(en collaboration avec F. Ancona & T.K. Nguyen)

15 novembre 2011

1 Introduction.

Dans cet exposé, on s'intéresse aux lois de conservation scalaires en dimension 1 d'espace, et aux propriétés de compacité associées au semi-groupe qu'elles engendrent. Commençons par une présentation succincte des équations. Le lecteur souhaitant plus de détails pourra se référer par exemple à l'ouvrage de C. Dafermos [3].

Lois de conservation scalaires. On considère une loi de conservation scalaire en dimension 1 d'espace, c'est-à-dire une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x &= 0 \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\u|_{t=0} &= u_0 \text{ sur } \mathbb{R},\end{aligned}$$

où l'inconnue u est une application de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles, et la fonction f , dite de *flux*, est une application numérique de la variable réelle, qu'on supposera de classe C^2 dans tout l'exposé (quoique la régularité Lipschitz soit suffisante dans la théorie de Cauchy).

On se placera dans le cas où le flux f est uniformément strictement convexe :

$$f'' \geq a > 0. \tag{1}$$

On supposera aussi $f'(0) = 0$, quitte à se placer dans un repère en translation à vitesse constante par rapport au repère initial.

Systèmes de lois de conservations. Une motivation importante pour l'étude de ce type d'équation est la perspective de l'étude des *systèmes hyperboliques de lois de conservation* :

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x &= 0 \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d \text{ et } f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

avec en tout point $u \in \Omega$:

$$df(u) \text{ a } d \text{ valeurs propres réelles distinctes.}$$

Cette classe d'équations est très importante du point de vue des applications physiques. Elle intervient par exemple en dynamique des gaz (équations d'Euler), pour les équations d'écoulement dans les canaux en eau peu profonde (équations de Saint-Venant), en chromatographie, pour les modèles de trafic routier, etc. L'équivalent de la condition de convexité sur f est la condition de *vraie non linéarité de Lax* sur les champs caractéristiques :

$$\forall u \in \Omega, \quad r_i \cdot \nabla \lambda_i \neq 0,$$

avec $(\lambda_i, r_i) = (\lambda_i(u), r_i(u))$ les couples de valeurs/vecteurs propres de $df(u)$.

*Ceremade, Université Paris-Dauphine, CNRS UMR 7534, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

Singularités, conditions d'entropie. Il est très classique (et simple à voir à l'aide de caractéristiques) qu'en général les solutions de cette équation deviennent singulières (et pour être plus précis, discontinues) en temps fini, quelle que soit la régularité de la donnée initiale. Il s'agit du mécanisme de création des ondes de choc, tel que décrit dans la Figure 1.

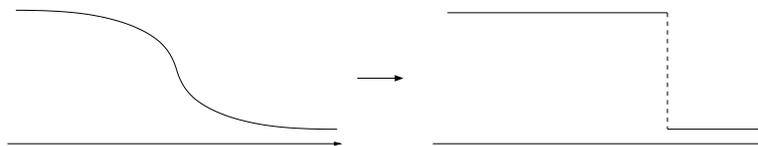


FIGURE 1 – Création d'une onde de choc

On est alors amené à considérer des solutions au sens des distributions, mais il est classique qu'à ce niveau de régularité, l'unicité est perdue. Par exemple, si l'on considère la donnée initiale donnée sur \mathbb{R} par la fonction caractéristique de \mathbb{R}^+ , les deux fonctions suivantes sont solutions faibles de l'équation de Burgers $f(u) = u^2/2$:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < t/2, \\ 1 & \text{pour } x \geq t/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ x/t & \text{pour } 0 \leq x < t, \\ 1 & \text{pour } x \geq t. \end{cases}$$

On introduit alors des *conditions d'entropie*, qui sont des conditions additionnelles à ajouter à une solution au sens des distributions, afin de récupérer la « bonne solution », c'est-à-dire celle qui est physiquement acceptable.

Il y a plusieurs notions de conditions d'entropie. Citons-en trois.

1. La condition de *viscosité évanescence* : on demande que les solutions puissent être obtenues par viscosité évanescence, c'est-à-dire comme limites lorsqu' ε tend vers 0^+ des solutions u^ε de l'équation :

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon = 0.$$

Cette condition indique en quelque sorte que la viscosité n'est plus présente dans l'équation, mais intervient encore dans le choix des discontinuités admissibles.

2. On introduit les couples d'entropie (η, q) comme les couples de fonctions satisfaisant :

$$q' = \eta' f'.$$

On demande alors que pour tout (η, q) avec η convexe, u satisfasse :

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0 \text{ au sens des mesures.}$$

La justification de cette condition vient de ce qu'il est possible de montrer qu'une solution de viscosité évanescence la satisfait nécessairement.

3. Conditions portant sur les vitesses de propagation des discontinuités. On considère ici une condition au niveau d'une discontinuité. Une discontinuité séparant deux états u_l et u_r (à gauche et à droite respectivement) est solution de l'équation au sens des distributions, si et seulement si sa vitesse de propagation s satisfait la relation de Rankine-Hugoniot :

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}.$$

Pour sélectionner les discontinuités admissibles (que l'on appelle *ondes de choc*), on introduit les *inégalités de Lax* qui exigent que :

$$f'(u_r) \leq s \leq f'(u_l),$$

ce qui signifie que le choc est compressif, c'est-à-dire que les caractéristiques de part et d'autre du choc rentrent dans celui-ci. En utilisant la convexité de f , cela donne

$$u_l \geq u_r.$$

Les trois conditions d'entropie citées ci-dessus sont équivalentes dans le cas considéré ici. On appellera *solutions d'entropie* les solutions faibles de l'équation satisfaisant de surcroît ces critères d'entropie. La notion satisfait la condition naturelle que les solutions régulières sont en particulier solutions d'entropie.

