LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES
1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

6. Année 1938-1939
*Calcul des variations*

Jean Leray

# Valeurs critiques d'une fonctionnelle d'après la théorie de M.Morse

*Séminaire de mathématiques* (1938-1939), Exposé 6-J, 13 p.
<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1938-1939__6__J_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 24 avril 1939
Exposé 6-J, p. 1 à 13

# VALEURS CRITIQUES D'UNE FONCTIONNELLE D'APRÈS LA THÉORIE DE M.MORSE

par **Jean Leray**

## I.– Introduction

**1. Fonctionnelles.** M.Hadamard[1] a nommé « fonctionnelle » tout opérateur qui, à chaque point d'un espace abstrait donné, attache un nombre réel.

*Exemple.* Une intégrale du type $\displaystyle\int_C F(y', y, x)\,dx$ attache, à tout arc $C$, défini par une fonction $y(x)$ continument dérivable, un nombre réel : cette intégrale est donc une fonctionnelle, définie sur l'espace abstrait dont on nomme « point » chacun des arcs $C$.[2]

Le calcul des variations eut primitivement pour objets la recherche des minima absolus et relatifs d'une fonctionnelle et la recherche des points de l'espace abstrait en lesquels ces minima sont réalisés. La « variation première » de la fonctionnelle est nulle en ces points : ce fait s'exprime en disant que ces points sont « *critiques* » ou « stationnaires » ; il existe des points critiques en lesquels la fonctionnelle ne présente pas de minimum ; on fut rapidement conduit à les envisager. L'étude et la classification de *tous les points critiques* (et des valeurs dites *valeurs critiques*, prises par la fonctionnelle aux points critiques) ont été l'objet d'importants travaux modernes, dont 1/2
H.Poincaré fut l'inspirateur ; citons en particulier les travaux de MM.Birkhoff, Morse, Lusternik, Schnirelmann ;[3] cette conférence et les suivantes leur seront consacrées.[4]

**2. L'exemple des fonctions analytiques.** À certains égards les fonctionnelles les plus simples sont les fonctions analytiques réelles d'un nombre fini d'arguments réels.[5] Soit une telle fonction

$$f(x_1, x_2, \dots, x_\ell).$$

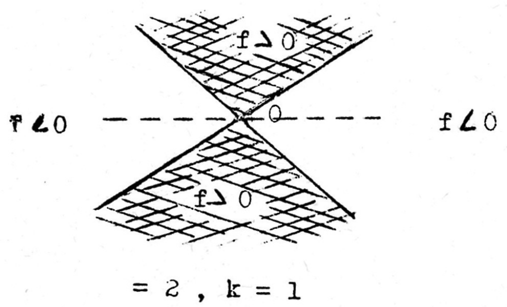
Envisageons l'un de ses points critiques, c'est-à-dire un point en lequel la différentielle de $f$ est identiquement nulle. Nous pouvons, *en général*,[6] par un changement de coordonnées, nous ramener aux conditions suivantes : le point critique étudié est l'origine 0 des coordonnées, la valeur critique est nulle et au voisinage de 0 nous avons le développement

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_\ell^2 + (\text{termes de degrés supérieurs à } 2).$$

Le nombre, $k$, des carrés négatifs du second membre est nommé *indice* du point critique. On classe les points critiques suivant leurs indices. Les points d'indice minimum, $k = 0$, sont les minima relatifs. Les points critiques d'indice maximum, $k = \ell$, sont
2/3 les maxima relatifs.

Par le point critique 0, d'indice $k$, que nous envisageons, nous pouvons tracer des morceaux de surfaces situés, sauf en 0, dans le domaine $f < 0$. Ces morceaux de surface ne peuvent pas avoir une dimension supérieure à $k$. Ceux qui ont une dimension inférieure à $k$ peuvent être déformés continûment, sans sortir de la région $f \leqslant 0$, en un morceau de la surface appartenant au domaine $f < 0$. Ceux qui ont la dimension $k$ ne peuvent être déformés de la sorte. Une chaîne à $k$ dimensions portée par un tel morceau de surface à $k$ dimensions sera nommée « *calotte à k dimensions* » ($k$-cap en anglais).

