



# Séminaire Laurent Schwartz

## EDP et applications

Année 2019-2020

Jacek Jendrej

**Paires kink-antikink en forte interaction pour l'équation des champs scalaires en dimension  $1 + 1$**

*Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2019-2020)*, Exposé n° XII, 16 p.

<https://doi.org/10.5802/slsedp.139>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2019-2020.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Institut des hautes études scientifiques  
Le Bois-Marie • Route de Chartres  
F-91440 BURES-SUR-YVETTE  
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université  
Paris-Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<http://www.math.polytechnique.fr/>



Publication membre du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte  
[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

# Paires kink-antikink en forte interaction pour l'équation des champs scalaires en dimension 1 + 1

Jacek Jendrej

(travail en collaboration avec M. Kowalczyk et A. Lawrie)

## Résumé

Considérons une équation des ondes en dimension 1+1, avec la non-linéarité donnée par un potentiel qui possède deux minima globaux, les « vides ». On appelle les « kinks » et les « antikinks » les minimiseurs de l'énergie potentielle parmi tous les états reliant les deux vides. Ce sont des états stationnaires du système. On s'intéresse aux « paires kink-antikink », c'est-à-dire aux solutions de l'équation qui convergent en temps grand vers une superposition d'un kink et d'un antikink, séparés par une distance qui tend vers l'infini.

Avec Michał Kowalczyk (Univ. Chile) et Andrew Lawrie (MIT), nous avons montré qu'il existe une paire kink-antikink, et qu'elle est unique aux translations dans l'espace-temps près. Je présente les principaux éléments de ce travail.<sup>1</sup>

## 1 Introduction

### 1.1 Description du modèle

Nous considérons l'équation des champs scalaires

$$\partial_t^2 \phi(t, x) - \partial_x^2 \phi(t, x) + U'(\phi(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (\text{CS})$$

Cette équation est obtenue formellement comme l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien

$$\mathcal{L} := \iint \left( \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - U(\phi) \right) dx dt.$$

L'état du système est décrit par une paire de fonctions  $\phi_0, \dot{\phi}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Il est facile d'identifier l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$E_c(\dot{\phi}_0) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\dot{\phi}_0(x))^2 dx,$$
$$E_p(\phi_0) := \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} (\partial_x \phi_0(x))^2 + U(\phi_0) \right) dx.$$

L'énergie totale est donnée par

$$E(\phi_0, \dot{\phi}_0) := E_k(\dot{\phi}_0) + E_p(\phi_0) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} (\dot{\phi}_0(x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_0(x))^2 + U(\phi_0) \right) dx.$$

---

1. Ce compte rendu correspond à l'exposé donné par l'auteur au séminaire Laurent Schwartz à l'École polytechnique, le 10 mars 2020. La majeure partie de ce texte est issue du mémoire d'habilitation à diriger des recherches de l'auteur (à paraître).

Nous supposons toujours que  $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$  est un *état d'énergie finie*, c'est-à-dire  $E(\phi_0, \dot{\phi}_0) < \infty$ . L'énergie (totale) est une quantité formellement conservée par le flot. Une autre quantité conservée est l'*impulsion* définie par

$$P(\phi_0, \dot{\phi}_0) := - \int_{\mathbb{R}} \dot{\phi}_0(x) \partial_x \phi_0(x) dx.$$

Une propriété importante de l'équation (CS) est l'invariance par transformations de Lorentz

$$\psi(t, x) := \phi(t \cosh \alpha - x \sinh \alpha, -t \sinh \alpha + x \cosh \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nous nous intéressons au cas où  $U$  a la forme particulière d'un *double puits de potentiel*, c'est-à-dire  $U$  est une fonction lisse, positive, paire et il existe un nombre  $\omega > 0$  tel que

$$U(-\omega) = U(\omega) = 0, \tag{1.1}$$

$$U(\phi) > 0 \text{ pour tout } \phi \notin \{-\omega, \omega\}, \tag{1.2}$$

$$U''(-\omega) = U''(\omega) > 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{|\phi| \rightarrow \infty} U(\phi) = \infty. \tag{1.4}$$

Comme exemple concret, on peut prendre  $U(\phi) := \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - \omega^2)^2$ , ce qui correspond au *modèle  $\phi^4$* . On appelle  $\omega$  et  $-\omega$  les « vides ». Par un choix des unités approprié, on peut supposer sans restreindre la généralité que

$$\omega = 1, \quad \text{et} \quad U''(1) = 1. \tag{1.5}$$

On peut montrer que pour toute donnée initiale  $(\phi(0), \partial_t \phi(0)) = (\phi_0, \dot{\phi}_0)$  d'énergie finie, il existe une unique solution faible de (CS), et qu'elle est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Kinks et antikinks

Soit  $\phi_0$  une fonction telle que  $E_p(\phi_0) < \infty$ . Les hypothèses sur  $U$  impliquent que  $(U'(\phi(x)))^2 \lesssim U(\phi(x))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x(U(\phi(x)))| dx = \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \phi(x)| |U'(\phi(x))| dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x \phi(x))^2 + U(\phi(x))) dx < \infty,$$

en particulier  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(\phi_0(x))$  existe. En utilisant de nouveau le fait que  $E_p(\phi_0) < \infty$ , on voit que cette limite est égale à l'un des deux vides  $\{-1, 1\}$ . De manière analogue,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_0(x) \in \{-1, 1\}$ . Ainsi, j'ai défini l'application

$$\phi_0 \mapsto \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_0(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \phi_0(x) \right) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}.$$

Cette application divise l'ensemble des fonctions d'énergie potentielle finie en 4 classes disjointes, que je note  $\mathcal{H}_{-1,-1}$ ,  $\mathcal{H}_{-1,1}$ ,  $\mathcal{H}_{1,-1}$  et  $\mathcal{H}_{1,1}$ , et je dénomme les *classes topologiques*. Une solution de (CS) ne peut pas changer de classe topologique au cours du temps, grâce à la continuité du flot. Pour cette raison, en physique mathématique on les appelle souvent des « lois de conservation topologiques ». On dit que les classes  $\mathcal{H}_{-1,-1}$  et  $\mathcal{H}_{1,1}$  sont topologiquement triviales, car toute fonction  $\phi_0 \in \mathcal{H}_{-1,-1} \cup \mathcal{H}_{1,1}$  est homotopiquement équivalente à une fonction constante.

Sur  $\mathcal{H}_{-1,-1}$  et  $\mathcal{H}_{1,1}$ , la fonctionnelle  $E_p$  atteint son minimum global sur les fonctions dont la valeur est constante et égale à l'un des vides. Pour déterminer les minima globaux sur  $\mathcal{H}_{-1,1}$  et  $\mathcal{H}_{1,-1}$ , j'ai besoin de l'observation suivante appelée « l'astuce de Bogomolny ».

**Lemme 1.1.** Pour toute fonction  $\phi_0$  et  $\zeta_1 < \zeta_2$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left( \frac{1}{2} (\partial_x \phi_0(x))^2 + U(\phi_0(x)) \right) dx \geq \left| \int_{\phi_0(\zeta_1)}^{\phi_0(\zeta_2)} \sqrt{2U(\phi)} d\phi \right|,$$

et l'égalité est vrai si, et seulement si,  $\partial_x \phi_0(x) = \sqrt{2U(\phi_0(x))}$  pour tout  $x \in ]\zeta_1, \zeta_2[$ , ou  $\partial_x \phi_0(x) = -\sqrt{2U(\phi_0(x))}$  pour tout  $x \in ]\zeta_1, \zeta_2[$ .