Différents auteurs, en particulier E. Hopf [10], P.D. Lax [13] et O. Oleinik [18], ont montré l'existence globale d'une unique solution entropique pour une donnée initiale dans $L^1 \cap L^\infty$ (ou même L^1), avec

$$\|u(t)\|_{L^1} \leq \|u(0)\|_{L^1}, \quad \|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|u(0)\|_{L^\infty} \text{ et } TV(u(t)) \leq TV(u(0)).$$

On associe alors à l'équation le semi-groupe non linéaire $S(t)$ qui à u_0 associe $u(t)$. Ce semi-groupe jouit de la propriété classique de contraction L^1 :

$$\|S(t)u_0 - S(t)\tilde{u}_0\|_{L^1} \leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1}.$$

Effet régularisant. De plus, P.D. Lax a montré un *effet régularisant* à ce semi-groupe $S(t)$. Plus précisément, pour un borné $B \subset L^1(\mathbb{R})$ et $R > 0$, on a :

$$\{(S(t)u_0)|_{(-R,R)}, u_0 \in B\} \text{ est relativement compact dans } L^1(-R,R).$$

La question suivante a été soulevée en 2002 par P.D. Lax [15] : *est-il possible de donner une estimée quantitative de cet effet régularisant ?*

En 2005, C. De Lellis et F. Golse [4] ont donné une réponse à cette question en utilisant le concept d' *ε -entropie* (aussi appelée entropie de Kolmogorov).

Entropie de Kolmogorov. Commençons par introduire la notion.

Définition 1. Soit (X, d) un espace métrique, et soit K une partie précompacte de X .

On appelle un **ε -recouvrement** de K , un recouvrement de K par des parties de diamètre inférieur ou égal à 2ε . Soit $N_\varepsilon(K)$ le nombre minimal de parties dans un ε -recouvrement de K . L' **ε -entropie** de K est définie comme

$$H_\varepsilon(K | X) \doteq \log_2 N_\varepsilon(K).$$

Bien entendu, c'est le comportement l'entropie de Kolmogorov lorsqu' ε tend vers 0^+ qui contient l'information de compacité sur la partie K .

Exemple. On vérifie que $H_\varepsilon([0, L]^n | \mathbb{R}^n) \sim -n \log_2(\varepsilon)$ lorsqu' $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (quel que soit L et quelle que soit la norme...)

Venons-en aux estimées d' ε -entropie que l'on peut établir sur l'image par le semi-groupe $S(t)$ de certains bornés de $L^1(\mathbb{R})$.

Borne supérieure d' ε -entropie. Le résultat de C. De Lellis et F. Golse prouve des bornes supérieures sur cette ε -entropie. Autrement dit, ce résultat montre à quel point l'effet régularisant est fort, puisqu'il majore le nombre nécessaire de parties dans un ε -recouvrement.

Théorème 1 (De Lellis-Golse, 2005). *Pour $L > 0$, $m > 0$ et $M > 0$, on définit*

$$\mathcal{C}_{L,m,M} := \{u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) / \text{Supp } u_0 \subset [-L, L], \|u_0\|_{L^1} \leq m, \|u_0\|_{L^\infty} \leq M\}. \quad (2)$$

Alors pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, l' ε -entropie de $S(T)\mathcal{C}_{L,m,M}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ satisfait

$$H_\varepsilon(S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} | L^1(\mathbb{R})) \leq \frac{4}{\varepsilon} \left(\frac{4L(T)^2}{aT} + 4L(T) \sqrt{\frac{2m}{aT}} \right),$$

avec

$$L(T) \doteq L + 2c_M \sqrt{2mT/a} \quad \text{où} \quad c_M \doteq \max_{[-M,M]} f''.$$

Rappelons que la constante $a > 0$ a été introduite dans (1). Dans l'expression ci-dessus, $L(T)$ est une estimée de la taille du support au temps T .

Remarque 1. *Il n'est pas restrictif ici de considérer des ensembles de type $\mathcal{C}_{L,m,M}$ plutôt que des boules de L^1 comme ensemble de données initiales. Cela est dû d'une part au fait que des données initiales L^1 sont immédiatement régularisées pour $t > 0$ en données L^∞ (voir la Proposition 1 plus bas), et, pour ce qui concerne le support, à la vitesse finie de propagation des lois de conservations.*

Venons-en maintenant au résultat principal de cet exposé.

Borne inférieure d' ε -entropie. Nous obtenons une borne inférieure sur l' ε -entropie considérée ci-dessus. Autrement dit, nous montrons une limitation à l'effet régularisant, en minorant le nombre de parties dans un ε -recouvrement de $S(T)\mathcal{C}_{L,m,M}$.

Théorème 2 (Ancona-G.-Nguyen). *Pour $L > 0$, $m > 0$ et $M > 0$, on définit comme précédemment $\mathcal{C}_{L,m,M}$ par (2). Alors pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, l' ε -entropie de $S(T)\mathcal{C}_{L,m,M}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ satisfait*

$$H_\varepsilon(S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} | L^1(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{L^2}{48 \ln(2) |f''(0)| T}.$$

Remarque 2. *On a ainsi que*

$$H_\varepsilon(S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} | L^1(\mathbb{R})) \approx \frac{1}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire que nous connaissons exactement l'ordre de grandeur de l' ε -entropie. La constante multiplicative optimale n'est en revanche pas claire.