Fig.1




Le trait pointillé représente un[e] calotte

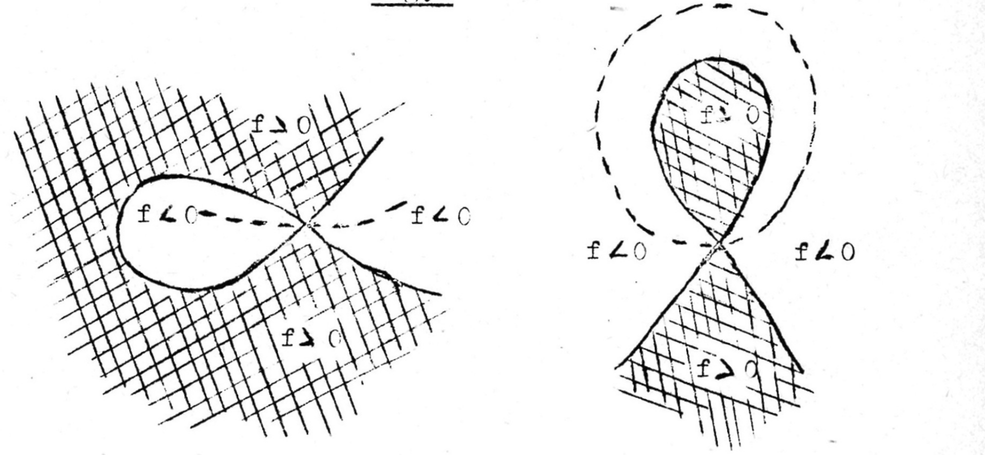
Une calotte $u$ sera dite *ouverte* (M.Morse dit : non-linkable) s'il n'existe pas dans
3/4 le domaine $f < 0$, de calotte $v$ telle que $u + v$ soit un cycle.

S'il existe une telle chaîne, nous remplacerons la chaîne $u$ par le cycle $u + v$ ; cette calotte sera dite *fermée* (linkable, cycle-cap).

Supposons qu'à la valeur critique 0 corresponde le seul point critique 0. Soit un paramètre $a$ ; envisageons les nombres de Betti (l.p.suiv.) [1][7] de l'ensemble des points en lesquels $f \leqslant a$ ; cherchons comment ces nombres de Betti varient quand $a$ traverse
4/5 en croissant la valeur 0. Il suffit, du moins dans les cas $\ell = 2$ et $\ell = 3$, d'examiner la

1. p. 4 Le $k^{\text{ième}}$ nombre de Betti d'un ensemble fermé est ma nombre maximal de cycles à $k$ dimensions qui appartiennent à cet ensemble et dont aucune combinaison linéaire n'est homologue à 0 dans cet ensemble.

Fig. 2




$\ell = 2$, $k = 1$ ;
le trait pointillé représente une calotte ouverte

$\ell = 2$, $k = 1$ ;
le trait pointillé représente une calotte fermée

figure. Les conclusions sont les suivantes :

1°) Supposons qu'au point 0 corresponde une *calotte ouverte*, à $k$ dimensions ; *le* $(k-1)^{ième}$ *nombre de Betti diminue de* 1 ; les autres nombres de Betti restent constants.

2°) Supposons qu'au point 0 corresponde une *calotte fermée*, à $k$ dimensions ; *le* $k^{ième}$ *nombre de Betti augmente de* 1 ; les autres nombres de Betti restent constants.

**3. Méthode suivie.** Le parg.2 montre, sur un exemple, qu'il existe des relatons entre les *notions* suivantes :

points et valeurs critiques, calottes (ouvertes et fermées)
nombres de Betti des régions $f \leqslant a$.

Notre but va être d'étendre aux fonctionnelles ces notions et ces relations.

Nous envisagerons des fonctionnelles d'une nature très générale ; nous y trouverons deux avantages : écarter des hypothèses surabondantes simplifie souvent le raisonnement ; une théorie est d'autant plus facile à appliquer qu'elle est basée sur des 5/6
hypothèses plus larges.

Nous savons ce que sont les nombres de Betti d'un ensemble abstrait fermé. La notion de calotte, étant une notion de topologie combinatoire, s'étend aisément à des fonctionnelles très générales. Cette *conférence-ci* étudiera les relations qui existent entre les calottes (ouvertes et fermées) et les nombres de Betti des ensembles $f \leqslant a$. Il ne sera pas même nécessaire de supposer la fonctionnelle $f$ différentiable ; nous la supposerons semi-continue (2) inférieurement. La *conférence suivante* définira les points critiques et établira les relations qui existent entre les calottes et les points critiques ; (on ne pourra pas, en général, définir les points critiques comme étant les points en lesquels la différentielle de $f$ est nulle, puisqu'on ne supposera pas l'existence de cette différentielle).[8]

Du point de vue auquel nous nous placerons aujourd'hui, la *fonctionnelle la plus*
6/7 *simple* est la fonctionnelle semi-continue inférieurement qui prend un nombre fini de valeurs ; le chapitre III est consacré à ce type de fonctionnelles. Soit en particulier une fonctionnelle semi-continue inférieurement, $f$, prenant deux valeurs : $c$ et $C$ $(c < C)$ ; soit $\Phi$ l'ensemble fermé sur lequel elle est définie ; soit $\varphi$ l'ensemble fermé sur lequel elle vaut $c$ $(\varphi \subset \Phi)$ ; l'étude de $f$ est équivalente à celle de $\varphi$ et $\Phi$. Le chapitre II va étudier deux tels ensembles fermés, $\varphi$ et $\Phi$ vérifiant $\varphi \subset \Phi$.