*Démonstration.* Je suppose, sans restreindre la généralité, que  $\phi_0(\zeta_1) \leq \phi_0(\zeta_2)$  (l'autre cas s'obtient, grâce à la symétrie de  $U$ , en considérant  $-\phi_0$  au lieu de  $\phi_0$ ). J'écris

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left( \frac{1}{2} (\partial_x \phi_0(x))^2 + U(\phi_0(x)) \right) dx \\ &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sqrt{2U(\phi_0(x))} \partial_x \phi_0(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\partial_x \phi_0(x) - \sqrt{2U(\phi_0(x))})^2 dx \\ &= \int_{-\phi_0(\zeta_1)}^{\phi_0(\zeta_2)} \sqrt{2U(\phi)} d\phi + \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\partial_x \phi_0(x) - \sqrt{2U(\phi_0(x))})^2 dx, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée, avec l'égalité si, et seulement si, le second terme de la deuxième ligne s'annule, ce qui est équivalent à  $\partial_x \phi_0(x) = \sqrt{2U(\phi_0(x))}$  pour tout  $x \in ]\zeta_1, \zeta_2[$ .  $\square$

Je définis  $H : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  comme la solution de l'équation  $\partial_x H(x) = \sqrt{2U(H(x))}$ , avec la donnée initiale  $H(0) = 0$ . Il est facile de voir que  $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $|H(x) - 1| \lesssim e^{-x}$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $|H(x) + 1| \lesssim e^x$  quand  $x \rightarrow -\infty$ . En particulier,  $H \in \mathcal{H}_{-1,1}$ . Toute fonction  $H(\cdot - \xi_0)$  pour  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  est appelée un *kink*.

**Corollaire 1.2.** Si  $\phi_0 \in \mathcal{H}_{-1,1}$ , alors  $E_p(\phi_0) \geq E_p(H) = \int_{-1}^1 \sqrt{2U(\phi)} d\phi$ , et l'égalité est atteinte si, et seulement si,  $\phi_0$  est un *kink*.  $\square$

J'ai ainsi identifié les minimiseurs globaux de  $E_p$  sur  $\mathcal{H}_{-1,1}$ . Le cas de  $\mathcal{H}_{1,-1}$  est analogue : les minimiseurs sont les fonctions  $-H(\cdot - \xi_0)$  pour  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ . On les appelle les *antikinks*.

**Proposition 1.3.** Les fonctions constantes  $\phi_0(x) = \pm 1$ , les *kinks* et les *antikinks* sont les seuls points critiques de  $E_p$ , donc les seules solutions stationnaires de (CS).  $\square$

**Remarque 1.4.** En appliquant une transformation de Lorentz aux *kinks*, on construit des *ondes progressives*. Si  $\beta \in ]-1, 1[$  et  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , alors

$$\phi(t, x) := H(\gamma_\beta(x - \xi_0 - \beta t)), \quad \text{où } \gamma_\beta := (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

est une solution de (CS).

**Remarque 1.5.** La quantification de (CS) est étudiée comme un modèle-jouet dans la théorie quantique des champs. Le livre [1, Chapter 6] contient une discussion du rôle des *kinks* dans cette théorie.

**Remarque 1.6.** La stabilité asymptotique du *kink* pour le modèle  $\phi^4$  est un problème ouvert bien connu, résolu par Kowalczyk, Martel et Muñoz [8] dans le cas des perturbations impaires.

### 1.3 Paires kink-antikink

Nous étudions les solutions de l'équation (CS) qui appartiennent à la classe  $\mathcal{H}_{1,1}$ , et qui ont l'énergie minimale permettant d'atteindre l'autre vide  $-1$ , autrement dit qui contiennent deux transitions entre les vides,  $1 \rightsquigarrow -1 \rightsquigarrow 1$ . Voici la définition précise.

**Définition 1.7.** On dit qu'une solution  $\phi \in \mathcal{H}_{1,1}$  est une *paire kink-antikink pour les temps positifs* si

- $E(\phi, \partial_t \phi) \leq 2E_p(H)$ ,
- il existe  $T_0 \in \mathbb{R}$  et une fonction  $\zeta_0 : [T_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \zeta_0(t)) = -1$ .

**Lemme 1.8.** Une solution  $\phi$  de (CS) est une *paire kink-antikink pour les temps positifs* si, et seulement si, il existe  $T_0 \in \mathbb{R}$  et des fonctions continues  $\xi_1, \xi_2 : [T_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_2(t) - \xi_1(t)) = \infty$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \|\partial_t \phi(t)\|_{L^2} + \|\phi(t) - (1 - H(\cdot - \xi_1(t)) + H(\cdot - \xi_2(t)))\|_{H^1} \right) = 0.$$

*L'idée d'une preuve.* La contrainte sur l'énergie force les deux transitions à avoir la forme presque optimale, c'est-à-dire la forme d'un antikink ou d'un kink. Une manière possible de formaliser cette intuition est de se servir de l'astuce de Bogomolny.  $\square$

### 1.4 Résultat principal

Notre contribution est de classifier toutes les paires kink-antikink. Avant d'énoncer le résultat, j'introduis les constantes explicites suivantes :

$$\kappa := \exp \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{2U(y)}} - \frac{1}{1-y} \right) dy \right), \quad (1.6)$$

et

$$A := \left( \int_0^1 \sqrt{2U(y)} dy \right)^{-1/2} \kappa = \sqrt{2} \|\partial_x H\|_{L^2}^{-1} \kappa. \quad (1.7)$$

**Théorème 1** ([7, Theorem 1]). *Il existe une fonction réelle  $\xi$  de classe  $C^1$  et une solution  $\Phi$  de (CS) telle que, pour tout  $\epsilon > 0$  et  $t \geq T_0 = T_0(\epsilon)$ ,*

$$|\xi(t) - \log(At)| \leq t^{-2+\epsilon}, \quad |\xi'(t) - t^{-1}| \leq t^{-3+\epsilon} \quad (1.8)$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi(t) - (1 - H(\cdot + \xi(t)) + H(\cdot - \xi(t))) \right\|_{H^1} \\ & + \left\| \partial_t \Phi(t) + \xi'(t) (\partial_x H(\cdot + \xi(t)) + \partial_x H(\cdot - \xi(t))) \right\|_{L^2} \leq t^{-2+\epsilon}. \end{aligned}$$

De plus,  $\Phi$  est l'unique *paire kink-antikink aux translations près*, c'est-à-dire, si  $\phi(t, x)$  est une *paire kink-antikink pour les temps positifs*, alors il existe  $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\phi(t, x) = \Phi(t - t_0, x - x_0).$$

## 1.5 Commentaires

Les petites données initiales sont topologiquement triviales et, comme l'a montré Delort [2], produisent des solutions qui présentent un comportement oscillatoire. On peut se poser la question suivante : lorsqu'on autorise des énergies de plus en plus grandes, à quel moment un nouveau comportement dynamique apparaît ? Les kinks ont, de toute évidence, un comportement non oscillatoire, mais  $E_p(H)$  n'est pas le seuil d'énergie correct, puisque les kinks ne sont pas topologiquement triviaux. Le vrai seuil est égal à  $2E_p(H)$ , et les paires kink-antikink sont les solutions topologiquement triviales d'énergie minimale possible qui convergent localement (aux translations près) vers des solitons, en l'occurrence vers un antikink et un kink.

De ce point de vue, l'unicité des paires kink-antikink est un analogue des résultats de Merle [15] sur l'unicité des solutions explosives de masse minimale pour l'équation de Schrödinger non linéaire critique, et des résultats similaires de Raphaël et Szeftel [21] dans le cas non homogène. Notons pourtant que dans ces travaux la solution développe *un seul* soliton, la contribution principale du Théorème 1 étant de considérer la situation où deux solitons apparaissent.