Remarque 3. *Une motivation pour la question de P.D. Lax est l'analyse numérique de ces équations [14]. De fait, le résultat précédent donne une idée de la **complexité** d'un schéma numérique, quel qu'il soit, pour obtenir une précision de l'ordre d' ε . Un schéma précis à ε près en norme L^1 doit ainsi utiliser au moins $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ opérations...*

Dans le prolongement du résultat précédent, nous avons également obtenu des résultats dans le cadre un peu plus général des lois de conservation avec terme source (balance laws en anglais) que nous décrivons ci-dessous.

Lois de conservation avec terme source. On considère maintenant une loi de conservation scalaire avec terme source, c'est-à-dire une équation aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$u_t + f(u)_x = g(t, x, u), \quad (3)$$

où la fonction de flux f satisfait les mêmes hypothèses que précédemment et g est un terme source, typiquement de classe C^1 et croissant au plus linéairement à l'infini. Sous des hypothèses raisonnables, S. N. Kruzkov [11] a montré l'existence d'une unique solution entropique globale à cette classe d'équation pour une donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ (le résultat de Kruzkov est en fait beaucoup plus général).

Lorsqu'on étudie ce type d'équation, on peut avoir en vue, dans le cas où l'on pourrait étendre le résultat au cas des systèmes, à l'écoulement de gaz en présence d'une force extérieure, l'écoulement dans des canaux non plats, etc.

Hypothèses. Nous ferons les hypothèses suivantes sur le terme source g :

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad g(t, x, 0) &= 0, \\ \exists C > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |g_x(t, x, u)| &\leq C|u|, \\ \exists \omega \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+) \text{ t.q. p.p. tout } t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad |g_u(t, x, u)| &\leq \omega(t). \end{aligned}$$

La première condition est ici pour assurer que pour une donnée initiale à support compact, la solution correspondante est à support compact pour tout temps. On peut la remplacer dans la suite par : g est indépendant de x et

$$g(\cdot, 0) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+),$$

et obtenir un résultat du même ordre.

Dans la suite, on notera $E(t)$ l'opérateur d'évolution associé à (3), qui à u_0 associe $u(t)$. Ce opérateur jouit d'une propriété de stabilité L^1 par rapport à la donnée initiale :

$$\|E(t)u_0 - E(t)\tilde{u}_0\|_{L^1} \leq C(t)\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1}.$$

Borne inférieure d'ε-entropie pour les lois de conservation avec terme source. Nous étendons le Théorème 2 de la manière suivante.

Théorème 3. *Sous les hypothèses précédentes, pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :*

$$H_\varepsilon(E(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}) | L^1(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{L^2 \exp(-\|\omega\|_{L^1})}{48 \ln(2) |f''(0)| T}.$$

On obtient donc un résultat qui généralise le précédent.

Borne supérieure d'ε-entropie pour les lois de conservation avec terme source. Nous obtenons également un résultat similaire au théorème de C. De Lellis et F. Golse dans le cas des lois de conservation avec terme source.

Théorème 4. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :*

$$H_\varepsilon(E(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}) | L^1(\mathbb{R})) \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{8 L_T^2 \left(1 + 2(1 + aT^2 K) \exp(\|\omega\|_{L^1})\right)}{aT},$$

où

$$K \doteq \max \{|g_x(s, x, u)|; (s, x) \in \Delta, u \in [-M_T, M_T]\},$$

avec

$$M_T \doteq \exp(\|\omega\|_{L^1}) M, \quad L_T \doteq L + \|f''\|_{L^\infty(-M_T, M_T)} M_T T,$$

et

$$\Delta \doteq \left\{ (s, x) \mid s \in [0, T], -L_T - (T - s) \|f'\|_{L^\infty(-M_T, M_T)} \leq x \leq L_T + (T - s) \|f'\|_{L^\infty(-M_T, M_T)} \right\}.$$

Dans le résultat précédent, M_T est une estimée L^∞ pour une solution associée à $u_0 \in \mathcal{C}_{L,m,M}$, L_T est une estimée de la taille de son support et Δ est une estimation de son domaine de dépendance.

Remarque 4. *On a donc aussi que $H_\varepsilon(E(T)(\mathcal{C}_{L,m,M})) \approx \frac{1}{\varepsilon}$ dans le cas des lois de conservation avec terme source.*

2 Idées de preuve. Borne supérieure d'ε-entropie.

Commençons par décrire brièvement la preuve de C. De Lellis et F. Golse dans le cas conservatif. Deux ingrédients sont particulièrement importants dans la preuve :

- D'une part, on a l'estimée de L^1 vers L^∞ suivante :

Proposition 1 (Lax). *Si $f'' \geq a > 0$, on a pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $t > 0$:*

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\frac{2\|u_0\|_{L^1}}{at}}.$$

- D'autre part, un autre ingrédient est l'inégalité d'Oleinik :

Théorème 5 (Oleinik). *Si $f'' \geq a > 0$, alors pour tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a en posant $u(t, \cdot) \doteq S(t)u_0$:*

$$\forall t > 0, \forall x < y, \quad \frac{u(t, y) - u(t, x)}{y - x} \leq \frac{1}{at}.$$

(En particulier u est localement BV pour $t > 0$.)

Nous verrons que le premier ingrédient peut en fait s'obtenir comme une conséquence du second. Une façon classique de prouver ces deux résultats est d'utiliser la formule de Lax-Oleinik donnant une écriture des solutions entropiques des lois de conservation scalaires convexes (voir par exemple [3]).