## II. Étude de deux ensembles fermés : $\varphi \subset \Phi$

Les raisonnements que nous allons exposer maintenant ne s'appuient pas, du point de vue logique, sur les considérations précédentes ; mais ils s'en inspirent.[9]

**4. Définition des calottes.** (Cf.définitions données au § 2) Soit une ensemble fermé abstrait $\Phi$ ; soit $\varphi$ un sous-ensemble fermé de $\Phi$. Nous désignerons par $k$*-calotte* (chez M.Morse, $k$-cap ; lire : calotte à $k$ dimensions) toute chaîne $u$ à $k$ dimensions qui possède les propriétés suivantes :

> $u$ appartient à $\Phi$ ; sa frontière $\dot{u}$ ou bien appartient à $\varphi$, ou bien est nulle ; $u$
> 7/8 n'est pas homologue (l.p.9) (3)[10] dans $\Phi$ à une chaîne de $\varphi$.

$N$ calottes sont dites *dépendantes* lorsqu'on peut en former une combinaison linéaire qui est homologue dans $\Phi$ à une chaîne de $\varphi$. Deux calottes dépendantes sont dites équivalentes l'une à l'autre ; deux calottes équivalentes à une même troisième sont
8/9 équivalentes entre elles.

Une calotte $u$ sera dite *ouverte* (non-linkable) si elle n'est pas équivalente à un cycle, c'est-à-dire s'il n'existe pas dans $\varphi$ de chaîne $v$ telle que $u + v$ soit un cycle de $\Phi$.

S'il existe une telle chaîne, la calotte $u$ équivaut à un cycle de $\Phi$ (cycle-cap) et est dite *fermée* (linkable).

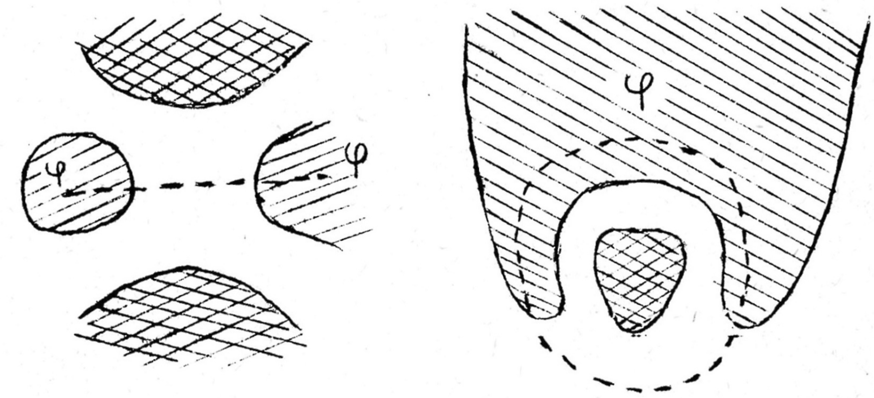
---

2. Une fonctionnelle $f$ est *semi-continue inférieurement* (ou supérieurement) si, quelle que soit la constante $a$, l'ensemble des points en lesquels $f \leqslant a$ (ou $f \geqslant a$) est un ensemble fermé. Une fonctionnelle est continue si, et seulement si elle est semi-continue à la fois inférieurement et supérieurement. Rappelons que la notion si importante de semi-continuité est dûe [sic] à *Baire*.

3. p.7 Nous disons que deux chaînes sont homologues dans $\Phi$ quand leur différence est un cycle homologue à 0 dans $\Phi$.

Fig.3

$\Phi$ est la région du plan complémentaire du domaine quadrillé; $\varphi$ est la région hachurée .(Les fig.2 et 3 se déduisent l'une de l'autre comme suit : soit c une constante positive,voisine de 0 ; $\Phi$ est l'ensemble $f \leq c$ , $\varphi$ est l'ensemble $f \leq -c$)




le trait pointillé représente une 1-calotte ouverte

le trait pointillé représen une 1-calotte fermée

**5. Relations entre nombres de Betti et nombres de calottes.** Notations : $k$cycle signifie : cycle à $k$ dimensions ; des cycles sont linéairement indépendants quand l'une de leurs combinaisons linéaires est homologue à 0 ; [11]

ind. signifie : indépendant ; nb. max. signifie : nombre maximum de.