Du point de vue de la théorie des multi-solitons, on pourrait, en suivant la terminologie de [14], appeler les paires kink-antikink les *deux-solitons en forte interaction*. De tels objets ont été relativement peu étudiés. Il est facile de vérifier que la fonction  $\phi(t, x) = 4 \arctan(t \operatorname{sech}(x))$  est une paire kink-antikink pour l'équation de sine-Gordon

$$\partial_t^2 \phi(t, x) - \partial_x^2 \phi(t, x) + \sin(\phi(t, x)) = 0,$$

mais l'unicité semble nouvelle même pour ce modèle complètement intégrable. L'existence de 2-solitons et 3-solitons en forte interaction pour l'équation mKdV a été observée par Wadati et Ohkuma [22]. Pour des modèles non intégrables, la première construction rigoureuse est celle de Martel et Raphaël [14], et d'autres constructions sont obtenues dans [6, 19, 20, 4].

L'existence et l'unicité des multi-solitons en *faible* interaction ont été démontrées par Martel [11].

## 2 Quelques éléments de la preuve

### 2.1 Calcul non rigoureux

Une des méthodes de prédire le comportement dynamique des paires kink-antikink est la *méthode de restriction*, qui consiste à restreindre le flot à la *variété lente*, qui dans notre cas est définie comme suit :

$$\mathcal{M} := \{1 - H(\cdot - \xi_1) + H(\cdot - \xi_2) : \xi_2 - \xi_1 \gg 1\}. \quad (2.1)$$

Ainsi,  $\xi_1$  représente la position du antikink, et  $\xi_2$  la position du kink. Si  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  sont deux fonctions du temps, qu'on voit comme des trajectoires du antikink et du kink, on pose

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\xi_1, \xi_2) := \mathcal{L}(1 - H(\cdot - \xi_1) + H(\cdot - \xi_2)).$$

Je vais à présent calculer  $\widetilde{\mathcal{L}}$ , qu'on appelle le *lagrangien réduit*.

**Notation.** Dans toute cette section, le produit scalaire dans  $L^2$  est noté

$$\langle g_1, g_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}} g_1(x) g_2(x) dx.$$

Soit  $a := \xi_2 - \xi_1$  la distance entre l'antikink et le kink. Je définis

$$F(a) := -\langle \partial_x H, U'(1 - H + H(\cdot - a)) - U'(H) + U'(H(\cdot - a)) \rangle \quad (2.2)$$

et

$$E_p(a) := E_p(1 - H + H(\cdot - a)) - 2E_p(H),$$

qui est l'énergie d'interaction entre le kink et l'antikink placés à la distance  $a$  l'un de l'autre. Par le changement de variable  $x \mapsto a - x$ , on obtient l'identité suivante :

$$F(a) = -\langle \partial_x H(\cdot - a), U'(1 - H + H(\cdot - a)) - U'(H) + U'(H(\cdot - a)) \rangle.$$

Par un calcul direct, on peut vérifier que

$$F(a) = \frac{d}{da} E_p(a),$$

et que le comportement asymptotique de  $F$  quand  $a \rightarrow \infty$  est donné par

$$|F(a) - 2\kappa^2 e^{-a}| \lesssim a e^{-2a}, \quad (2.3)$$

où  $\kappa$  est la constante définie par (1.6). En intégrant par rapport à  $a$ , puisque  $\lim_{a \rightarrow \infty} E_p(a) = 0$ , j'obtiens

$$|E_p(a) + 2\kappa^2 e^{-a}| \lesssim a e^{-2a}. \quad (2.4)$$

Pour alléger la notation, j'écris

$$H_j(t, x) := H(x - \xi_j(t)), \quad j \in \{1, 2\}.$$

La lagrangien réduit, après soustraction d'une constante (ce qui ne change pas les équations du mouvement), devient

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}((\xi_1')^2 + (\xi_2')^2) \|\partial_x H\|_{L^2}^2 - \xi_1' \xi_2' \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle - E_p(\xi_2 - \xi_1).$$

Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_1' - \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle \xi_2') &= \xi_1' \xi_2' \langle \partial_x^2 H_1, \partial_x H_2 \rangle + F(\xi_2 - \xi_1), \\ \frac{d}{dt} (\|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_2' - \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle \xi_1') &= \xi_1' \xi_2' \langle \partial_x H_1, \partial_x^2 H_2 \rangle - F(\xi_2 - \xi_1). \end{aligned}$$

Comme  $\frac{d}{dt} \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle = -\xi_1' \langle \partial_x^2 H_1, \partial_x H_2 \rangle - \xi_2' \langle \partial_x H_1, \partial_x^2 H_2 \rangle$ , je peux écrire, de manière équivalente,

$$\begin{aligned} \|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_1'' - \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle \xi_2'' &= -(\xi_2')^2 \langle \partial_x^2 H_1, \partial_x H_2 \rangle + F(\xi_2 - \xi_1), \\ \|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_2'' - \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle \xi_1'' &= -(\xi_1')^2 \langle \partial_x H_1, \partial_x^2 H_2 \rangle - F(\xi_2 - \xi_1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

On appelle ces équations les *équations formelles de modulation*. Le second terme du membre de droite et le premier terme du membre de gauche s'avèrent négligeables. En les supprimant et en utilisant (2.3), j'obtiens

$$\begin{aligned} \|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_1'' &\simeq 2\kappa^2 e^{\xi_2 - \xi_1}, \\ \|\partial_x H\|_{L^2}^2 \xi_2'' &\simeq -2\kappa^2 e^{\xi_2 - \xi_1}. \end{aligned}$$

Ces équations ont une solution particulière

$$\xi_1(t) = -\log(At), \quad \xi_2(t) = \log(At), \quad A := \sqrt{2} \|\partial_x H\|_{L^2}^{-1} \kappa,$$

en accord avec (1.8). Toute autre solution telle que la séparation  $\xi_2 - \xi_1 \rightarrow \infty$  et les vitesses  $|\xi_1'|, |\xi_2'| \rightarrow 0$ , est une translation en espace-temps de cette solution particulière.

## 2.2 Modulation

Soit  $\phi$  une paire kink-antikink, selon la Définition 1.7. Par le Lemme 1.8,  $\phi$  est de la forme

$$\phi(t, x) = 1 - H(x - \xi_1(t)) + H(x - \xi_2(t)) + g(t, x), \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow \infty} (\|g(t)\|_{H^1} + \|\partial_t \phi(t)\|_{L^2}) = 0.$$

Comme dans la section précédente, j'écris  $H_j(t, x) := H(x - \xi_j(t))$  pour  $j \in \{1, 2\}$ , de sorte que  $\phi(t) = 1 - H_1(t) + H_2(t) + g(t)$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}$ , définie par (2.1), est une variété lisse, de dimension 2, de fonctions dans la classe de Schwartz. La paire  $(\xi_1, \xi_2)$  forme un système de coordonnées naturel sur cette variété. Le but du changement de variables  $\phi \mapsto (\xi_1, \xi_2, g)$  est de décomposer l'évolution en une somme d'une évolution sur  $\mathcal{M}$  et d'un reste transversal à  $\mathcal{M}$ . Une telle décomposition n'est pas unique, et une méthode standard d'y remédier est d'imposer des *conditions d'orthogonalité*. Je fais le choix de demander que  $g$  soit  $L^2$ -orthogonal au plan tangent à  $\mathcal{M}$  en point  $1 - H(\cdot - \xi_1) + H(\cdot - \xi_2)$ , autrement dit