On déduit de ce qui précède et de la vitesse finie de propagation que

$$S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} \subset$$

$$\left\{ u_T \in L^1(\mathbb{R}) / \|u_T\|_{L^1} \leq m, \|u_T\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\frac{2m}{aT}}, \text{Supp}(u_T) \subset [-L(T), L(T)], (u_T)_x \leq \frac{1}{aT} \right\}.$$

avec $L(T) \doteq L + 2c_M\sqrt{2mT/a}$. En particulier, en posant

$$q : x \mapsto (x + L(T))/aT + \sqrt{2mT/a} \text{ et } \bar{V} \doteq 2\sqrt{2mT/a} + \frac{2L}{aT},$$

on a que :

$$q - S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} \subset \mathcal{J}_{L(T),\bar{V}} \doteq \left\{ w : [-L(T), L(T)] \rightarrow [0, \bar{V}], w \text{ croissant} \right\}.$$

Après translation en x , on est donc ramené à s'intéresser à l' ε -entropie de :

$$\mathcal{I}_{\bar{L},\bar{V}} \doteq \left\{ w : [0, \bar{L}] \rightarrow [0, \bar{V}], w \text{ croissant} \right\}.$$

pour $\bar{L} := 2L(T)$. Le résultat est alors une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1 (De Lellis-Golse). *Pour $0 \leq \varepsilon < \frac{\bar{L}\bar{V}}{6}$, on a :*

$$H_\varepsilon(\mathcal{I}_{\bar{L},\bar{V}} | L^1(0, \bar{L})) \leq 4 \left\lfloor \frac{\bar{L}\bar{V}}{\varepsilon} \right\rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Idée de preuve du Lemme 1. On introduit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\Delta x \doteq \bar{L}/N$ et $\Delta y \doteq \bar{V}/N$, et on subdivise $[0, \bar{L}]$ (respectivement $[0, \bar{V}]$) en N intervalles de longueur Δx (resp. Δy). On s'intéresse aux fonctions en escalier χ qui sont croissantes et adaptées à cette grille, c'est-à-dire constantes sur chaque intervalle $[k\Delta x, (k+1)\Delta x)$ et à valeurs dans $\{0, \dots, N\} \Delta y$.

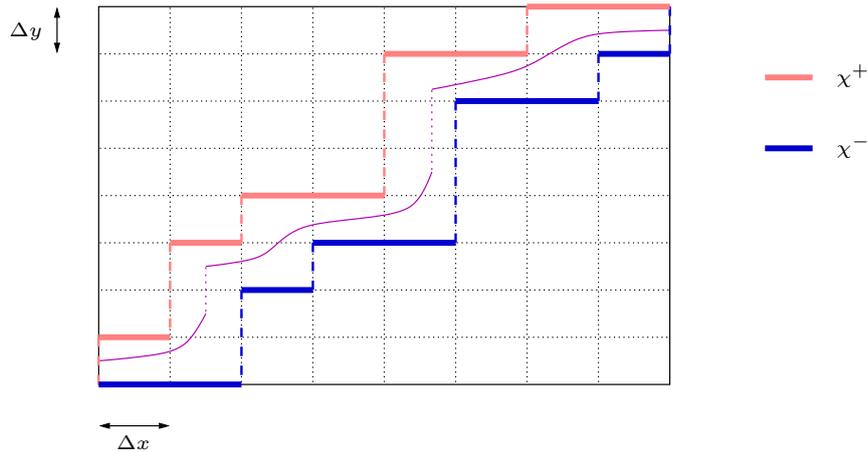


FIGURE 2 – Fonctions croissantes adaptées à la grille

On introduit les parties U de $\mathcal{I}_{\bar{L},\bar{V}}$ composées des fonctions croissantes comprises entre deux fonctions constantes par morceaux χ_- et χ_+ , croissantes, adaptées à la grille et telles que pour chaque k :

$$\chi^-(k\Delta x) \leq \chi^+(k\Delta x) \leq \chi^-(k\Delta x) + \Delta y.$$

On peut inclure toute fonction croissante de $[0, \bar{L}]$ dans $[0, \bar{V}]$ dans un tel ensemble. On a représenté sur la Figure 2 une fonction croissante et les fonctions χ^+ et χ^- correspondantes.

On voit alors que pour un tel couple (χ^-, χ^+) , on a $\|\chi^+ - \chi^-\|_{L^1} \leq (2N - 1) \Delta x \Delta y$ en comptant le nombre de « cases » entre les graphes des deux fonctions. On peut donc choisir N pour que ces ensembles U soient de diamètre inférieur ou égal à 2ε . Pour un tel N , enfin, on compte alors ces parties (qui correspondent essentiellement à des chemins entiers croissants), et on arrive alors au résultat.

Borne supérieure d'ε-entropie pour les lois de conservation avec terme source. Expliquons à présent comme ce type d'estimées peut être obtenu dans le cas de lois de conservation avec terme source.

En suivant la preuve de C. De Lellis et F. Golse, nous voyons qu'il est possible d'étendre les considérations précédentes au cas des lois de conservation avec terme source, à condition de savoir généraliser :

- les estimées L^∞ et donc les estimées de support,
- l'inégalité d'Oleinik,
- l'estimée de L^1 vers L^∞ .

Le premier point (au moins) est très classique : on a

$$\|S(t)u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \exp(\|\omega\|_{L^1(0,t)}) \doteq M_t, \quad (4)$$

et la taille du support augmente à une vitesse inférieure à $\|f'\|_{L^\infty(-M_t, M_t)}$.

Pour l'inégalité d'Oleinik, on montre le résultat suivant.