Je dis que

(1) (nb.max.$k$-cycles de $\Phi$ ind.dans $\Phi$)

$$- (\text{nb.max. de } k\text{-cycles de } \varphi \text{ ind.dans } \Phi)$$
$$= (\text{nb.max.de } k\text{-calottes fermées});$$

en effet les deux membres de (1) sont égaux au nombre max. [de] $k$-cycles de $\Phi$ dont aucune combinaison linéaire n'est homologue à un $k$-cycle de $\varphi$. 9/10

Je dis que

(2) (nb.max.$k$-cycles de $\varphi$ ind.dans $\varphi$)

$$- (\text{nb.max. de } k\text{-cycles de } \varphi \text{ ind.dans } \Phi)$$
$$= (\text{nb.max. } (k+1)\text{-calottes fermées});$$

en effet les deux membres de (2) sont égaux au nombre max. [de] $k$-cycles de $\varphi$ qui sont ind. dans $\varphi$, chacun d'eux étant homologue à 0 dans $\Phi$.

Retranchons (1) et (2) membre à membre ; tenons compte de ce que les premiers termes de (1) et (2) sont les $k^{\text{ièmes}}$ nombres de Betti respectifs de $\Phi$ et de $\varphi$ ; il vient :

$$\begin{aligned}&(k^{\text{e}}\text{ nb.de Betti de }\Phi) - (k^{\text{e}}\text{ nb. de Betti de }\varphi)\\ &\qquad = (\text{nb.max.}k\text{-calottes fermées ind.}) - (\text{nb.max.}(k+1)\text{-calottes ouvertes ind.})\end{aligned}$$

(Cette relation est analogue aux deux propositions énoncées à la fin du § 2)

Introduisons le nombre suivant, qui interviendra ultérieurement dans le décompte des points critiques d'indice $k$ :
(nb.max.$k$-calottes ind.) =
(nb.max.$k$-calottes ine.ouvertes) + (nb.max.$k$-calottes ind. fermées)
il vient :

$$\begin{aligned}(3)\quad (\text{nb.max.}k\text{-calottes ind.}) &= (k^{\text{e}}\text{ nb.Betti de }\Phi)\\ &\quad - (k^{\text{e}}\text{ nb.Betti de }\varphi) + (\text{nb.max.}k\text{-calottes ouvertes ind.})\\ &\qquad + (\text{nb.max.}(k+1)\text{-calottes ouvertes ind.})\end{aligned}$$

10/11 la relation fondamentale (4) sera déduite de cette relation (3).

**6. Cycles ambigus.** La frontière d'une calotte ouverte sera nommée *cycle ambigu* ; nous dirons que cette calotte coiffe (to cap) ce cycle. $N$ cycles ambigus sont dits *dépendants* lorsque les calottes qui les coiffent sont dépendantes.

Ces définitions équivalent aux suivantes : Les *cycles ambigus* sont les cycles de $\varphi$ qui sont homologues à 0 dans $\Phi$ sans l'être dans $\varphi$. $N$ cycles ambigus sont dépendants lorsque l'une de leurs combinaisons linéaires est homologue à 0 dans $\varphi$.

La première définition des cycles ambigus dépendants prouve que
(nb.max.$k$-calottes ind.) = (nb.max.$(k-1)$-cycles ambigus ind.)
la relation (3) peut donc être mise sous la forme suivante :[12]

$$\begin{aligned}(4)\quad (\text{nb.max.}k\text{-calottes ind.}) &= (k^{\text{e}}\text{ nb.Betti de }\Phi) - (k^{\text{e}}\text{ nb.Betti de }\varphi)\\ &\quad + (\text{nb.max.}k\text{-cycles ambigus ind.})\\ &\qquad + (\text{nb.max.}(k-1)\text{-cycles ambigus ind.})\end{aligned}$$

(4) est la relation fondamentale de la théorie de M.Morse.

11/12 *Remarque 1.* On pourrait également fonder cette théorie sur la relation (3).

*Remarque 2.* Si $\varphi$ est vide, nous disons que tous ses nombres de Betti sont nuls, qu'il n'existe pas de cycle ambigu et la relation (4) reste vraie.

## III.– Fonctionnelle semi-continue inférieurement qui prend un nombre fini de valeurs

**Définitions.** Soit $f$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement [4] qui prend, sur son champ de définition, les seules valeurs $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ ; nous supposons $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Nous nommons $\Phi_i$ l'ensemble des points en lesquels $f \leqslant c_i$ ; les ensembles $\Phi_i$ sont fermés et vérifient les relations $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \cdots \subset \Phi_n$ (Le champ de définition de $f$ est donc $\Phi_n$ ; l'ensemble des points en lesquels $f = c_i$ est $\Phi_i - \Phi_{i-1}$).

