Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2011-2012

Patrick Gérard et Sandrine Grellier

Problème spectral inverse et équation de Szegö cubique

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2011-2012), Exposé n° XV, 11 p.

<http://slsedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2011-2012____A15_0>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
http://www.ihes.fr/

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR 7640 CNRS/École polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX
http://www.math.polytechnique.fr/

Séminaire Laurent-Schwartz — EDP et applications
Institut des hautes études scientifiques, 2011-2012
Exposé n° XV, 1-11

PROBLÈME SPECTRAL INVERSE ET ÉQUATION DE SZEGÖ CUBIQUE

par

Patrick Gérard & Sandrine Grellier

1. Introduction

Dans un exposé précédent [**1**], nous avons justifié l'introduction de l'équation de Szegö cubique comme cas modèle d'équation de type Schrödinger sans dispersion. Ce cas modèle s'est révélé être intéressant sous divers aspects [**2**]. Dans cet exposé, nous nous attacherons à montrer comment la complète intégrabilité de l'équation de Szegö cubique permet de résoudre un problème spectral inverse pour les opérateurs de Hankel. Nous renvoyons pour plus de détails à l'article [**3**]. Des résultats plus récents feront l'objet d'un article en cours de rédaction [**4**].

1.1. Opérateurs de Hankel. — Rappelons la définition d'un opérateur de Hankel. Soit $c = (c_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, on définit formellement l'opérateur de Hankel Γ_c de symbole c par

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)\ ,\ \Gamma_c(x)_n = \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p}x_p\ .$$

Autrement dit, l'opérateur de Hankel est l'opérateur dont la "matrice infinie" est constante sur les anti-diagonales, la j-ème anti-diagonale comportant le $(j-1)$-ème coefficient c_{j-1} du symbole.

Il est bien connu que la régularité de Γ_c se lit sur la régularité de son symbole c ou bien sur la série formelle $u = u_c$ associée à c en posant $u(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n$.

Rappelons les résultats suivants bien connus.

1. Γ_c est de rang fini si et seulement si u est une fraction rationnelle (Kronecker 1881, [**6**]).
2. Γ_c est un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement si il existe $f \in L^\infty(\mathbb{T})$; $c_n = \hat{f}(n), n \geq 0$ (Nehari 1957 [**9**]), ou bien de manière équivalente si et seulement si $u \in BMO(\mathbb{T})$.
3. Γ_c est un opérateur compact si et seulement si il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$; $c_n = \hat{f}(n), n \geq 0$ (Hartman 1958 [**5**]) ou bien de manière équivalente si et seulement si $u \in VMO(\mathbb{T})$.
4. Γ_c est un opérateur de Hilbert–Schmidt si et seulement si u appartient à l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{T})$ (i.e. $\sum_n (n+1)|c_n|^2 < \infty$).
5. Γ_c appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, $0 < p < \infty$ si et seulement si u appartient à la classe de Besov $B^{1/p}_{p,p}(\mathbb{T})$ (Peller [**10**], Semmes [**12**]).

Les opérateurs de Hankel apparaissent naturellement en théorie du contrôle. En effet, si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel, A est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ et b et c deux vecteurs fixés dans $\mathcal{H}$, on considère le système dynamique

$$z_{k+1} = Az_k + u_k b, \quad y_k = (c, z_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où $z_k \in \mathcal{H}$, $u_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$.

Le vecteur (u_k) est appelé *signal d'entrée*. Il est supposé à support dans $\{k \in \mathbb{Z},\ k < 0\}$. De plus, on suppose $z_k \to 0$ pour $k \to -\infty$. Le *signal de sortie* pour $n \geq 0$ est alors donné par

$$y_n = \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p = (\Gamma_c(x))_n, \quad \text{où } x = (x_p := u_{-p-1})_p \text{ et } c_n := (c, A^n b) \in \mathbb{R}.$$

L'opérateur Γ_c admet donc une valeur propre λ s'il existe un signal d'entrée u non nul engendrant un signal de sortie y de la forme

$$y_n = \lambda u_{-n-1}\ ,\ n \geq 0\ ,$$

c'est-à-dire proportionnel au signal déduit du signal d'entrée après une réflexion par rapport à l'origine et un décalage. Il est tout aussi naturel de considérer l'équation

$$y_n = \mu u_{-n}\ ,\ n \geq 1\ ,$$

qui traduit le fait que μ est valeur propre de l'opérateur de Hankel de symbole $(c_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}_+}$, que nous appellerons ci-dessous opérateur de Hankel décalé. Dans cet exposé, on montre que, sous certaines conditions, la donnée de toutes les valeurs propres non nulles λ et μ détermine le symbole c. En outre, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante portant sur l'ensemble des valeurs propres non nulles λ et μ assurant que l'ensemble des signaux de sortie soit dense.

1.2. Théorème spectral inverse pour les opérateurs de Hankel. — On se place dans le cadre d'un opérateur de Hankel compact et autoadjoint. On ordonne les valeurs propres de sorte que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_j| \geq \cdots \to 0.$$

Une question naturelle est alors de se demander si, étant donnée une suite

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_j| \geq \cdots \to 0$$

il existe un opérateur de Hankel auto-adjoint et compact ayant cette suite de valeurs propres.