Proposition 2. *Pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, la solution correspondante de la loi de conservation avec terme source satisfait pour tout $t > 0$:*

$$\forall x < y, \quad \frac{u(t, y) - u(t, x)}{y - x} \leq \frac{(1 + ct^2k) \exp(\|\omega\|_{L^1})}{at}, \quad (5)$$

où

$$k \doteq \max \{ |g_x(s, z, u)| ; (s, z, u) \text{ t. q. } u \in [-M_t, M_t], \\ x - (t - s) \|f'\|_{L^\infty(-M_t, M_t)} \leq z \leq y + (t - s) \|f'\|_{L^\infty(-M_t, M_t)} \}.$$

avec

$$M_t \doteq \|u_0\|_{L^\infty} \exp(\|\omega\|_{L^1}),$$

Là encore, M_t est une estimée L^∞ de $u(t, \cdot)$ et k une estimation de $|g_x|$ sur le domaine de dépendance rétrograde de $[x, y]$ dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Cette proposition affine des résultats de R. Romy [19] et de P. Goatin-L. Gosse [8].

Idee de preuve de la Proposition 2. La preuve utilise les *caractéristiques généralisées* au sens de A. F. Filippov. L'utilisation de cet outil dans le cadre des lois de conservation a été développée par C. Dafermos (voir en particulier [2, 3]).

Par un argument de densité, on peut supposer sans perte de généralité la donnée initiale u_0 dans $BV(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on obtient une solution $u \in \mathcal{L}ip(L^1_{loc}) \cap L^\infty(BV)$, et on peut faire en sorte que $u(s, \cdot)$ ait en tout point des limites à gauche et à droite, quel que soit $s \geq 0$. Les caractéristiques généralisées se décrivent alors simplement comme des courbes $\xi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\dot{\xi}(s) \in \text{Conv} \left\{ f'(u(s, \xi^-(s))), f'(u(s, \xi^+(s))) \right\} \text{ p.p. tout } s \in [0, t].$$

Pour $x < y$ et $t > 0$, on introduit les caractéristiques généralisées rétrogrades (jusqu'au temps 0) maximales et minimales issues de (t, x) et (t, y) : ξ_x et ξ_y , comme dans la Figure 3.

Comme démontré par C. Dafermos, leur caractère maximal et minimal font qu'elles ne restent pas dans les chocs et sont des « vraies » caractéristiques satisfaisant :

$$\dot{\xi}(s) = f'(v(s)) \text{ et } \dot{v}(s) = g(s, \xi(s), v(s)) \text{ p.p. tout } s, \\ \text{avec } v(s) = u(\xi^+(s), s) = u(\xi^-(s), s) \text{ pour } s \in (0, t) \text{ et } u(\xi^+(t), t) \leq v(t) \leq u(\xi^-(t), t).$$

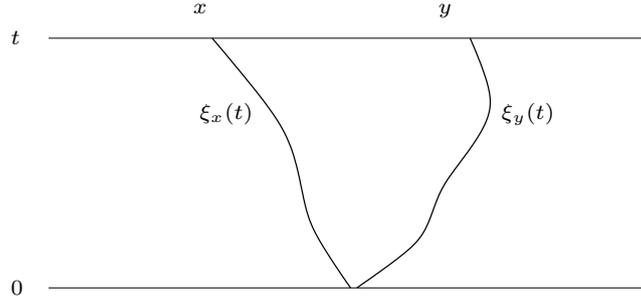


FIGURE 3 – Caractéristiques généralisées

On utilise ensuite le fait que ces caractéristiques ne peuvent pas se croiser avant le temps initial (ce qui provient des inégalités de Lax). L'inégalité qui en résulte donne (5) après quelques calculs.

Ajoutons qu'en utilisant les caractéristiques généralisées, on peut également obtenir l'estimée (4) et l'estimée L^1 suivante :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_1 \exp(\|\omega\|_{L^1(0,t)}). \quad (6)$$

Décrivons à présent comment on peut obtenir une estimée de L^1 vers L^∞ dans le cas des lois de conservation avec terme source. En fait, on peut ensuite *déduire* simplement cette estimée de L^1 vers L^∞ de l'estimée semi-Lipschitz d'Oleinik et du lemme suivant.

Lemme 2. Soit $v \in BV(\mathbb{R})$, à support compact et telle que $Dv \leq B$ au sens des mesures pour un certain $B \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\|v\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2B\|v\|_{L^1}}.$$

Preuve du Lemme 2. Cette preuve est élémentaire. On se ramène par convolution (par un noyau positif lisse et à support compact) à $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On introduit alors \bar{x} tel que $\|v\|_\infty = |v(\bar{x})|$. Puis on définit

$$\bar{y} \doteq \inf\{y / v \geq 0 \text{ sur } [y, \bar{x}]\} \quad \text{ou} \quad \bar{y} \doteq \sup\{y / v \leq 0 \text{ sur } [x, y]\},$$

selon que $v(\bar{x}) > 0$ ou $v(\bar{x}) < 0$. Il suffit alors d'écrire

$$v(\bar{x})^2 = 2 \int_{\bar{y}}^{\bar{x}} vv_x \leq 2B\|v\|_{L^1}.$$

On voit alors qu'une estimée de L^1 vers L^∞ suit de l'inégalité d'Oleinik et de l'estimée (6).

3 Idées de preuve. Borne inférieure d' ε -entropie.

Nous arrivons à la preuve du résultat principal. Commençons par le cas conservatif.

Pour établir une borne inférieure sur $H_\varepsilon(S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} | L^1(\mathbb{R}))$, on coupe la preuve en deux parties :

- On cherche une classe de fonctions \mathcal{A}_T , d'une forme simple, et telle que

$$\mathcal{A}_T \subset S(T)\mathcal{C}_{L,m,M}.$$

Bien sûr, cette classe devra être la plus large possible et adaptée à la suite de la preuve.