Envisageons un indice $i$ déterminé ; posons $\Phi = \Phi_i$, $\varphi = \Phi_{i-1}$ ; les définitions du § 4, appliquées à ces deux ensembles $\varphi$ et $\Phi$ définissent des calottes (ouvertes, fermées, dépendantes, équivalentes...), que nous nommons *calottes de borne $c_i$* ; les définitions 12/13
du § 6, appliquées à ces deux mêmes ensembles, définissent des cycles ambigus, que nous nommons *cycles ambigus de borne supérieure $c_i$.*

Nous allons appliquer la relation (4) à ces calottes et à leurs cycles ambigus.

**8. La relation fondamentale.** Nommons $\Delta$ tout intervalle constitué par des nombres réels $c$ qui vérifient une inégalité du type $a < c \leqslant b$. Posons

$$\begin{aligned}
\Delta(k^{\text{e}}\ \text{nb.Betti}) &= (k^{\text{e}}\ \text{nb.Betti de l'ens.} f \leqslant b) \\
&\qquad - (k^{\text{e}}\ \text{nb.Betti de l'ensemb.} f \leqslant a) \\
\Delta(\text{nb.}k\text{-calotte}) &= \sum_i (\text{nb.max.de } k\text{-calottes ind.de borne } c_i) \\
\Delta(\text{nb.}k\text{-cycles ambigus}) &= \sum_i (\text{nb.max.}k\text{-cycles ambigus ind. de borne } c_i)
\end{aligned}$$

les $\sum_i$ étant étendues à toutes les valeurs de $i$ telles que $a < c_i \leqslant b$.

Nous allons établir la relation fondamentale que voici :[13]

$$\begin{aligned}
(5) \quad \Delta(\text{nb.}k\text{-calottes}) &= \Delta(k^{\text{e}}\text{nomb.Betti}) \\
&\quad + \Delta(\text{nb.}k\text{-cycles ambigus}) + \Delta(\text{nb.}(k-1)\text{-cycles ambigus})
\end{aligned}$$

**Démonstration de (5).** Si $\Delta$ contient une seule des valeurs $c_0, c_1, \dots, c_n$), soit $c_i$, posons $\Phi = \Phi_i$, $\varphi = \Phi_{i-1}$ : (5) s'identifie à (4) et est donc vrai. D'autre part, si (5) 13/14
est vrai pour deux intervalles $\Delta$ tels que l'extrémité de l'une soit l'origine de l'autre, (5) est vrai pour la somme de ces deux intervalles. Donc (5) est vrai quel que soit l'intervalle $\Delta$.

4. La définition de la semi-continuité a été rappelée en note au pas [sic] de la page 6.

## IV.– Cas général
## Fonctionnelle semi-continue inférieurement

**9. Passage du cas particulier, qui a été étudié au chap.III au cas général.** Nous nous proposons d'étudier une fonctionnelle $F$ semi-continue inférieurement.

Le procédé suivant permet *d'approcher* $F$ par une fonctionnelle $f$ semi-continue inférieurement, qui prend un nombre fini de valeurs. Soit une suite croissante : $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ ; en les points où $c_{i-1} < F \leqslant c_i$, nous posons $f = c_i$ ; (l'ensemble sur lequel $f \leqslant c_i$ est donc l'ensemble sur lequel $F \leqslant c_i$).

Les opérations suivantes sont aisées : comparer les calottes et les cycles ambigus attachés à $f$ avec les chaînes analogues attachées à $F$ ; approcher $F$ de plus en plus
14/15 exactement en choisissant des $c_i$ de plus en plus nombreux et voisians ; déduire de la validité de (5) pour $f$, la validité de (5) pour $F$.

Nous n'insistons pas sur le détail de *ce passage à la limite*[5]. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats (§ 11), après avoir récapitulé les définitions indispensables à la compréhension de ces résultats (§ 10).

**10. Définitions.** (Ces définitions sont en accord, non seulement avec celles du chap.III, mais aussi avec celles de l'introduction).

$F$ est une fonctionnelle semi-continue inférieurement, définie sur un espace métrique $M$. $E(F \leqslant a)$ désignera l'ensemble des points de $M$ en lesquels $F \leqslant a$ ; $E(F < a)$ désignera l'ensemble des points de $M$ en lesquels $F < a$.

Pour justifier le passage à la limite que décrit le § 9, il est nécessaire de faire l'hypothèse suivante, qui est vérifiée dans le cas particulier où le nombre des valeurs prises par $F$ est fini :

**Hypothèse d'accessibilité.** ($F$-accessibilité chez M.Morse). Tout cycle qui, quel que soit $e > 0$, est homologue dans $M$ à un cycle de $E(F \leqslant c + e)$ est homologue à un cycle de $E(F \leqslant c)$ (ou bien est homologue à 0).