Une réponse positive découle du théorème suivant.

Théorème 1. — *(Megretskii, Peller, Treil (1995)) Soit Γ un opérateur compact et auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. Alors Γ est unitairement équivalent à un opérateur de Hankel si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *Soit* $\ker(\Gamma) = \{0\}$ *ou* $\dim\ker(\Gamma) = \infty$ *;*
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*,* $|\dim\ker(\Gamma - \lambda I) - \dim\ker(\Gamma + \lambda I)| \leq 1$.

Une conséquence de ce résultat est que, si l'on suppose toutes les valeurs absolues des valeurs propres distinctes, autrement dit si l'on suppose que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_j| > \cdots \to 0$$

alors il existe un opérateur de Hankel auto-adjoint ayant cette suite de valeurs propres. Il existe en fait un grand nombre de symboles solutions de ce problème spectral inverse. Dans ce travail, nous allons ajouter des contraintes spectrales du même type sur un autre opérateur de Hankel (l'opérateur de Hankel décalé) afin d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité.

1.3. L'opérateur de Hankel décalé. — Si S désigne l'opérateur de décalage

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

alors une propriété fondamentale des opérateurs de Hankel s'écrit

$$\Gamma_c S = S^* \Gamma_c. \tag{1}$$

On vérifie facilement que cet opérateur est l'opérateur de Hankel de symbole $\tilde{c}$ donné par

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \ , \ \tilde{c}_n := c_{n+1} \ .$$

Supposons en outre c réel et u_c dans $VMO(\mathbb{T})$ de sorte que Γ_c et $\Gamma_{\tilde{c}}$ sont auto-adjoints et compacts.

La propriété (1) entraîne

$$\Gamma_{\tilde{c}}^2 = \Gamma_c S S^* \Gamma_c = \Gamma_c^2 - (\cdot|c)c.$$

En utilisant cette formule ainsi que la formule du min-max, on obtient facilement que les valeurs propres non nulles $(\mu_j)_{j\geq 1}$ de l'opérateur $\Gamma_{\tilde{c}}$ satisfont à

$$|\lambda_1| \geq |\mu_1| \geq |\lambda_2| \geq |\mu_2| \geq \dots . \tag{2}$$

Si l'on munit $VMO(\mathbb{T})$ de la norme de l'opérateur de Hankel correspondant, les inégalités strictes dans (2) définissent un G_δ-dense dans $VMO(\mathbb{T})$ que nous noterons VMO_{gen}. Notre résultat principal (*cf.* [**4**]) s'énonce alors comme suit.

Théorème 2. — *Soient $(\lambda_j)_{j\geq 1}$, $(\mu_j)_{j\geq 1}$ deux suites de nombres réels satisfaisant*

$$|\lambda_1| > |\mu_1| > |\lambda_2| > |\mu_2| > \dots > |\lambda_j| > |\mu_j| \cdots \to 0 \ .$$

Alors il existe une unique suite de nombres réels $c = (c_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_c \in VMO(\mathbb{T})$ et telle que les valeurs propres non nulles de Γ_c soient les λ_j et les valeurs propres non nulles de $\Gamma_{\tilde{c}}$ soient les μ_j. De plus, le noyau de Γ_c est réduit à zéro si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_j^2}{\lambda_j^2}\right) = \infty, \ \ \sup_N \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\mu_j^2}{\lambda_j^2} = \infty.$$

Remarque 1. — *On obtient aussi une formule explicite pour la suite c. On note*

$$\begin{aligned}
\nu_k^2 &:= \left(1 - \frac{\mu_k^2}{\lambda_k^2}\right) \prod_{j\neq k} \frac{\mu_k^2 - \lambda_j^2}{\lambda_k^2 - \lambda_j^2} \\
\kappa_m^2 &:= (\lambda_m^2 - \mu_m^2) \prod_{j\neq m} \frac{\mu_m^2 - \lambda_j^2}{\mu_m^2 - \mu_j^2} \\
\delta_{km} &:= \lambda_k^2 - \mu_m^2.
\end{aligned}$$

alors la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ est donnée par

$$c_n = \sum_{\substack{k_0, k_1, \dots, k_n \\ m_1, \dots, m_n}} \frac{(\lambda_{k_0}\nu_{k_0}^2)\dots(\lambda_{k_n}\nu_{k_n}^2)(\mu_{m_1}\kappa_{m_1}^2)\dots(\mu_{m_n}\kappa_{m_n}^2)}{\delta_{k_0 m_1}\delta_{k_1 m_1}\delta_{k_1 m_2}\delta_{k_2 m_2}\dots\delta_{k_{n-1}m_{n-1}}\delta_{k_{n-1}m_n}\delta_{k_n m_n}}.$$

Au vu de cette formule explicite il semble illusoire de calculer directement les valeurs propres de Γ_c et de $\Gamma_{\tilde{c}}$. La démonstration est très différente, et n'utilise la formule explicite que pour établir l'unicité de la suite $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Ce théorème est en fait un cas particulier d'un résultat plus général concernant les valeurs singulières d'opérateurs de Hankel compacts non nécessairement auto-adjoints, en lien avec les variables action angle d'un système complètement intégrable.