- On introduit ensuite une famille finie \mathcal{I} de fonctions de \mathcal{A}_T , de cardinal N assez grand, et telle que pour chaque $\bar{f} \in \mathcal{I}$,

$$\text{Card}\{f \in \mathcal{I} / \|f - \bar{f}\|_{L^1} \leq 2\varepsilon\} \doteq \mathcal{N}_\varepsilon(\bar{f}),$$

soit assez petit. On conclut alors que le nombre minimal de parties dans un ε -recouvrement satisfait :

$$N_\varepsilon(S(T)\mathcal{C}_{L,m,M} | L^1(\mathbb{R})) \geq \frac{N}{\max_{\bar{f}} \mathcal{N}_\varepsilon(\bar{f})}.$$

Une méthode naturelle serait de faire en sorte qu'à chaque fois, on ait $\mathcal{N}_\varepsilon(\bar{f}) = 1$, c'est-à-dire trouver une famille de points suffisamment éloignés les uns des autres. Mais il n'est pas évident que ce soit le plus simple. Dans cette partie, nous empruntons des arguments à un article de Bartlett-Kulkarni-Posner [1].

Partie 1. Description de certains états atteignables. On sait que les états du système au temps T , associés à une donnée initiale dans $\mathcal{C}_{L,m,M}$, satisfont naturellement une estimée L^1 , une estimée L^∞ , l'inégalité d'Oleinik, et sont à support compact.

Une première idée est de montrer que, quitte à changer un peu les constantes, on peut atteindre les états qui satisfont toutes ces conditions. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 3. *Pour $L, m, M, b > 0$, on pose :*

$$\mathcal{A}_{L,m,M,b} \doteq \left\{ u_T \in BV(\mathbb{R}) \mid \text{Supp}(u_T) \subset [-L, L], \|u_T\|_{L^1} \leq m, \|u_T\|_{L^\infty} \leq M, Du_T \leq b \right\}.$$

Alors pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$\mathcal{A}_{L_T, 2Lh, h, (2T|f''(0)|)^{-1}} \subset S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}),$$

où

$$L_T \doteq L - 2T|f''(0)|h.$$

Remarque 5. *Dans l'énoncé précédent, h est petit, mais pas très petit. Si on remplace*

$$\mathcal{A}_{L_T, 2Lh, h, (2T|f''(0)|)^{-1}} \subset S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}),$$

par

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}_T, 2Lh, h, (T\|f''\|_{L^\infty(-M,M)})^{-1}} \subset S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}),$$

avec $\tilde{L}_T \doteq L_T \doteq L - hT\|f''\|_{L^\infty(-M,M)}$, alors la seule contrainte sur h est $h \leq M$ et $Lh \leq m$. Mais l'écriture précédente donne une meilleure estimée à la fin de la preuve.

Idées de preuve de la Proposition 3. Pour prouver ce résultat, on s'intéresse dans un premier temps à des données régulières. Autrement dit, on cherche à montrer que

$$\mathcal{A}_{L_T, 2Lh, h, (2T|f''(0)|)^{-1}} \cap C^1(\mathbb{R}) \subset S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}).$$

Pour $u_T \in \mathcal{A}_{L_T, 2Lh, h, (2T|f''(0)|)^{-1}} \cap C^1(\mathbb{R})$, on applique la théorie de l'existence locale en temps de solutions de classe C^1 à la donnée initiale $u_T(-x)$. Si on montre que la solution w correspondante existe dans C^1 sans explosion jusqu'au temps T et que $w(T, -x) \in \mathcal{C}_{L,m,M}$, alors par invariance des solutions régulières par le changement de variables

$$(t, x) \rightarrow (T - t, -x),$$

on a établi que $u_T \in S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M})$. Cette invariance n'est bien entendu pas vraie pour les solutions d'entropie en général, les conditions d'entropie introduisant de l'irréversibilité dans la notion de solution.

Tout le problème est donc d'utiliser les hypothèses sur u_T pour prouver que la solution w reste régulière jusqu'à $t = T$ (l'appartenance de u_T à $\mathcal{C}_{L,m,M}$ provenant alors des diverses estimées évoquées ci-dessus). Il suffit en fait pour cela de montrer que

$$w_x(t, \cdot) \text{ reste borné dans } L^\infty(\mathbb{R}) \text{ sur tout compact de } [0, T].$$

Or en notant $v \doteq w_x$, celui-ci satisfait l'équation (avant une potentielle explosion) :

$$v_t(t, x) + f'(w(t, x))v_x(t, x) = -f''(w(t, x))v(t, x)^2.$$

Le long des (vraies) caractéristiques $x(t)$ associées à $f'(w(t, x))$, la valeur $z(t) \doteq v(t, x(t))$ satisfait

$$\dot{z}(t) = -f''(w(t, x(t)))z^2(t).$$

Il suffit alors d'établir une borne inférieure pour z . Or la condition d'Oleinik donne précisément des estimées sur $(z(0, \cdot))_- = (w_x(0, \cdot))_-$. Avec les estimées a priori sur w dans L^∞ , on vérifie que cela suffit pour ne pas avoir explosion de v dans C^1 avant le temps T , et on conclut donc que $u_T \in S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M})$.

On déduit enfin par un argument de densité que

$$\mathcal{A}_{L_T, 2Lh, h, (2T|f''(0)|)^{-1}} \subset S(T)(\mathcal{C}_{L,m,M}),$$

grâce à la propriété de contraction L^1 du semi-groupe $S(t)$.