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x H_1(t) g(t) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x H_2(t) g(t) dx = 0. \quad (2.6)$$

**Proposition 2.1.** *Il existe  $\eta > 0$  ayant la propriété suivante. Soit  $I$  un intervalle de longueur finie ou infinie, et  $\phi$  une solution de (CS) telle que*

$$\text{dist}_{H^1}(\phi(t), \mathcal{M}) \leq \eta, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

*Alors, il existe un unique choix d'une paire de fonctions de classe  $C^2$ ,  $\xi_1, \xi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\xi_2(t) - \xi_1(t) \geq \eta^{-1}$  pour tout  $t \in I$  et le terme de reste  $g$ , défini par  $\phi(t) = 1 - H_1(t) + H_2(t) + g(t)$ , vérifie  $\|g(t)\|_{H^1} \leq 2\eta$  et (2.6), pour tout  $t \in I$ .  $\square$*

On trouve des preuves de résultats similaires par exemple dans les articles de Gustafson et Sigal [3, Proposition 3], Merle et Zaag [16, Proposition 3.1], ou dans mon article [5, Lemma 3.3]. Elles sont toutes basées sur une version quantitative du théorème des fonctions implicites.

Les fonctions  $(\xi_1, \xi_2)$ , définies ainsi, sont appelées les *variables lentes* du problème. Observons que  $(\xi_1, \xi_2, g)$  prend ces valeurs dans la sous-variété de  $\mathbb{R}^2 \times H^1$  de co-dimension 2 définie par

$$\langle H(\cdot - \xi_1), g \rangle = \langle H(\cdot - \xi_2), g \rangle = 0,$$

qui est une condition linéaire en  $g$ , mais non linéaire en  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

Afin de réécrire l'équation (CS) en termes des nouvelles variables, je calcule

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t) &= \xi_1'(t) \partial_x H_1(t) - \xi_2'(t) \partial_x H_2(t) + \partial_t g(t), \\ \partial_t^2 \phi(t) &= \xi_1''(t) \partial_x H_1(t) - (\xi_1'(t))^2 \partial_x^2 H_1(t) - \xi_2''(t) \partial_x H_2(t) + (\xi_2'(t))^2 \partial_x^2 H_2(t) + \partial_t^2 g(t), \\ \partial_x \phi(t) &= -\partial_x H_1(t) + \partial_x H_2(t) + \partial_x g(t), \\ \partial_x^2 \phi(t) &= -\partial_x^2 H_1(t) + \partial_x^2 H_2(t) + \partial_x^2 g(t), \end{aligned}$$

donc (CS) devient

$$\begin{aligned} \partial_t^2 g + \xi_1'' \partial_x H_1 - (\xi_1')^2 \partial_x^2 H_1 - \xi_2'' \partial_x H_2 + (\xi_2')^2 \partial_x^2 H_2 \\ + \partial_x^2 H_1 - \partial_x^2 H_2 - \partial_x^2 g + U'(1 - H_1 + H_2 + g) = 0, \end{aligned}$$

ou, en utilisant le fait que  $\partial_x^2 H_j = U'(H_j)$ ,

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 g + \xi_1'' \partial_x H_1 - (\xi_1')^2 \partial_x^2 H_1 - \xi_2'' \partial_x H_2 + (\xi_2')^2 \partial_x^2 H_2 \\ & - \partial_x^2 g + U'(1 - H_1 + H_2 + g) + U'(H_1) - U'(H_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

En dérivant en temps la première condition d'orthogonalité, j'obtiens

$$0 = -\xi_1' \langle \partial_x^2 H_1, g \rangle + \langle \partial_x H_1, \partial_t g \rangle,$$

et, en dérivant encore une fois,

$$\langle \partial_x H_1, \partial_t^2 g \rangle = \xi_1'' \langle \partial_x^2 H_1, g \rangle - (\xi_1'(t))^2 \langle \partial_x^3 H_1, g \rangle + 2\xi_1' \langle \partial_x^2 H_1, \partial_t g \rangle.$$

Il en résulte, en projetant (2.7) sur  $\partial_x H_1$ , que

$$\begin{aligned} & \xi_1'' (\|\partial_x H\|_{L^2}^2 + \langle \partial_x^2 H_1, g \rangle) - \xi_2'' \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle = \\ & = (\xi_1')^2 \langle \partial_x^3 H_1, g \rangle - 2\xi_1' \langle \partial_x^2 H_1, \partial_t g \rangle - (\xi_2')^2 \langle \partial_x H_1, \partial_x^2 H_2 \rangle \\ & - \langle \partial_x H_1, U'(1 - H_1 + H_2 + g) + U'(H_1) - U'(H_2) - U''(H_1)g \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(j'ai utilisé le fait que  $\langle \partial_x H_1, \partial_x^2 H_1 \rangle = 0$  et  $\langle \partial_x H_1, -\partial_x^2 g + U''(H_1)g \rangle = 0$ ). De manière similaire, en projetant sur  $\partial_x H_2$ , j'obtiens

$$\begin{aligned} & \xi_2'' (\|\partial_x H\|_{L^2}^2 - \langle \partial_x^2 H_2, g \rangle) - \xi_1'' \langle \partial_x H_1, \partial_x H_2 \rangle = \\ & = -(\xi_2')^2 \langle \partial_x^3 H_2, g \rangle + 2\xi_2' \langle \partial_x^2 H_2, \partial_t g \rangle - (\xi_1')^2 \langle \partial_x H_2, \partial_x^2 H_1 \rangle \\ & + \langle \partial_x H_2, U'(1 - H_1 + H_2 + g) + U'(H_1) - U'(H_2) - U''(H_2)g \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On appelle (2.8) et (2.9) les *équations de modulation*. Si  $\|g\|_{H^1}$  est suffisamment petit, alors (2.8) et (2.9) forment un système linéaire pour  $\xi_1''$  et  $\xi_2''$ , dont la matrice est inversible.

**Remarque 2.2.** En injectant  $g = \partial_t g = 0$  dans les équations de modulation ci-dessus, on retrouve exactement les équations de modulation formelles (2.5). L'objectif est donc de montrer que l'influence du terme de reste  $(g, \partial_t g)$  est négligeable en première approximation.

La conservation de l'énergie permet d'obtenir une première estimation du terme  $g$ . Soit  $L := -\partial_x^2 + U''(H)$ , de sorte que  $\langle v, Lv \rangle$  est le hessien de  $E_p$  en  $H$ . Les kinks étant les minimiseurs de  $E_p$  dans  $\mathcal{H}_{-1,1}$ , il est clair que le hessien  $D^2 E_p(H)$  est semi-défini positif. En dérivant l'identité  $\partial_x^2 H(x - \xi_0) = U'(H(x - \xi_0))$  par rapport à  $\xi_0$  en  $\xi_0 = 0$ , on obtient  $L(\partial_x H) = 0$ , donc  $\langle v, Lv \rangle$  n'est pas défini positif, mais le lemme suivant montre la positivité dans toute direction transversale à  $\partial_x H$ .

**Lemme 2.3.** Soit  $L := -\partial_x^2 + U''(H)$ . Il existe une constante  $c_0 > 0$  (qui dépend de  $U$ ) telle que pour tout  $v \in H^1(\mathbb{R})$

$$\langle v, Lv \rangle \geq c_0 \|v\|_{H^1}^2 - c_0^{-1} \langle \partial_x H, v \rangle^2.$$

□

La preuve est une application simple de la théorie de Sturm-Liouville.

Il s'avère que cette positivité peut être « localisée en espace », ce qui conduit au résultat suivant sur la positivité au voisinage d'une paire kink-antikink.