2. Lien avec l'équation de Szegö cubique

2.1. Complexification et équation de Szegö cubique. — On identifie l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ avec l'espace de Hardy du tore défini par

$$L^2_+(\mathbb{T}) = \{u \ :\ u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta} \ ,\ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \ \}.$$

Le projecteur de Szegö est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sur l'espace de Hardy $L^2_+(\mathbb{T})$. Pour tout $u \in BMO(\mathbb{T})$, on définit un opérateur *anti-linéaire* H_u sur $L^2_+(\mathbb{T})$ par

$$H_u(h) = \Pi(u\overline{h}),\ h \in L^2_+.$$

Côté coefficients de Fourier, on retrouve l'opérateur de Hankel Γ_c par la formule suivante :

$$\widehat{H_u(h)}(n) = \Gamma_c(\overline{(\hat{h}(n))})\ ,\ c_n := \hat{u}(n)\ .$$

Pour cette raison, on appellera encore H_u opérateur de Hankel de symbole u. On remarque que H_u vérifie l'identité

$$(h_1|H_u(h_2)) = (h_2, H_u(h_1))\ .$$

Si l'on définit l'adjoint d'un opérateur anti-linéaire T par la formule $(h_1|T(h_2)) = (h_2|T^*(h_1))$, on constate donc que tous les opérateurs H_u sont auto-adjoints en ce sens.

Les opérateurs de Hankel jouent un rôle primordial dans l'équation de Szegö cubique introduite dans [**2**], qui s'écrit

$$(S) \quad i\partial_t u(z) = \Pi(|u|^2 u)(z),\ z \in \mathbb{T}.$$

On peut voir cette équation comme un système hamiltonien sur $L^2_+(\mathbb{T})$ muni de la forme symplectique

$$\omega(u,v) = \operatorname{Im}(u|v)\ ,\ (u|v) := \int_{\mathbb{T}} u\overline{v}\,\frac{d\theta}{2\pi}\ ,$$

L'équation de Szegö cubique est alors le système hamiltonien associé à la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}} |u|^4\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Par invariance par translation et rotation de cette fonctionnelle, on dispose de deux autres lois de conservation,

$$Q(u) = \int_{\mathbb{T}} |u|^2\,\frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{L^2},\ \text{ et } M(u) = \int_{\mathbb{T}} -i\partial_\theta u\,\overline{u}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \|u\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\ .$$

En particulier, la norme de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{T})$ donnée par

$$\|u\|^2_{H^{1/2}} = Q(u) + M(u)$$

est conservée. La définition du flot pour l'équation (S) s'en déduit (voir [**2**]).

Théorème 3. — *Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(\mathbb{T})$,il existe une unique solution faible $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(\mathbb{T}))$ de (S) qui satisfait $u(0) = u_0$. De plus, si $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$ pour un certain $s > \frac{1}{2}$, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^s_+(\mathbb{T}))$.*

Nous allons voir que l'équation de Szegö cubique se distingue par l'existence d'une double paire de Lax liée aux opérateurs de Hankel. Pour cela, introduisons les opérateurs de Toeplitz T_v donné par

$$T_v(f) = \Pi(vf), \quad v \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

On remarque alors que l'opérateur de Hankel décalé considéré précédemment s'identifie à $K_u = H_u T_z$, l'opérateur de Toeplitz de symbole $z \mapsto z$ correspondant à l'opérateur de décalage sur les coefficients de Fourier.

On a alors le résultat suivant ([**2**] Théorème 8.1. et [**3**] corollaire 8).

Théorème 4. — *L'équation de Szegö cubique* (S) *implique* $\dfrac{d}{dt}H_u = [B_u, H_u]$ *ou encore* $\dfrac{d}{dt}K_u = [C_u, K_u]$*. Ici, les opérateurs* $B_u = \frac{i}{2}H_u^2 - iT_{|u|^2}$*, et* $C_u = \frac{i}{2}K_u^2 - iT_{|u|^2}$ *sont des opérateurs linéaires anti-adjoints.*

En particulier, $H_{u(t)}$ *et* $K_{u(t)}$ *sont isospectraux à* H_{u_0} *et à* K_{u_0} *respectivement.*