Partie 2. Description de la famille finie \mathcal{I} . On fixe h comme dans la proposition précédente. On introduit alors pour $n \geq 2$, la famille de fonctions (\mathcal{F}_ι) indexée par $\iota \in \{-1, 1\}^n$, définies de la manière suivante. Pour chaque $\iota \in \{-1, 1\}^n$, la fonction $\mathcal{F}_\iota : \mathbb{R} \rightarrow [-h, h]$ est supportée dans $[-L, L]$ et est définie dans $[-L, L]$ par la formule suivante : pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\mathcal{F}_\iota(x) = \begin{cases} \frac{hn}{2L} \left(x + L - k \frac{2L}{n} \right) & \text{si } \iota_k = 1, \\ \frac{hn}{2L} \left(x + L - (k+1) \frac{2L}{n} \right) & \text{si } \iota_k = -1, \end{cases} \quad \text{pour } x \in \left[-L + k \frac{2L}{n}, -L + (k+1) \frac{2L}{n} \right).$$

L'exemple donné dans la Figure 4 correspond à $n = 10$ et $\iota = (-1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1)$.

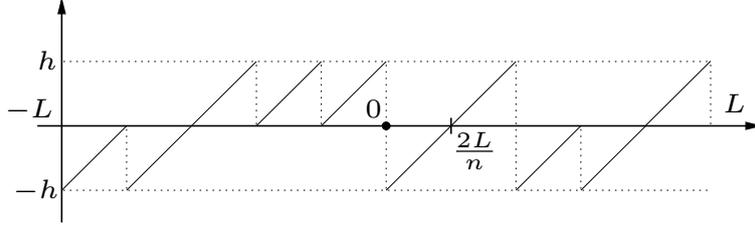


FIGURE 4 – Une fonction \mathcal{F}_ι

On voit facilement que les fonctions \mathcal{F}_ι appartiennent à $\mathcal{A}_{L, 2Lh, h, b}$ dès que :

$$\frac{nh}{2L} \leq b.$$

Clairement, il y a 2^n telles fonctions. Reste à estimer pour $\bar{\iota} \in \{-1, 1\}^n$ fixé, le nombre de fonctions \mathcal{F}_ι telles que :

$$\|\mathcal{F}_\iota - \mathcal{F}_{\bar{\iota}}\|_{L^1} \leq 2\varepsilon.$$

Or

$$\|\mathcal{F}_\iota - \mathcal{F}_{\bar{\iota}}\|_{L^1} = \frac{2hL}{n} \text{Card}\left\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \iota_k \neq \bar{\iota}_k\right\}.$$

On cherche donc à dénombrer les $\iota \in \{-1, 1\}^n$ tels que

$$\text{Card}\left\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \iota_k \neq \bar{\iota}_k\right\} \leq \frac{n\varepsilon}{hL}. \quad (7)$$

Remarquons que ce cardinal ne dépend pas de $\bar{\iota}$. Appelons-le $\mathcal{C}(\varepsilon)$. L'idée est la suivante : h et L sont fixés, ε est destiné à être petit et n grand. Deux vecteurs ι et $\bar{\iota}$ pris « au hasard » auront probablement de l'ordre de $n/2$ composantes en commun et de l'ordre de $n/2$ composantes distinctes pour n grand. Or ici, nous sommes ici dans un régime où $\frac{n\varepsilon}{hL}$ sera beaucoup plus petit que $n/2$. Des ι qui ne diffèrent de $\bar{\iota}$ que pour moins de $\frac{n\varepsilon}{hL}$ composantes constituent donc un événement *rare*, c'est-à-dire une toute petite proportion des 2^n indices ι possibles.

Pour être plus précis, le nombre de ι différant de $\bar{\iota}$ pour exactement k indices est $\binom{n}{k}$. Il suit que

$$\mathcal{C}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n\varepsilon}{hL} \rfloor} \binom{n}{k}.$$

On peut interpréter de manière élémentaire le membre de droite en termes de marche aléatoire. En effet, si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, alors pour tout $\ell \leq n$ on a :

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq \ell) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k}.$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. On utilise l'inégalité de Hoeffding [9] : pour $\mu > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \leq -\mu) \leq \exp\left(-\frac{2\mu^2}{n}\right).$$

(Dans le cas simple considéré ici, une telle inégalité est due à Bernstein.) On suppose qu' $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que $\frac{n\varepsilon}{hL} < \frac{n}{2}$, et on choisit

$$\mu = \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n\varepsilon}{hL} \right\rfloor.$$

On obtient

$$\frac{1}{2^n} \mathcal{C}(\varepsilon) \leq \exp\left(-2 \frac{\left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n\varepsilon}{hL} \right\rfloor\right)^2}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{n}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{hL}\right)^2\right). \quad (8)$$

Reste à optimiser le membre de droite de (8) sous les contraintes :

$$\frac{nh}{2L} \leq b \quad \text{et} \quad \frac{n\varepsilon}{hL} \leq \frac{n}{2}.$$

Après calcul on obtient

$$\frac{\mathcal{C}(\varepsilon)}{2^n} \leq \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{4bL^2}{27}\right),$$

et le résultat suit.

Remarque 6. *On note que le majorant ci-dessus est indépendant de h .*

Le cas des lois de conservation avec terme source. Pour obtenir le Théorème 3, il s'agit d'adapter les arguments précédents. Le terme source est à prendre en compte dans :

- les estimées L^∞ et donc les estimées de support,
- l'inégalité d'Oleinik,
- les estimées de temps de vie d'une solution régulière.

Les deux premiers points ont déjà été utilisés dans la dérivation d'une borne supérieure.