**Un critère d'accessibilité.** MM.Morse démontre que cette hypothèse d'accessibilité
15/16 est vérifiée, *en particulier*, quand l'ensemble fermé $E(F \leqslant c)$ est compact pour toutes les valeurs de $c$ qui sont inférieures à la limite supérieure de $F$.

**Remarques sur ce critère.** Ce critère s'applique assez commodément à des fonctionnelles $F$ d'une grande généralité, quand $M$ est l'espace des arcs de courbes, c'est-à-dire des systèmes de fonctions *d'une* variable. Il n'en est plus de même quand $M$ est l'espace des systèmes de fonctions de *plusieurs variables*. D'autre part, ce critère ne s'applique pas nécessairement à une fonctionnelle qui prend un nombre fini de valeurs ; or, une telle fonctionnelle satisfait toujours à l'hypothèse d'accessibilité. Il

5. M.Morse l'effectue non d'un bloc, mais dans chacune de ses définitions et dans chacune de ses démonstrations.

serait peut-être intéressant de chercher des critères d'accessibilité différents du précédent. Nous envisageons des chaînes construites avec des coefficients appartenant à un champ arbitraire.

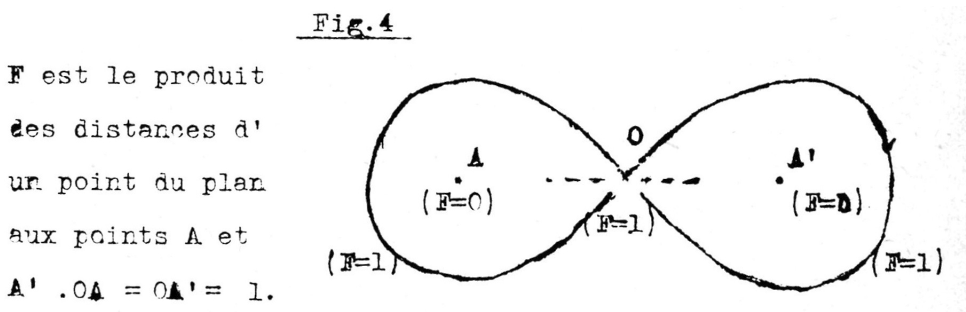
**Calottes.** Nous nommons calotte de borne $a$ toute chaîne $u$ qui possède les propriétés suivantes :
$u \subset E(F \leqslant a)$ ; ou bien la frontière $\dot{u}$ de $u$ est nulle, ou bien $\dot{u} \subset E(F < a)$ ; sur $E(F \leqslant a)$, $u$ [n']est homologue à aucune chaîne $v$ appartenant à $E(F < a)$. $N$ calottes ayant une même borne $a$ sont dites dépendantes lorsqu'on peut en former une combinaison linéaire qui dans $E(F \leqslant a)$ est homologue à une chaîne appartenant à $E(F < a)$. 16/17

**Cycles ambigus.** Nous nommons cycle ambigu de borne $s$ tout cycle $z$ possédant les propriétés suivantes : $z \subset E(F < s)$ ; $z$ est homologue à 0 sur $E(F \leqslant c)$ si et seulement si $s \leqslant c$.

$z$ est donc la frontière d'une calotte ouverte, $u$, de borne $s$. On dit que $u$ coiffe $z$.

$N$ cycles ambigus de même borne supérieure $s$ sont dits dépendants si $N$ calottes qui les coiffent sont dépendantes.

**Fig.4.** $F$ est le produit des distances d'un point du plan aux points $A$ et $A'$ et




$A' \cdot OA = OA' = 1$. Le couple des points $B, B')$ constitue un 0-cycle ambigu que coiffe la calotte tracée en pointillé ; $s = 1$. Ce cycle ambigu est homologue dans $E(F \leqslant 1)$ au cycle consitué par le couple de points $(A, A')$ ; la borne inférieure de ce cycle ambigu est donc $t = 0$.

**Remarque.** Soit un cycle ambigu $z$ de borne supérieure $s$ ; on nomme borne inférieure, $t$, de ce cycle, le plus petit des nombres $c$ tels que $z$ soit homologue, dans $E(F \leqslant s)$, à un cycle appartenant à $E(F \leqslant c)$. On a $t < s$. La considération des 17/18
bornes inférieures permet de classer les cycles ambigus ayant même borne supérieure.