On dit que (H_u, B_u) et (K_u, C_u) sont des paires de Lax pour l'équation (S). On connaît peu d'équations admettant une paire de Lax. Deux exemples provenant de la physique sont bien connus : l'équation Korteweg-de Vries (Lax, 1968 [**7**]), et l'équation de Schrödinger non linéaire cubique 1D (Zakharov-Shabat,1972 [**13**]). Le point clé pour l'établissement de la première paire de Lax – celle avec H_u –repose sur l'établissement de la formule suivante :

$$H_{|u|^2u} = T_{|u|^2}H_u + H_u T_{|u|^2} - H_u^3.$$

La seconde paire de Lax découle de la première en utilisant que $K_u = H_u T_z$. L'existence de paires de Lax se traduit sur les solutions par la propriété que les opérateurs H_u et K_u sont isospectraux à H_{u_0} et à K_{u_0} respectivement. En effet, considérons l'équation $\dfrac{d}{dt}U = B_u U$, $U(0) = I$, bien défini pour $u \in H^s(\mathbb{T})$, $s > 1/2$. Alors, l'anti-symétrie de l'opérateur B_u entraîne que $U(t)$ est un opérateur unitaire et la paire de Lax assure que

$$U(t)^* H_{u(t)} U(t) = H_{u_0}.$$

On peut faire le raisonnement analogue avec l'autre paire de Lax et conclure que les spectres de H_u et de K_u sont invariants par le flot de Szegö cubique. En particulier, l'équation de Szegö cubique admet une infinité de lois de conservation. On retrouve par exemple que la norme $H^{1/2}(\mathbb{T})$ est conservée en constatant que $Tr(H_u^2) = M(u) + Q(u)$.

Comme corollaire immédiat, les ensembles $\mathcal{V}(2N) = \{u, \text{ rang}(H_u) = N, \text{ rang}(K_u) = N\}$ et $\mathcal{V}(2N-1) = \{u, \text{ rang}(H_u) = N, \text{ rang}(K_u) = N-1\}$ sont invariants par le flot. Par ailleurs, par le théorème de Kronecker, ces ensembles sont des sous-variétés complexes de dimensions complexes $2N$ et $2N-1$ respectivement. Nous allons montrer que l'équation de Szegö cubique est complètement intégrable en construisant des coordonnées action-angle sur ces variétés. Cette construction est faite dans [**3**].

2.2. Coordonnées action-angle. — On suppose $u \in \mathcal{V}(2N)$ pour simplifier (le cas $\mathcal{V}(2N-1)$ se traite de manière analogue). Nous avons déjà souligné le fait qu'une propriété fondamentale des opérateurs de Hankel était son action sur le décalage que l'on peut traduire par $H_u T_z = T_z^* H_u$. Cela entraîne en particulier que

$$K_u^2 = H_u^2 - (\cdot|u)u.$$

Remarquons aussi que si $(\rho_j)_{1\le j\le N}$ désigne les valeurs singulières de H_u numérotées en ordre décroissant, les $(\rho_j^2)_{1\le j\le N}$ sont les valeurs propres non nulles de H_u^2. De même, si $(\sigma_j)_{1\le j\le N}$ désigne la suite des valeurs singulières de K_u numérotées par ordre décroissant, les $(\sigma_j^2)_{1\le j\le N}$ sont les valeurs propres non nulles de K_u^2. Il découle de la formule précédente et de la formule du min-max que

$$\rho_1(u) \ge \sigma_1(u) \ge \rho_2(u) \ge \dots \ge \rho_N(u) \ge \sigma_N(u) > 0.$$

On considère l'ouvert dense de $\mathcal{V}(2N)$ donné par

$$\mathcal{V}(2N)_{\rm gen} := \mathcal{V}(2N) \cap \{\rho_1 > \sigma_1 > \rho_2 > \dots > \rho_N > \sigma_N\}.$$

C'est sur ce domaine que l'on construit les coordonnées action-angle. Nous venons de définir $2N$ actions, – la suite $(\rho_j)_{1\le j\le N}$ et la suite $(\sigma_j)_{1\le j\le N}$ – $\mathcal{V}(2N)$ étant une variété complexe de dimension $2N$, il reste à définir $2N$ angles. Par antilinéarité de H_u et de K_u, on peut montrer qu'il existe des vecteurs singuliers définis au signe près. Plus précisément, il existe une famille orthonormale $(e_j)_{1\le j\le N}$ de $\mathrm{Im}(H_u)$ et une famille orthonormale $(f_j)_{1\le j\le N}$ de $\mathrm{Im}(K_u)$, toutes deux définies au signe près, telles que :

$$H_u(e_j) = \rho_j(u)e_j,\ 1 \le j \le N;\ K_u(f_j) = \sigma_j(u)f_j,\ 1 \le j \le N.$$

De plus, sur $\mathcal{V}(2N)_{\rm gen}$, l'image de K_u coïncide avec l'image de H_u. Enfin, pour tout $1 \le j \le N$, $(1|e_j) \ne 0$ car sinon, on aurait $(u|e_j) = 0$ et, vu l'expression de K_u^2, ρ_j^2 serait une valeur propre non nulle de K_u^2 ce qui est exclus par hypothèse. De même, on a que, pour tout $1 \le j \le N$, $(u|f_j) \ne 0$. Ces remarques permettent de définir les quantités suivantes :

$$\varphi_j(u) := \arg(1|e_j)^2,\ \theta_j(u) := \arg(u|f_j)^2,\ 1 \le j \le N.$$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème principal de cet exposé (voir **[3]**).