**Lemme 2.4.** Soit  $\xi_1 < \xi_2$  et  $L := -\partial_x^2 + U''(1 - H(\cdot - \xi_1) + H(\cdot - \xi_2))$ . Il existe  $c_0 > 0$  tel que, si  $\xi_2 - \xi_1 \geq c_0^{-1}$ , alors pour tout  $v \in H^1(\mathbb{R})$

$$\langle v, Lv \rangle \geq c_0 \|v\|_{H^1}^2 - c_0^{-1} (\langle \partial_x H(\cdot - \xi_1), v \rangle^2 + \langle \partial_x H(\cdot - \xi_2), v \rangle^2).$$

□

Pour démontrer cette inégalité, il suffit d'appliquer le lemme précédent à  $v$  multiplié par des fonctions cut-off.

**Corollaire 2.5.** Si  $\phi = 1 - H_1 + H_2 + g$  est une paire kink-antikink, alors pour tout  $t$  suffisamment grand

$$\|g(t)\|_{H^1} + \|\partial_t \phi(t)\|_{L^2} \lesssim e^{-\frac{1}{2}(\xi_2(t) - \xi_1(t))}. \quad (2.10)$$

*L'idée d'une preuve.* Le développement limité de l'énergie à l'ordre 2 donne

$$E(\phi, \partial_t \phi) = \frac{1}{2} \|\partial_t \phi\|_{L^2}^2 + E_p(1 - H_1 + H_2) + \langle DE_p(1 - H_1 + H_2), g \rangle + \frac{1}{2} \langle g, Lg \rangle + o(\|g\|_{H^1}^2).$$

Si  $\phi$  est une paire kink-antikink, alors  $E(\phi, \partial_t \phi) = 2E_p(H)$ , donc (2.4) et le Lemme 2.4 impliquent

$$\|g\|_{H^1}^2 + \|\partial_t \phi\|_{L^2}^2 \lesssim e^{-(\xi_2 - \xi_1)} + |\langle DE_p(1 - H_1 + H_2), g \rangle|.$$

On peut vérifier que  $\|DE_p(1 - H_1 + H_2)\|_{L^2} \ll e^{-\frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)}$ , ce qui permet d'absorber le dernier terme. □

L'idée serait maintenant d'injecter la borne (2.10) dans les équations de modulation (2.8) et (2.9) et en déduire le comportement asymptotique de  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . C'est possible, à condition d'appliquer au préalable un changement de variables approprié. Je définis les *impulsions localisées*

$$\begin{aligned} p_1(t) &:= \langle \partial_x(H_1(t) - \chi_1(t)g(t)), \partial_t \phi \rangle, \\ p_2(t) &:= \langle -\partial_x(H_2(t) + \chi_2(t)g(t)), \partial_t \phi(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les fonctions  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont des cut-offs définis de manière suivante. Soit  $\chi \in C^\infty$  une fonction décroissante telle que  $\chi(x) = 1$  pour  $x \leq \frac{1}{3}$  et  $\chi(x) = 0$  pour  $x \geq \frac{2}{3}$ . Je pose

$$\chi_1(t, x) := \chi\left(\frac{x - x_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}\right), \quad \chi_2 := 1 - \chi_1,$$

de sorte que  $\chi_j(t, x) = 1$  si  $|x - x_j(t)| \leq \frac{1}{3}|x_2(t) - x_1(t)|$ .

**Remarque 2.6.** Pour expliquer le nom « impulsion localisée », je considère de manière informelle la limite  $\xi_2 \rightarrow \infty$ , avec  $\xi_1$  fixe. J'obtiens  $\phi = -H_1 + g$ , alors que  $p_1$  devient  $\langle \partial_x(H_1 - g), \partial_t \phi \rangle = -\langle \partial_x \phi, \partial_t \phi \rangle$ , ce qui est précisément l'impulsion. De manière analogue, si  $\xi_1 \rightarrow -\infty$ , alors  $p_2$  devient l'impulsion.

**Lemme 2.7.** Si  $\phi$  est une paire kink-antikink, alors il existe  $C, T_0 > 0$  tels que  $p_j \in C^1([T_0, \infty))$  et pour tout  $t \geq T_0$

$$\begin{aligned} |\xi_j'(t) \|\partial_x H\|_{L^2}^2 - p_j(t)| &\leq C e^{-(\xi_2(t) - \xi_1(t))}, \\ |p_j'(t) + (-1)^j F(\xi_2(t) - \xi_1(t))| &\leq C (\xi_2(t) - \xi_1(t))^{-1} e^{-(\xi_2(t) - \xi_1(t))}, \end{aligned}$$

où  $F$  est la fonction définie par (2.2). □

Ces inégalités différentielles déterminent, à l'ordre principal, le comportement asymptotique de la séparation entre l'antikink et le kink, ce qui conduit au résultat suivant.

**Proposition 2.8.** *Soit  $A$  la constante définie par (1.7). Si  $\phi$  est une paire kink-antikink, alors il existe  $C, T_0 > 0$  tels que pour tout  $t \geq T_0$*

$$\begin{aligned} 2t^{-1} - C(t \log t)^{-1} &\leq \xi_2'(t) - \xi_1'(t) \leq 2t^{-1} + C(t \log t)^{-1}, \\ 2 \log(At) - C(\log t)^{-1} &\leq \xi_2(t) - \xi_1(t) \leq 2 \log(At) + C(\log t)^{-1}, \\ \|g(t)\|_{H^1} + \|\partial_t g(t)\|_{L^2} &\leq Ct^{-1}(\log t)^{-1/2}. \end{aligned}$$

□

En particulier, la prédiction de la séparation entre l'antikink et le kink, obtenue dans la Section 2.1, est confirmée.

### 2.3 Une application de la méthode de Lyapunov-Schmidt

Ayant à ma disposition l'information sur l'ordre de grandeur de la séparation entre les kinks, j'aborde la question de trouver toutes les paires kink-antikink. J'applique la méthode de Lyapunov-Schmidt, qui peut être résumée ainsi :

- décomposer le flot en *variables lentes* appartenant à la variété lente et *variables rapides* dans une direction transversale à cette variété,
- projeter l'équation (CS) sur la direction tangente à la variété lente (l'équation obtenue s'appelle l'*équation de bifurcation*), ainsi que sur une direction transversale (l'équation obtenue s'appelle l'*équation projetée*);
- éliminer les variables rapides en résolvant l'équation projetée,
- trouver les variables lentes en résolvant l'équation de bifurcation.

Ici, la variété lente est la variété  $\mathcal{M}$  définie par (2.1),  $(\xi_1, \xi_2)$  sont les variables lentes et  $g$  est la variable rapide. Pour écrire l'équation projetée, je choisis comme direction transversale l'espace défini par les conditions d'orthogonalité (2.6). J'obtiens

$$\partial_t^2 \phi(t, x) = \partial_x^2 \phi(t, x) + U'(\phi(t, x)) + \lambda_1(t) \partial_x H_1(t, x) + \lambda_2(t) \partial_x H_2(t, x), \quad (2.12)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des fonctions à déterminer. Écrite en termes de  $g$ , l'équation (2.12) devient

$$\begin{aligned} \partial_t^2 g + \xi_1'' \partial_x H_1 - (\xi_1')^2 \partial_x^2 H_1 - \xi_2'' \partial_x H_2 + (\xi_2')^2 \partial_x^2 H_2 \\ - \partial_x^2 g + U'(1 - H_1 + H_2 + g) + U'(H_1) - U'(H_2) = \lambda_1 \partial_x H_1 + \lambda_2 \partial_x H_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mon but est d'éliminer les variables rapides, donc de trouver la solution  $(g, \lambda_1, \lambda_2)$  de la dernière équation, pour toute paire de trajectoires  $(\xi_1, \xi_2)$  qui vérifient

$$2 \log t - C_0 \leq \xi_2(t) - \xi_1(t) \leq 2 \log t + C_0, \quad (2.14)$$

$$\xi_2'(t) - \xi_1'(t) \geq 0, \quad (2.15)$$

$$|\xi_1'(t)| + |\xi_2'(t)| \leq C_0 t^{-1}, \quad (2.16)$$

$$|\xi_1''(t)| + |\xi_2''(t)| \leq C_0 t^{-2} \quad (2.17)$$

pour un certain  $T_0 > 0$  et tout  $t \geq T_0$  (ces bornes découlent facilement de la Proposition 2.8). Je dirai qu'une telle paire de trajectoires  $(\xi_1, \xi_2)$  est *admissible*.