Pour le dernier point, on pose pour $w_T \in \mathcal{A}_{L_T, m, M, b} \cap C^1$:

$$\tilde{g}(t, x, u) \doteq -g(T - t, -x, u) \quad \text{et} \quad w_0(x) \doteq u_T(-x),$$

et on considère la solution classique correspondante, définie pour un certain intervalle de temps. Les constantes b et L_T intervenant dans l'ensemble $\mathcal{A}_{L_T, m, M, b}$ proviennent des estimées L^∞ et d'Oleinik précédentes. Il s'agit alors comme précédemment de montrer que la solution existe jusqu'au temps T .

On pose alors $v(t, x) \doteq w_x(t, x)$, qui satisfait l'équation (tant que la solution classique existe) :

$$v_t(t, x) + f'(w(t, x)) v_x(t, x) = \tilde{g}_x(t, x, w(t, x)) + \tilde{g}_u(t, x, w(t, x)) v(t, x) - f''(w(t, x)) v(t, x)^2.$$

Puis, le long des caractéristiques $x(t)$, en posant $z(t) \doteq w(t, x(t))$, on obtient

$$\dot{z}(t) = \tilde{g}_x(t, x(t), w(t, x(t))) + \tilde{g}_u(t, x(t), w(t, x(t))) z(t) - f''(w(t, x(t))) z^2(t).$$

Pour le premier terme de droite, on utilise que h est petit :

$$|\tilde{g}_x(t, x, w(t, x))| \leq Ch.$$

Pour h petit, $\|w\|_\infty$ est petit et donc $f''(w)$ est proche de $f''(0)$. On arrive alors à

$$\dot{z}(t) \geq -Ch + \omega(t)z(t) - \frac{3}{2}f''(0)z^2(t),$$

et on conclut comme précédemment. L'argument de densité utilisé pour montrer que $\mathcal{A}_{L_T, m, M, b}$ est tout entier constitué d'éléments atteignables utilise ici la propriété de stabilité dans L^1 des lois de conservation avec terme source.

Problèmes ouverts. Commençons par signaler que la même question dans le cas d'une loi de conservation multi-dimensionnelle ($x \in \mathbb{R}^d$) ou lorsqu'on perd la convexité (sans bien sûr que le flux ne comporte de dégénérescence linéaire) est ouverte.

Le principal problème ouvert concerne l'extension au cas des systèmes 2×2 vraiment non linéaires, comme l'équation d'Euler isentropique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \rho^\gamma) = 0, \quad \gamma \geq 1. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on peut considérer les solutions BV à petite variation totale (Glimm [6]) ou à petite oscillation (Glimm-Lax [7]). Le cas de solutions L^∞ (Di Perna [5], Lions-Perthame-Souganidis-Tadmor [16, 17]) est aussi important, mais probablement plus difficile !

Références

- [1] Bartlett P. L., Kulkarni S. R., Posner S. E., Covering numbers for real-valued function classes. *IEEE Trans. Inform. Theory* 43 (1997), no. 5, 1721–1724.
- [2] Dafermos C. M., Characteristics in hyperbolic conservation laws. A study of the structure and the asymptotic behaviour of solutions, *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium (Edinburgh, 1976)*, Vol. I, 1–58. Res. Notes in Math., No. 17, Pitman, London, 1977.
- [3] Dafermos C. M., *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Grundlehren Math. Wissenschaften Series, Vol. 325, Springer Verlag, 2000.
- [4] De Lellis C., Golse F., A Quantitative Compactness Estimate for Scalar Conservation Laws, *Comm. Pure Appl. Math.* 58 (2005), no. 7, 989–998.
- [5] DiPerna R.J., Compensated compactness and general systems of conservation laws, *Trans. Amer. Math. Soc.* 292 (1985), no. 2, 383–420.
- [6] Glimm J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), 697–715.
- [7] Glimm J., Lax P. D., Decay of solutions of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 101 (1970).
- [8] Goatin P., Gosse L., Decay of positive waves for $n \times n$ hyperbolic systems of balance laws. *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), no. 6, 1627–1637.
- [9] Hoeffding W., Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* 58 (1963), 13–30.
- [10] Hopf E., The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* 3 (1950), 201–230.
- [11] Kružkov S. N., First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)* 81 (123) 1970, 228–255 (*en russe*). *Traduction anglaise dans Math. USSR Sbornik* Vol. 10 (1970), No. 2, 217–243.
- [12] Lax P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.* 7 (1954), 159–193.
- [13] Lax P. D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II. *Comm. Pure Appl. Math.* 10 (1957), 537–566.

- [14] Lax P. D., Accuracy and resolution in the computation of solutions of linear and nonlinear equations. *Recent advances in numerical analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1978)*. Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin, 41, 107–117. Academic Press, New York, 1978.
- [15] Lax P. D., Course on hyperbolic systems of conservation laws. XXVII Scuola Estiva di Fis. Mat., Ravello, 2002.
- [16] Lions P.-L., Perthame B., Souganidis P. E., Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Comm. Pure Appl. Math.* 49 (1996), no. 6, 599–638.
- [17] Lions P.-L., Perthame B., Tadmor E., Existence and stability of entropy solutions to isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian variables. *Comm. Math. Phys.* 163 (1994), 415–431.
- [18] Oleinik O. A., Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)* 12 (1957) no. 3(75), 3–73 (*en russe*). *Traduction anglaise dans Ann. Math. Soc. Trans. Ser. 2* 26, 95–172.
- [19] Robyr R., SBV regularity of entropy solutions for a class of genuinely nonlinear scalar balance laws with non-convex flux function. *J. Hyperbolic Differ. Equ.* 5 (2008), no. 2, 449–475.