Théorème 5. — *L'application $\chi_N : u \mapsto (\zeta_{2j-1} = \rho_j e^{-i\varphi_j}, \zeta_{2j} = \sigma_j e^{-i\theta_j})_{1\le j\le N}$ est un difféormorphisme symplectique de $(\mathcal{V}(2N)_{\rm gen}, \omega)$ sur le sous ensemble de $(\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N, \omega')$ donné par $\{(\zeta_j)_{1\le j\le 2N};\ |\zeta_1| > |\zeta_2| > \dots > |\zeta_{2N-1}| > |\zeta_{2N}| > 0\}$, où la forme symplectique ω' est la forme symplectique naturelle de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ donnée par*

$$\omega' = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{2N} d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j$$

ou encore

$$\omega' = \sum_{j=1}^{N} \rho_j d\rho_j \wedge d\varphi_j + \sigma_j d\sigma_j \wedge d\theta_j.$$

De plus, on a une formule explicite des coefficients de Fourier de u en fonction de $\chi_N(u)$. Notons

$$\begin{aligned} \nu_k^2 &:= \left(1 - \frac{\sigma_k^2}{\rho_k^2}\right)\prod_{j\ne k}\frac{\rho_k^2 - \sigma_j^2}{\rho_k^2 - \rho_j^2} \\ \kappa_m^2 &:= (\rho_m^2 - \sigma_m^2)\prod_{j\ne m}\frac{\sigma_m^2 - \rho_j^2}{\sigma_m^2 - \sigma_j^2} \\ \delta_{km} &:= \rho_k^2 - \sigma_m^2. \end{aligned}$$

alors, si $u = \sum c_n z^n$, on a

$$c_n = \sum_{\substack{k_0,k_1,\dots,k_n \\ m_1,\dots,m_n}} \frac{(\zeta_{2k_0-1}\nu_{k_0}^2)\dots(\zeta_{2k_n-1}\nu_{k_n}^2)(\zeta_{2m_1}\kappa_{m_1}^2)\dots(\zeta_{2m_n}\kappa_{m_n}^2)}{\delta_{k_0m_1}\delta_{k_1m_1}\delta_{k_1m_2}\delta_{k_2m_2}\dots\delta_{k_{n-1}m_{n-1}}\delta_{k_{n-1}m_n}\delta_{k_nm_n}}.$$

Le lien avec l'équation de Szegö cubique est le suivant :

Théorème 6. — *L'équation de Szegö cubique avec donnée initiale dans* $\mathcal{V}(2N)_{\mathrm{gen}}$

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u), \quad u(0,\cdot) = u_0, \quad u_0 \in \mathcal{V}(2N)_{\mathrm{gen}}.$$

est équivalente au système d'équations différentielles simples

$$i\dot{\zeta}_{2j-1} = \rho_j^2 \zeta_{2j-1}, \quad i\dot{\zeta}_{2j} = -\sigma_j^2 \zeta_{2j}, \quad 1 \le j \le N.$$

La démonstration de ce théorème consiste à calculer l'expression du champ hamiltonien associé à la fonction $E(u) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}} |u|^4 \frac{d\theta}{2\pi}$ exprimé dans le nouveau système de coordonnées. On montre facilement que $E(u) = \sum \rho_j^4(u) - \sigma_j^4(u)$, le résultat précédent en découle.

On remarque que, dans [**2**], on a établi que, pour $u \in \mathcal{V}(2N)$, si on écrit

$$u(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{1 - p_j z}$$

alors l'équation de Szegö cubique s'écrit comme un système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_j = \displaystyle\sum_k \frac{\alpha_j^2 \overline{\alpha_k}}{(1-p_j\overline{p}_k)^2} + 2\sum_k \sum_{\ell \neq j} \frac{\alpha_j \overline{\alpha_k} \alpha_\ell p_j}{(p_j - p_\ell)(1-p_j\overline{p}_k)} \\ i\dot{p}_j = \displaystyle\sum_k \frac{\alpha_j \overline{\alpha}_k}{1 - p_j\overline{p}_k} p_j. \end{cases}$$

Le théorème précédent permet d'obtenir la résolution explicite de cette classe de systèmes différentiels.

2.3. Extension à la dimension infinie. — On se propose à présent d'étendre le théorème 5 aux fonctions u correspondant aux opérateurs de Hankel H_u et K_u compacts.

On renvoie à [**4**] pour les détails.

Soit $u \in VMO(\mathbb{T})$, de sorte que H_u et K_u sont des opérateurs compacts. On considère la suite $(\rho_j^2(u))_{j\ge 1}$ des valeurs propres non nulles de H_u^2, et la suite $(\sigma_m^2(u))_{m\ge 1}$ des valeurs propres non nulles de K_u^2. On rappelle que VMO_{gen} désigne le sous-ensemble des fonctions u de $VMO(\mathbb{T})$ telles que $\rho_1 > \sigma_1 > \rho_2 > \cdots > \to 0$. Comme précédemment et pour les mêmes raisons, on peut définir, pour une suite (e_j) de vecteurs singuliers de H_u et pour une suite $(f_j)_{j\ge 1}$ de vecteurs singuliers de K_u, les angles $\varphi_j(u) := \arg(1|e_j)^2$, $\theta_j(u) := \arg(u|f_j)^2$, $j \ge 1$.