Pour résoudre l'équation projetée, et plus tard l'équation de bifurcation, j'appliquerai systématiquement le principe de contraction, et pour cela j'ai besoin d'introduire les espaces fonctionnels pertinents. Soit  $\gamma, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $T_0 > 0$  et  $z : [T_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Je pose

$$\|z\|_{N_\gamma} := \sup_{t \geq T_0} t^\gamma |z(t)|,$$

$$\|z\|_{W_{\alpha,\beta}} := \sup_{\tau \geq t \geq T_0} t^{\beta-\alpha} \left| \int_t^\tau s^\alpha z(s) ds \right|.$$

Pour  $\gamma > 2$ , je pose

$$\mathbf{W}_\gamma := \bigcap_{\alpha \in \{-1, 0, 1, 2\}} W_{\alpha,\gamma}.$$

Si  $z$  est une fonction deux fois continûment différentiable, je pose

$$\|z\|_{S_\gamma} := \|z\|_{N_\gamma} + \|z'\|_{N_{\gamma+1}} + \|z''\|_{N_{\gamma+1}}$$

(la même norme est prise pour  $z'$  et pour  $z''$ ).

Si  $z$  est une fonction continue définie sur  $[T_0, \infty)$ , à valeurs dans un espace de Banach  $E$ , j'écris

$$\|z\|_{N_\gamma(E)} := \left\| t \mapsto \|z(t)\|_E \right\|_{N_\gamma}.$$

Si  $z$  est une fonction deux fois continûment différentiable  $[T_0, \infty) \rightarrow E$ , j'écris

$$\|z\|_{S_\gamma(E)} := \|z\|_{N_\gamma(E)} + \|z'\|_{N_{\gamma+1}(E)} + \|z''\|_{N_{\gamma+1}(E)}.$$

Si l'espace  $E$  est clair du contexte, j'écris  $N_\gamma$  au lieu de  $N_\gamma(E)$  et  $S_\gamma$  au lieu de  $S_\gamma(E)$ .

**Proposition 2.9.** *Pour tout  $C_0 > 0$  il existe  $T_0 > 0$  et  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante. Pour toute admissible paire de trajectoires  $\xi_1, \xi_2 : [T_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , l'équation (2.13) a une unique solution  $(\lambda_1, \lambda_2, g) = (\lambda_1(\xi_1, \xi_2), \lambda_2(\xi_1, \xi_2), g(\xi_1, \xi_2))$  telle que  $\|(g, \partial_t g)\|_{N_1(\mathcal{E})} \leq \delta$ . Pour tout  $\gamma \in [1, 2)$  il existe  $C = C(\gamma)$  et  $T_0 = T_0(\gamma)$  tels que cette solution vérifie*

$$\sum_{j=1}^2 \|\lambda_j + (-1)^j \xi_j'' + F(\xi_2 - \xi_1)\|_{N_{\gamma+1} \cap W_{\gamma+1}} + \|(g, \partial_t g)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} \leq 1. \quad (2.18)$$

En outre, pour tout  $\nu > 1$  et  $\beta \in (2, \nu + 2)$  il existe  $C = C(\nu, \beta) > 0$  et  $T_0 = T_0(\nu, \beta)$  tels que

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda_j(\xi_1^\sharp, \xi_2^\sharp) - \lambda_j(\xi_1, \xi_2) + (-1)^j ((\xi_j^\sharp)'' - \xi_j'') + (F(\xi_2^\sharp - \xi_1^\sharp) - F(\xi_2 - \xi_1)) \right\|_{N_\beta \cap W_\beta} \\ & + \|(g(\xi_1^\sharp, \xi_2^\sharp) - g(\xi_1, \xi_2), \partial_t(g(\xi_1^\sharp, \xi_2^\sharp) - g(\xi_1, \xi_2)))\|_{N_{\beta-1}(\mathcal{E})} \leq C \|(\xi_1^\sharp, \xi_2^\sharp) - (\xi_1, \xi_2)\|_{S_\nu}, \end{aligned}$$

pour tous  $(\xi_1, \xi_2)$  et  $(\xi_1^\sharp, \xi_2^\sharp)$  admissibles et tels que  $\xi_j^\sharp - \xi_j \in S_\nu$ .

J'applique le schéma standard ; je considère d'abord le problème linéaire non homogène correspondant.

**Lemme 2.10.** *Pour tout  $\gamma > 1$  et  $\beta \in (2, \gamma + 1)$ , il existe  $C = C(\beta, \gamma) > 0$  et  $T_0 = T_0(\beta, \gamma)$  ayant la propriété suivante. Pour tout  $(\xi_1, \xi_2)$  admissible, et tout  $f \in N_{\gamma+1}(L^2)$ , le système*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 h - \partial_x^2 h + U''(1 - H_1 + H_2)h &= f + \lambda_1 \partial_x H_1 + \lambda_2 \partial_x H_2, \\ \langle \partial_x H_1, h \rangle &= \langle \partial_x H_2, h \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

*a une unique solution  $(h, \lambda_1, \lambda_2)$  telle que  $(h, \partial_t h) \in N_\gamma(\mathcal{E})$ . De plus, cette solution vérifie*

$$\|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} + \sum_{j=1}^2 \|\lambda_j + \|\partial_x H\|_{L^2}^{-2} \langle \partial_x H_j, f \rangle\|_{\mathbf{W}_\beta \cap N_{\gamma+1}} \leq C \|f\|_{N_{\gamma+1}(L^2)}. \quad (2.20)$$

*Si  $\gamma = 1$ , alors le même résultat est vrai, en remplaçant (2.20) par*

$$\|(h, \partial_t h)\|_{N_1(\mathcal{E})} + \sum_{j=1}^2 \|\lambda_j + \|\partial_x H\|_{L^2}^{-2} \langle \partial_x H_j, f \rangle\|_{N_2} \leq C \|f\|_{N_{\gamma+1}(L^2)}.$$

□

**Remarque 2.11.** Il est également nécessaire de prouver une version du Lemme 2.10 où on suppose  $f \in N_\gamma(L^2)$  et  $\partial_t f \in N_{\gamma+1}(L^2)$ . J'ometts ici la formulation exacte, qui est presque la même que celle du Lemme 2.10.

*L'idée d'une preuve du Lemme 2.10.* Une des manières d'inverser un opérateur d'onde comme (2.19) est d'utiliser une estimation d'énergie. Pour simplifier le problème, considérons la situation où il n'y a qu'un seul kink, ce qui revient à regarder l'équation des ondes avec un potentiel dont la position dépend du temps :

$$\partial_t^2 h(t, x) - \partial_x^2 h(t, x) + V(x - \xi_1(t))h(t, x) = f(t, x),$$

où la vitesse du mouvement du potentiel est  $|\xi_1'(t)| \simeq t^{-1}$ .