**Valeurs critiques.** Toute borne $a$ d'une calotte attachée à $F$ est nommée valeur critique de $F$.

**Remarque.** Les bornes supérieures et inférieures des cycles ambigus font partie de l'ensemble des valeurs critiques.

**11.– La relation fondamentale.** Nous utilisons comme au § 8, les notations suivantes : $\Delta$ est l'intervalle $a < c \leqslant b$ ;

$$\begin{aligned}\Delta(k^{\mathrm{e}}\ \text{nb.Betti}) &= (k^{\mathrm{e}}\ \text{nb.Betti de } F \leqslant b) \\ &\quad - (k^{\mathrm{e}}\ \text{nb.Betti de } F \leqslant a) \\ \Delta(\text{nb.}k\text{-calotte}) &= \sum_i (\text{nb.max.de } k\text{-calottes ind.de borne } c) \\ \Delta(\text{nb.}k\text{-cycles ambigus}) &= \sum_i (\text{nb.max.}k\text{-cycles ambigus ind. de borne sup } c)\end{aligned}$$

les $\sum$ étant étendues à toutes les valeurs critiques $c$ qui appartiennent à $\Delta$.

Nous avons :[14]

$$\begin{aligned}(5)\quad \Delta(\text{nb.}k\text{-calottes}) &= \Delta(k^{\mathrm{e}}\text{nb.Betti}) \\ &\quad + \Delta(\text{nb.}k\text{-cycles ambigus}) + \Delta(\text{nb.}(k-1)\text{-cycles ambigus})\end{aligned}$$

18/19

**Cas où $\Delta$ contient une infinité de valeurs critiques.** Dans ce cas, les deux membres de (5) sont infinis ; cette conclusion a été complétée par M.Morse : à cet effet, M.Morse introduit dans sa théorie, au lieu du nombre maximum de calottes (ou de cycles ambigus) indépendants, des groupes abéliens ayant pour éléments des classes de calottes (ou de cycles ambigus) ; il remplace la relation (5) par une relation entre groupes. La théorie y gagne un aspect logique plus satisfaisant. Mais M.Morse est obligé de supposer les valeurs critiques bien ordonnées (ou du moins dénombrables) ; or, pour réaliser cette hypothèse dans les applications, on se place dans des conditions telles que ces valeurs critiques soient en nombre fini sur tout intervalle $\Delta$ fini.

**12.– Les inégalités de M.Morse.** Dans les applications, les circonstances suivantes se présentent fréquemment :

$F$ est bornée inférieurement et est définie sur tout l'espace $M$ ;
on connaît les nombres de Betti $R_0, R_1, \ldots, R_k, \ldots$ de $M$ ;
on ne possède aucun renseignement sur les cycles ambigus ;
on cherche des renseignements concernant les nombres

$$p_k = \sum_{-\infty<0<+\infty} (\text{nb.max.}k\text{-calottes ind.de borne } c)$$

19/20 – la conférence suivante nous montrera comment des renseignements sur les $p_k$ fournissent des renseignements sur les points critiques.

La relation (5), appliquée à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ nous donne

$$p_k = R_k + \gamma_k + \gamma_{k-1} \quad (\gamma_{-1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots) \tag{6}$$

On sait seulement que les entiers $\gamma_k$ sont *positifs ou nuls.* Le système (6) résolu par rapport aux $\gamma$, s'écrit

$$(7) \qquad \begin{cases} (7_0) & \gamma_0 \ = \ p_0 - R_0 \\ (7_1) & \gamma_1 \ = \ (p_1 - p_0) - (R_1 - R_0) \\ (7_2) & \gamma_2 \ = \ (p_2 - p_1 + p_0) - (R_2 - R_1 + R_0) \\ \dots & \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots \\ (7_k) & \gamma_k \ = \ (p_k - p_{k-1} + p_{k-2} \cdots) - (R_k - R_{k-1} + R_{k-2} \cdots) \\ \dots & \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

D'où les inégalités

$$(8) \qquad \begin{cases} (8_0) & p_0 \ \geqslant \ R_0 \\ (8_1) & p_1 - p_0 \ \geqslant \ R_1 - R_0 \\ (8_2) & p_2 - p_1 + p_0 \ \geqslant \ R_2 - R_1 + R_0 \\ \dots & \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots \\ (8_k) & p_k - p_{k-1} + p_{k-2} \cdots \ \geqslant \ R_k - R_{k-1} + R_{k-2} \cdots \\ \dots & \dots \ \dots \ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dans les circonstances envisagées les inégalités (8) contiennent tous les renseignements 20/21
que fournit la théorie de M.Morse.

**Remarque 1.–.** Si l'on sait qu'il n'existe pas de cycle ambigu à $k$ dimensions, on déduit de $(7_k)$ que les deux membres de $(8_k)$ sont égaux. En particulier, supposons que $M$ soit un espace à un nombre fini, $\ell$, de dimensions : $\gamma_\ell, \gamma_{\ell+1}, \dots, p_{\ell+1}, p_{\ell+2}, \dots, R_{\ell+1}, R_{\ell+2}, \dots$ sont nuls ; les deux membres de (8) sont égaux et $(8_{\ell+1})$, $(8_{\ell+2}), \dots$ sont identiques à (8).