On note R l'image de H_u et

$$\Xi := \{(\zeta_j)_{j\ge 1}, ;\ |\zeta_1| > |\zeta_2| > |\zeta_3| > \cdots \to 0\}$$

Théorème 7. — *L'application*

$$\chi := u \mapsto (\zeta_{2j-1}(u) = \rho_j e^{-i\varphi_j}, \zeta_{2j}(u) = \sigma_j e^{-i\theta_j})_{j\ge 1}$$

est un homéomorphisme de VMO_{gen} *sur* Ξ*. De plus,* $\ker H_u$ *est réduit à zéro si et seulement si* $1 \in \overline{R} \setminus R$ *ou encore, de manière équivalente, si et seulement si*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sigma_j^2}{\rho_j^2}\right) = \infty, \quad \sup_N \frac{1}{\rho_{N+1}^2} \prod_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j^2}{\rho_j^2} = \infty.$$

De plus, on a une formule explicite de l'application inverse analogue à celle énoncée en dimension finie.

En fait, l'application χ n'est pas différentiable au sens usuel mais elle est faiblement différentiable au sens suivant. Si on considère l'application X_N à valeurs dans l'ensemble $\{(\zeta_j)_{1\le j\le 2N},\ |\zeta_1| > \zeta_2| > \cdots > |\zeta_{2N}| > 0\}$ alors X_N s'étend à un ouvert de $VMO(\mathbb{T})$ en une application différentiable et telle que l'image de la forme symplectique ω soit donnée par

$$(X_N)_*\omega = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{2N} d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta_j}.$$

Ce théorème a pour conséquence le théorème 2. En effet, soient (λ_j) et (μ_j) deux suites de nombres réels ordonnées comme dans l'énoncé du théorème. On recherche une suite c à valeurs réelles telle que Γ_c et $\Gamma_{\tilde{c}}$ admettent ces deux suites comme valeurs propres non nulles. La suite c étant à valeurs réelles, il est clair que les opérateurs H_{u_c} et K_{u_c} s'identifient côté Fourier respectivement à Γ_c et $\Gamma_{\tilde{c}}$. On s'intéresse donc aux fonctions $u = u_c$ à coefficients de Fourier réels tels que $|\zeta_{2j-1}(u)| = |\lambda_j|$ et $|\zeta_{2j}(u)| = |\mu_j|$. Le caractère réel des coefficients de Fourier impose que les angles $\varphi_j(u)$ et $\theta_j(u)$ valent soit 0 soit π. Pour un tel u, les valeurs propres non nulles de H_u et de K_u ont pour valeurs absolues respectivement les $|\lambda_j|$ et les $|\mu_j|$. Le signe de chaque valeur propre fixe le choix de chaque angle à 0 ou à π et entraîne l'unicité du symbole $u = u_c$ et ainsi l'unicité de c.

Le théorème 7 permet en outre de résoudre l'équation de Szegö cubique pour des données de Cauchy dans $VMO_{\rm gen}$. Dans un travail en cours en collaboration avec H. Koch, nous étendons la résolution à des données de Cauchy $BMO(\mathbb{T})$ par un argument utilisant la continuité L^2 des commutateurs de Π avec un multiplicateur dans $BMO(\mathbb{T})$.

3. Eléments de démonstration

Nous allons maintenant donner quelques éléments de démonstration des théorèmes 5 et 7. Les démonstrations détaillées se trouvent dans [**3**] et [**4**]. Un élément clé est l'utilisation de la fonctionnelle

$$J(x) = ((I - xH_u^2)^{-1}(1)|1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n J_{2n}(u),\quad J_{2n}(u) = (H_u^{2n}(1)|1)$$

qui établit un lien entre les valeurs singulières de H_u et les valeurs singulières de K_u. On a le lemme suivant.

Lemme 1. —

$$J(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - x\sigma_j^2(u)}{1 - x\rho_j^2(u)} = 1 + x\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j^2(u)\nu_j^2}{1 - x\rho_j^2(u)},\ x \notin \left\{\frac{1}{\rho_j^2(u)}\right\}_{j\ge 1}.$$

Ici $\nu_j := |(1|e_j)|$.

$$\textit{En particulier, } \nu_j^2 = \left(1 - \frac{\sigma_j^2}{\rho_j^2}\right)\prod_{k\ne j}\left(\frac{\rho_j^2 - \sigma_k^2}{\rho_j^2 - \rho_k^2}\right)$$

Ce lemme découle de calculs élémentaires sur la trace de $(I - xH_u^2)^{-1} - (I - xK_u^2)^{-1}$.

Le second point important dans la construction des coordonnées action-angles est d'exploiter l'action des opérateurs de Hankel sur le décalage.

Pour $u \in \mathcal{V}(2N)_{\text{gen}}$, on introduit l'opérateur de décalage compressé $S = P_u T_z$ où P_u désigne le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(H_u) = \mathrm{Ker}(H_u)^\perp$. Avec ces notations, on a $K_u = H_u S$.