Une idée naïve serait d'ignorer la dépendance par rapport au temps, et de dériver l'habituelle fonctionnelle d'énergie

$$I(t) := \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} (\partial_t h(t, x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x h(t, x))^2 + \frac{1}{2} V(x - \xi_1(t)) h(t, x)^2 \right) dx.$$

Une intégration par parties donne

$$I'(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \partial_t h(t, x) dx - \frac{\xi_1'(t)}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x V(x - x_1(t)) h(t, x)^2 dx, \quad (2.21)$$

donc, pour tout  $\gamma \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |I'(t)| &\lesssim \|\partial_t h(t)\|_{L^2} \|f(t)\|_{L^2} + |\xi_1'(t)| \|h(t)\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim t^{-2\gamma-1} (\|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} \|f\|_{N_\gamma(L^2)} + \|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})}^2), \end{aligned} \quad (2.22)$$

En intégrant par rapport à  $t$ , le mieux qu'on puisse obtenir est

$$\begin{aligned} \|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})}^2 &\simeq \sup_{t \geq T_0} (t^{2\gamma} \|(h(t), \partial_t h(t))\|_{H^1 \times L^2}^2) \lesssim \sup_{t \geq T_0} t^{2\gamma} I(t) \\ &\lesssim \|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} \|f\|_{N_{\gamma+1}(L^2)} + \|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})}^2, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas utile. Malgré le fait que le potentiel se déplace à la vitesse  $t^{-1} \rightarrow 0$ , son mouvement ne peut pas être négligé dans le régime où le terme non homogène  $f$  décroît comme une puissance de  $t$ . Le remède est d'utiliser la *fonctionnelle mixte énergie-impulsion*

$$\tilde{I}(t) := I(t) - \xi_1'(t) \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(t, x) \partial_x h(t, x) dx,$$

une idée qui remonte aux travaux de Martel, Merle et Tsai [12, 13]. Le rôle du terme supplémentaire, appelé le *terme correctif*, est d'annuler le 2ème terme du membre de droite de (2.21), et en effet une intégration par parties mène à

$$\tilde{I}'(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \partial_t h(t, x) dx - \xi_1''(t) \int_{\mathbb{R}} \partial_t h(t, x) \partial_x h(t, x) dx.$$

Cette identité est plus avantageuse que (2.22), car  $|\xi_1''(t)| \simeq t^{-2}$ . En supposant la positivité de la fonctionnelle d'énergie, je peut finalement déduire la borne désirée  $\|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} \lesssim \|f\|_{N_{\gamma+1}(L^2)}$ .

Considérons maintenant la situation de deux potentiels,

$$\partial_t^2 h(t, x) - \partial_x^2 h(t, x) + V(x - \xi_1(t))h(t, x) + V(x - \xi_2(t))h(t, x) = f(t, x).$$

Comme le terme correctif dépend de la vitesse du déplacement du potentiel, ces corrections doivent être *localisées*, ce qui conduit à considérer la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \tilde{I}(t) := & I(t) - \xi_1'(t) \int_{\mathbb{R}} \chi(x - \xi_1(t)) \partial_t h(t, x) \partial_x h(t, x) dx \\ & - \xi_2'(t) \int_{\mathbb{R}} \chi(x - \xi_2(t)) \partial_t h(t, x) \partial_x h(t, x) dx. \end{aligned}$$

Ici,  $\chi$  est une fonction cut-off telle que  $\chi(x) = 1$  pour tout  $|x| \leq R$ ,  $\chi(x) = 0$  pour tout  $|x| \geq 3R$  et  $|\chi'(x)| \leq R^{-1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , avec  $R \gg 1$ . Cette fonctionnelle permet d'arriver à la même conclusion, c'est-à-dire  $\|(h, \partial_t h)\|_{N_\gamma(\mathcal{E})} \lesssim \|f\|_{N_{\gamma+1}(L^2)}$ .  $\square$

**Remarque 2.12.** Dans le cas d'un seul potentiel, on remarque que  $\tilde{I}$  est une lois de conservation si  $\xi_1'' = 0$  et  $f = 0$ . Cela résulte également de l'invariance de Lorentz.

**Remarque 2.13.** Les termes correctifs sont en fait les mêmes que ceux utilisés pour construire les impulsions localisés (2.11).

Lorsqu'on dispose des estimations optimales pour le problème linéaire non homogène, la Proposition 2.9 est une simple conséquence du principe de contraction.

À l'aide de la Proposition 2.9, il est maintenant possible de résoudre les équations de bifurcation. En termes des fonctions  $\lambda_j$ , ces équations s'écrivent

$$\lambda_1(t) = 0, \quad \lambda_2(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in [T_0, \infty). \quad (2.23)$$

**Lemme 2.14.** Soit  $1 < \gamma < 2$ . Si  $(\xi_1, \xi_2)$  sont des trajectoires qui vérifient (2.14)–(2.17) et résolvent les équations de bifurcation (2.23), alors il existe d'uniques nombres  $\xi_0, t_0 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\xi_1(t) - \xi_0 + \log(A(t - t_0)) \in S_\gamma, \quad \xi_2(t) - \xi_0 - \log(A(t - t_0)) \in S_\gamma. \quad (2.24)$$

*Idee d'une preuve.* C'est une conséquence de (2.18). En effet, en utilisant les bornes

$$\|(-1)^j \xi_j'' + F(\xi_2 - \xi_1)\|_{N_{\gamma+1} \cap W_{\gamma+1}} \lesssim 1,$$

il n'est pas difficile d'améliorer (2.14)–(2.17), pour arriver à (2.24).  $\square$

Afin de terminer la preuve du Théorème 1, il ne reste qu'à montrer qu'il existe une unique paire de trajectoires  $(\xi_1, \xi_2)$  qui résout (2.24), telle que  $\xi_1(t) + \log(At) \in S_\gamma$ ,  $\xi_2(t) - \log(At) \in S_\gamma$  pour un certain  $\gamma \in (1, 2)$ . De nouveau, je suis le schéma usuel basé sur le principe de contraction. J'écris

$$\xi_1(t) = -\log(At) + \eta_1(t), \quad \xi_2(t) = \log(At) + \eta_2(t),$$

et j'exprime (2.23) comme un problème de point fixe pour  $\eta_j \in S_\gamma$  : si

$$\tilde{\eta}_1'' = -t^{-2}(\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_1) - \lambda_1(-\log(At) + \eta_1, \log(At) + \eta_2) + \eta_1'' + t^{-2}(\eta_2 - \eta_1), \quad (2.25)$$

$$\tilde{\eta}_2'' = t^{-2}(\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_1) + \lambda_2(-\log(At) + \eta_1, \log(At) + \eta_2) + \eta_2'' - t^{-2}(\eta_2 - \eta_1), \quad (2.26)$$

alors (2.23) est équivalent à  $\tilde{\eta}_j = \eta_j$ . Observons que  $-t^{-2}(\eta_2 - \eta_1)$  est simplement la linéarisation de  $F(\xi_2 - \xi_1) = F(2\log(At) + (\eta_2 - \eta_1))$ . La partie linéaire du système (2.25)–(2.26) se diagonalise de manière explicite, et on vérifie que le système définit une contraction sur  $S_\gamma \times S_\gamma$ , en fait pour tout  $\gamma \in (1, 2)$ .