**Remarque 2.–.** En ajoutant membre à membre deux inégalités (8) consécutives, nous obtenons les inégalités, remarquables par leur simplicité :

$$p_0 \geqslant R_0, \quad p_1 \geqslant R_1, \dots, p_k \geqslant R_k \tag{9}$$

D'ailleurs, les relations (6) donnent immédiatement ces inégalités (9).

### Indications bibliographiques

Le paragraphe 2 de cette conférence est tiré du mémoire suivant, dont la lecture
est particulièrement aisée : 21/22

Marston MORSE et George BOOTH van SCHAAK, The critical point theory under general boundary conditions, Annals of Mathematics, T.35 (1934)

Le paragraphe 2 mis à part, cette conférence expose, de façon différente de celle qu'a choisie M.Morse :

les chap.I et II de Marston MORSE : Functional topology and abstract variational theory, Annals of Mathematics, T.38 (1937)

le chap.I de Marston MORSE : Functional topology and abstract variational theory – Mémorial des Sciences mathématiques, T.92 (1939)

Ce mémorial contient une bibliographie du sujet.

Voir également :

SEIFERT und THRELFALL, Variationsrechnung im Grossen (à paraître chez Teubner).

---

## Notes

1. Les articles et livres utilisés par l'auteur et indiqués à la fin de son exposé sont ceux de Morse [MBvS34] (avec Booth van Schaak) et [Mor37, Mor39]. Le livre [ST38], annoncé comme à paraître (mais apparemment paru en 1938), est aussi cité.
2. « Espace abstrait » vaut sans doute espace métrique ou topologique. La topologie utilisée ne sera pas précisée dans l'exposé.
3. Leray fait sans doute allusion à la question de l'existence de géodésiques fermées posée par Poincaré dans ses travaux sur la mécanique céleste [Poi99], voir aussi le livre de Birkoff [Bir27] et l'article [LS34] de Lusternik et Schnirelmann.
4. Il n'y eut qu'une conférence suivante.
5. De classe $\mathcal{C}^\infty$ serait aujourd'hui plus naturel.
6. « En général », c'est-à-dire sous l'hypothèse que le point critique est non dégénéré, ce qui est en effet une propriété générique.
7. L'emplacement de la note infrapaginale est plutôt baroque (annoncée en son temps par le « lire page suivante », elle se trouve au bas de la page 5 et contient l'indication qu'elle s'attache à la page 4).
8. La division du travail entre Roger est Leray est claire, et montre qu'ils ont parlé ensemble du sujet.
9. Dans cette partie, il est question de l'homologie de $\Phi$, de celle de $\varphi$, et de leurs relations. Voir les notes suivantes.
10. Ici aussi, l'emplacement de la note de bas de page est particulier (deux pages plus loin)...
11. Qui a assisté à cet exposé ne nous est pas connu. Qui a lu ces notes de Leray en 1939 et y a compris quelque chose non plus. Qui a eu l'idée d'aller les lire, une guerre plus tard... Nous l'avons dit dans l'introduction à cette année du séminaire, cet exposé n'a pas été pris en compte dans les articles (d'Armand Borel dans [Ler98], de Haynes Miller [Mil00]) sur Leray et la topologie. Voir cette introduction.
12. La relation (4) est encadrée.
13. Étant fondamentale, (5) est encadrée.
14. Relation encadrée.

## Références


[Bir27] G. Birkhoff – *Dynamical systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 9, American Mathematical Society, New York, 1927.

[Ler98] J. Leray – *Selected papers. œuvres scientifiques. Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Topology and fixed point theorems/Topologie et théorème du point fixe, With an introduction by Armand Borel, Edited by Paul Malliavin.

[LS34] L. Lusternik & L. Schnirelmann – *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. I. Espaces à un nombre fini de dimensions*, Hermann, Paris, 1934, Traduit du russe par J. Kravtchenko.

[MBvS34] M. Morse & G. Booth van Schaack – « The critical point theory under general boundary conditions », *Ann. of Math.* **35** (1934), p. 545–571.

[Mil00] H. Miller – « Leray in Oflag XVIIA : the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences », *Gaz. Math.* (2000), no. 84, suppl., p. 17–34, Jean Leray (1906–1998).

[Mor37] M. Morse – « Functional topology and abstract variational theory », *Ann. of Math.* **38** (1937), p. 386–449.

[Mor39] ———, *Functional topology and abstract variational theory*, Mémorial des sciences mathématiques, vol. 92, Gauthier-Villars, 1939.

[Poi99] H. Poincaré – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1899, réimpression de 1987.

[ST38] H. Seifert & W. Threlfall – *Variationsrechnung im Grossen (Morsesche Theorie)*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1938.