Les opérateurs de Hankel sont tels que $\ker H_u$ est stable par T_z, en particulier on a $S = P_u T_z P_u$. Ces propriétés nous permettent de retrouver l'expression de u connaissant l'action de S sur $\mathrm{Im}(H_u)$. En effet, on écrit

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(u|z^n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(u|T_z^n(1))z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(u|P_u T_z^n(1))z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(u|S^n P_u(1))z^n. \end{aligned}$$

Pour résumer, on a montré que $u(z) = (u|(I - \overline{z}S)^{-1}P_u(1))$ au moins lorsque $|z| < 1$. Cette formule nous permet d'établir une formule explicite de u en fonction de $\chi(u)$. Pour cela, il suffit de connaître l'action de l'opérateur S sur une base de $\mathrm{Im}(H_u)$. Une première étape est de faire l'analyse spectrale de S.

Lemme 2. — *Notons pour $1 \leq m \leq N$, $g_m = (H_u^2 - \sigma_m^2 I)^{-1}(u)$. Alors la famille $(g_m)_{1\leq m\leq N}$ forme une famille orthogonale de $\mathrm{Im}(H_u)$ et satisfait*

$$S(g_m) = \sigma_m e^{i\theta_m} h_m \text{ où } h_m = (H_u^2 - \sigma_m^2 I)^{-1}(1), \ \ 1 \leq m \leq N.$$

Ce lemme permet, en écrivant tous les éléments dans la base $(e_j)_{1\leq j\leq N}$ de $\mathrm{Im}(H_u)$, d'obtenir pour $(\zeta_j)_{1\leq j\leq 2N}$, la formule donnée dans le théorème 5. En particulier, cela établit que χ_N est injectif.

Afin de démontrer la surjectivité, on démontre que χ_N est une application propre et ouverte, à valeurs dans un ensemble connexe, ce qui entraîne la surjectivité. Pour établir que l'application est propre, on utilise un résultat de compacité. On l'énonce ici dans le cadre $VMO(\mathbb{T})$ car on l'utilise à nouveau pour étendre le théorème 5 au théorème 7. La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans [**4**].

Lemme 3. — *Soit (u_p) une suite de $VMO(\mathbb{T})$ qui converge faiblement vers u. On suppose que*

$$\sup_{j\geq 1} |\rho_j(u_p) - \overline{\rho}_j| \to 0; \ \sup_{m\geq 1} |\sigma_m(u_p) - \overline{\sigma}_m| \to 0$$

et que les $\overline{\rho_j}$ et les $\overline{\sigma_m}$ non nuls sont tous distincts. Alors, pour tout j, m, on a

$$\overline{\rho}_j = \rho_j(u) \text{ et } \overline{\sigma}_m = \sigma_m(u)$$

et la convergence est forte.

Le point clé de la démonstration de ce lemme est l'utilisation de la fonctionnelle $J(x)$ qui permet d'identifier les valeurs singulières de H_u et de K_u. Ce lemme est faux si on autorise de la multiplicité.

Le fait que χ_N est ouverte découle du théorème des fonctions implicites. Comme χ_N est différentiable et à valeurs dans un espace de dimension finie, il suffit de démontrer que sa différentielle est de rang maximal, ou encore que les différentielles partielles $d\zeta_j(u)$ sont libres. On démontre pour cela des identités sur les crochets de Poisson entre les variables actions et angles. Rappelons quelques notations.

Pour une application différentiable F définie sur une variété $\mathcal{M}$, rappelons que le champ hamiltonien X_F est le champ de vecteurs défini par

$$\forall m \in \mathcal{M}, \forall h \in T_m\mathcal{M}, dF(m).h = \omega(h, X_F(m)) \ ,$$

et que le crochet de Poisson des fonctions F et G est la fonction

$$\{F,G\} = dG.X_F = \omega(X_F, X_G) \ .$$

L'expression donnée dans le théorème 5 de l'image de la forme symplectique par χ_N

$$\omega' = \sum_j \rho_j d\rho_j \wedge d\varphi_j + \sigma_j d\sigma_j \wedge d\theta_j$$

impose en particulier les identités suivantes :

Proposition 1

$$\{\rho_j, \rho_k\} = \{\rho_j, \sigma_k\} = \{\sigma_j, \sigma_k\} = 0$$
$$\{\rho_j, \varphi_k\} = \rho_j^{-1}\delta_{jk},\ \{\sigma_j, \varphi_k\} = 0,\ \{\rho_j, \theta_k\} = 0,\ \{\sigma_j, \theta_k\} = \sigma_j^{-1}\delta_{jk}.$$

Ces propriétés entraînent que les différentielles partielles $d\zeta_j(u)$ sont libres et que χ_N établit donc un difféomorphisme local.

La démonstration des identités ci-dessus utilise la hiérarchie de Szegö établie dans [**3**], que nous rappelons sous forme résumée.

Théorème 8 **((P. Gérard- S.G. 2010)).** — *Le champ hamiltonien $X_{J(x)}$ de la fonctionnelle $J(x)$ est donné par*

$$X_{J(x)}(u) = \frac{x}{2i} w(x) H_u w(x),\ \ w(x) = (I - xH_u^2)^{-1}(1) \ .$$

L'équation $\partial_t u = X_{J(x)}(u)$ implique que

$$\partial_t H_u = [B_u^x, H_u] \ ,\ \textit{ainsi que}\ \partial_t K_u = [C_u^x, K_u]$$

où B_u^x et C_u^x sont deux opérateurs anti-adjoints.