## 2.4 Interprétation dynamique des paires kink-antikink

Dans la dernière section, je voudrais indiquer le rôle des paires kink-antikink dans la description du portrait de phase des solutions de l'équation (CS). Le contenu de cette section fera partie d'un article en préparation, en collaboration avec A. Lawrie.

**Définition 2.15.** Une suite de fonctions  $\phi_n$  est une *suite de Palais-Smale* de l'énergie potentielle  $E_p$  si

- $\sup_n E_p(\phi_n) < \infty$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|DE_p(\phi_n)\|_{H^{-1}} = 0$ .

En général, les suites de Palais-Smale peuvent ne pas converger dans l'espace d'énergie, mais plutôt converger vers une superposition d'un nombre fini de kinks, séparés par des distances convergeant vers  $\infty$ . On pourrait dire dans ce cas qu'une suite converge vers un « point critique à l'infini », correspondant à un certain nombre de kinks qui s'éloignent les uns des autres. Par exemple, soit  $\mathbf{H}_{(2)}$  le point critique à l'infini correspondant à un antikink et un kink, séparés par une grande distance. Je peux définir la distance d'un état  $\phi_0 = (\phi_0, \dot{\phi}_0)$  à cet état idéal par

$$\|\phi_0 - \mathbf{H}_{(2)}\|_{H^1 \times L^2} := \inf_{\xi_1 < \xi_2} \left( (\xi_2 - \xi_1)^{-1} + \|\phi_0 - (1 - H(\cdot - \xi_1) + H(\cdot - \xi_2))\|_{H^1} + \|\dot{\phi}_0\|_{L^2} \right).$$

Soit  $\mathcal{M}_s := \{\phi_{(2)}(t_0, \cdot - \xi_0) : t_0 \gg 1, \xi_0 \in \mathbb{R}\}$ . C'est une variété de dimension 2, invariante par le flot de (CS) pour les temps positifs. Le Théorème 1 peut être reformulé ainsi :

$$\phi \text{ solution de (CS) et } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - \mathbf{H}_{(2)}\|_{H^1 \times L^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(t) \in \mathcal{M}_s \text{ pour } t \text{ suffisamment grand,}$$

donc  $\mathcal{M}_s$  est la *variété stable* de  $\mathbf{H}_{(2)}$ .

Les paires kink-antikink sont instables : si la donnée initiale est à une petite distance de  $\mathcal{M}_s$ , mais pas exactement sur  $\mathcal{M}_s$ , alors en général la solution correspondante s'éloigne de  $\mathcal{M}_s$ . Un tel comportement est attendu et arrive toujours lorsqu'on étudie une variété stable, dont le rôle est plutôt d'indiquer le comportement universel des solutions qui *entrent* dans un petit voisinage de l'état stationnaire étudié. (De manière équivalente, en inversant la direction du temps, le comportement des solutions qui sortent d'un petit voisinage de l'état stationnaire). Dans le cas des paires kink-antikink,  $\mathcal{M}_s$  joue le même rôle, et c'est ce qu'énonce le résultat qui suit.

**Proposition 2.16** (en préparation). *Soit  $\eta > 0$  suffisamment petit. Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  ayant la propriété suivante. Soit  $\phi$  une solution de (CS) telle que  $\|\phi(t_0) - \mathbf{H}_{(2)}\|_{\mathcal{E}} \leq \delta$  pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}$ , et posons  $t_- := \inf\{t : \|\phi(\tau) - \mathbf{H}_{(2)}\|_{H^1 \times L^2} \leq \eta \text{ pour tout } \tau \in [t, t_0]\}$ . Si  $t_- > -\infty$ , alors  $\text{dist}_{H^1 \times L^2}(\phi(t_-), \mathcal{M}_s) \leq \epsilon$ .  $\square$*

En d'autres termes, une solution qui entre dans un voisinage du point critique à l'infini, est nécessairement proche de  $\mathcal{M}_s$  quand elle est encore loin de  $\mathbf{H}_{(2)}$ .

**Remarque 2.17.** Dans le contexte des équation dispersives, des observations similaires ont joué un rôle dans l'étude des variétés invariantes des états fondamentaux pour différents équations des ondes non linéaires dans [17, 18, 9, 10].

## References

- [1] S. Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [2] J.-M. Delort. Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(1):1–61, 2001.
- [3] S. Gustafson et I. M. Sigal. Effective dynamics of magnetic vortices. *Adv. Math.*, 199:448–498, 2006.
- [4] J. Jendrej. Construction of two-bubble solutions for the energy-critical NLS. *Anal. PDE*, 10(8):1923–1959, 2017.
- [5] J. Jendrej. Nonexistence of radial two-bubbles with opposite signs for the energy-critical wave equation. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, XVIII:1–44, 2018.
- [6] J. Jendrej. Construction of two-bubble solutions for energy-critical wave equations. *Amer. J. Math.*, 141(1):55–118, 2019.
- [7] J. Jendrej, M. Kowalczyk, et A. Lawrie. Dynamics of strongly interacting kink-antikink pairs for scalar fields on a line. *Prépublication*, arXiv:1911.02064, 2019.
- [8] M. Kowalczyk, Y. Martel, et C. Muñoz. Kink dynamics in the  $\phi^4$  model: asymptotic stability for odd perturbations in the energy space. *J. Amer. Math. Soc.*, 30(3):769–798, 2017.
- [9] J. Krieger, K. Nakanishi, et W. Schlag. Global dynamics away from the ground state for the energy-critical nonlinear wave equation. *Amer. J. Math.*, 135(4):935–965, 2013.
- [10] J. Krieger, K. Nakanishi, et W. Schlag. Center-stable manifold of the ground state in the energy space for the critical wave equation. *Math. Ann.*, 361(1–2):1–50, 2015.
- [11] Y. Martel. Asymptotic  $N$ -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations. *Amer. J. Math.*, 127(5):1103–1140, 2005.

- [12] Y. Martel, F. Merle, et T.-P. Tsai. Stability and asymptotic stability for subcritical gKdV equations. *Comm. Math. Phys.*, 231:347–373, 2002.
- [13] Y. Martel, F. Merle, et T.-P. Tsai. Stability in  $H^1$  of the sum of  $K$  solitary waves for some nonlinear schrödinger equations. *Duke Math. J.*, 133(3):405–466, 06 2006.
- [14] Y. Martel et P. Raphaël. Strongly interacting blow up bubbles for the mass critical NLS. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 51(3):701–737, 2018.
- [15] F. Merle. Determination of minimal blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power. *Duke Math. J.*, 69(2):427–454, 1993.
- [16] F. Merle et H. Zaag. Isolatedness of characteristic points at blowup for a 1-dimensional semilinear wave equation. *Duke Math. J.*, 161(15):2837–2908, 2012.
- [17] K. Nakanishi et W. Schlag. Global dynamics above the ground state energy for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation. *J. Differential Equations*, 250(5):2299–2333, 2011.
- [18] K. Nakanishi et W. Schlag. Global dynamics above the ground state for the nonlinear Klein-Gordon equation without a radial assumption. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 203(3):809–851, 2011.
- [19] T. V. Nguyen. Strongly interacting multi-solitons with logarithmic relative distance for the gKdV equation. *Nonlinearity*, 30(12):4614–4648, 2017.
- [20] T. V. Nguyen. Existence of multi-solitary waves with logarithmic relative distances for the NLS equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 357(1):13–58, 2019.
- [21] P. Raphaël et J. Szeftel. Existence and uniqueness of minimal mass blow up solutions to an inhomogeneous  $L^2$ -critical NLS. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(2):471–546, 2011.
- [22] M. Wadati et K. Ohkuma. Multiple-pole solutions of modified Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 51:2029–2035, 1982.