De même que pour l'équation de Szegö cubique grâce à sa paire de Lax, ce théorème entraîne en particulier que les valeurs singulières de H_u et de K_u sont invariantes par le flot de $X_{J(x)}$, ce qui s'écrit

$$\{J(x), \rho_j\} = \{J(x), \sigma_m\} = 0$$

pour tout j, $1 \leq j \leq N$ et tout m, $1 \leq m \leq N$. En étudiant l'évolution des vecteurs e_j et f_m sous ce flot, on montre aussi que

$$\{J(x), \varphi_j\} = \frac{1}{2}\frac{xJ(x)}{1-\rho_j^2 x} \ ,\ \{J(x), \theta_m\} = -\frac{1}{2}\frac{xJ(x)}{1-\sigma_m^2 x} \ .$$

En utilisant l'identité

$$J(x) = \prod_{j=1}^N \frac{1-\sigma_j^2 x}{1-\rho_j^2 x} \ ,$$

la proposition résulte de l'identification des parties polaires dans la variable x. On réfère à [**3**] pour les détails.

Enfin, disons un mot de la caractérisation de $\ker H_u = \{0\}$. Montrons que $\ker H_u = \{0\}$ si et seulement si $1 \in \overline{R} \setminus R$.

Comme $\ker H_u = \{0\}$ est équivalent à $\overline{R} = L^2_+$, $\ker H_u = \{0\}$ entraîne $1 \in \overline{R}$. Si $1 \in R$, alors il existe $w \in \overline{R}$ tel que $1 = H_u(w)$ et on a alors $H_u(zw) = T_z^* H_u(w) = T_z^*(1) = 0$ et $\ker H_u$ est non nul.

Réciproquement, si $\ker H_u \neq \{0\}$ et $1 \in \overline{R}$, montrons que $1 \in R$. D'après le théorème de Beurling (voir par exemple [**11**]), $\ker H_u = \varphi L^2_+$ et comme $1 \in \overline{R}$, φ est orthogonal à 1 donc $\varphi = zw$ avec

$w \notin \ker H_u$ (sinon w serait divisible par φ). On en déduit que $H_u(w)$ est une constante non nulle et donc $1 \in R$. Il reste à remarquer que $1 \in \overline{R} \setminus R$ est équivalent aux conditions

$$\sum_j \nu_j^2 = 1 \text{ et } \sum_j \frac{\nu_j^2}{\rho_j^2} = \infty$$

ce qui compte tenu des formules du lemme 1 donnant $J(x)$ fournit les conditions annoncées sur les suites (σ_j) et (ρ_j).

Références

[1] Gérard, P., Grellier, S., *The cubic Szegö equation* , Séminaire X-EDP, 20 octobre 2008, Ecole polytechnique, Palaiseau.

[2] Gérard, P., Grellier, S., *The cubic Szegö equation* , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 43 (2010), 761-810.

[3] Gérard, P., Grellier, S., *Invariant Tori for the cubic Szegö equation*, ArXiv :1011.5479 à paraître dans Inventiones Mathematicae.

[4] Gérard, P., Grellier, S., *Spectral inverse problems for compact Hankel operators : an explicit resolution* En cours de rédaction.

[5] Hartman, P., *On completely continuous Hankel matrices,* Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 862–866.

[6] Kronecker, L. : *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraische Gleischungen* Montasber. Königl. Preussischen Akad. Wies. (Berlin), 535-600 (1881). Reprinted in *mathematische Werke*, vol. 2, 113–192, Chelsea, 1968.

[7] Lax, P. : *Integrals of Nonlinear equations of Evolution and Solitary Waves*, Comm. Pure and Applied Math. 21, 467-490 (1968).

[8] Megretskii, A V., Peller, V. V., and Treil, S. R., The inverse problem for self-adjoint Hankel operators, Acta Math. 174 (1995), 241-309.

[9] Nehari, Z. : *On bounded bilinear forms.* Ann. Math. 65, 153–162 (1957).

[10] Peller, V. V. : *Hankel operators of class $\mathfrak{S}_p$ and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majorization of operators*, Math. USSR Sb. 41, 443-479 (1982).

[11] Rudin, W. : *Real and Complex Analysis*, Mac Graw Hill, Second edition, 1980.

[12] Semmes, S., *Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces,* Integral Equations and Operator Theory 7 (1984), 241–281.

[13] Zakharov, V. E., Shabat, A. B. : *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media.* Soviet Physics JETP 34 (1972), no. 1, 62–69.

Patrick Gérard, Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628, France
E-mail : patrick.gerard@math.u-psud.fr

S. Grellier, MAPMO-UMR 6628, Département de Mathématiques, Université d'Orleans, 45067 Orléans Cedex 2, France • *E-mail :* Sandrine.Grellier@univ-orleans.fr