LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

1. Année 1933-1934
Théorie des groupes et des algèbres

Paul Dubreil

Représentations des systèmes hypercomplexes

Séminaire de mathématiques (1933-1934), Exposé 1-E, 15 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1933-1934__1__E_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 29 janvier 1934
Exposé 1-E, p. 1 à 15

REPRÉSENTATIONS DES SYSTÈMES HYPERCOMPLEXES

par **Paul Dubreil**

Bibliographie

Van der Waerden, T.II, prg. 104, 108, 120 à 123.

E. Noether : Hyperkomplexe Grössen unde Darstellungtheorie, Math. Zeit. Bd. 30 (1929) ch.III & IV.[1]

A. Définitions. Représentations

1.– Systèmes hypercomplexes. Rappel de la définition[2] : P étant un corps commutatif, on appelle *système hypercomplexe sur* P un anneau $\mathfrak{o}$ qui est un P-module *fini* et dont tous les éléments sont permutables avec ceux de P. Tout élément est donc de la forme :

$$\begin{aligned} a &= \mathsf{p}_1 u_1 + \cdots + \mathsf{p}_r u_r \\ &= u_1 \mathsf{p}_1 + \cdots + u_r \mathsf{p}_r \end{aligned}$$

les u_i étant linéairement indépendants. On appelle r le *rang du système.*

Et on peut écrire :

$$\mathfrak{o} = u_1 \mathsf{P} + u_2 \mathsf{P} + \cdots + u_r \mathsf{P}$$

Le système est défini par la connaissance :

— de P ;

— des éléments de base $u_1, \ldots, u_r$;

— de la loi de multiplication des éléments de base :

$$u_i u_k = \sum_{j=1}^{r} c_{ik}^{j} u_j$$

loi qui doit être associative.

Tout système hypercomplexe satisfait aux conditions maximale et minimale, ce qui permet d'appliquer aux systèmes hypercomplexes la théorie générale des anneaux (telle qu'elle a été exposée par M.de Possel, dans C.).

Exemples.

(1) L'anneau de matrices complet sur P a rang n^2, si n est l'ordre des matrices.

(2) L'*anneau de groupe* d'un groupe fini G ; les éléments de G sont pris comme éléments de base du système, la loi de multiplication est celle du groupe. La considération des anneaux de groupes permet de faire rentrer la théorie des groupes finis dans celle des systèmes hypercomplexes.

2.– Transformations linéaires. Soit K un anneau, avec élément unité ε, et soit M un K-module fini à droite de rang m ; désignons par $(x_1, \dots, x_m)$ une base de M. Tout élément de M est de la forme :

$$y = \sum_{k=1}^{m} x_k \alpha_k \qquad \alpha_k \in K$$

de sorte que, après avoir choisi une *base* de ce K-module M, on peut le considérer comme *un module de formes linéaires.*

Considérons une *transformation linéaire* C. Elle est définie quand on connaît les formes $Cx_1, \dots, Cx_m$ en lesquelles elle transforme $x_1, \dots, x_m$:

$$Cx_k = \sum_{j=1}^{m} x_j \gamma_{jk} \tag{1}$$

donc par la matrice d'ordre m,

$$C = (\gamma_{jk})$$

2/3 (Il est commode de représenter la la transformation et la matrice correspondante par la même lettre).

La transformation linéaire considérée transforme y en :

$$Cy = \sum_{k=1}^{m} (Cx_k)\alpha_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \gamma_{ik} \alpha_k \tag{1'}$$

On a visiblement :

$$\begin{aligned} C(y+z) &= Cy + Cz \\ C \cdot y\alpha &= Cy \cdot \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

La *somme* de deux transformations linéaires définies par les matrices C et C', est par définition la transformation définie par la matrice $C + C'$, et on a :

$$(C + C')x_k = Cx_k + C'x_k \tag{3}$$

$$(C + C')y = Cy + C'y \tag{3'}$$

Le *produit* de deux transformations linéaires définies par les matrices C, C' est la transformation définie par la matrice CC' et on a :

$$(CC')x_k = C(C'x_k) \tag{4}$$

$$(CC')y = C(C'y) \tag{4'}$$

Les relations (2) montrent qu'on peut regarder une matrice C comme un opérateur *à gauche* sur les éléments de M (qui est déjà K-module à droite) et si on considère toutes les transformations linéaires de M définies par les matrices C d'un anneau de matrices Ω, les relations (3) et (4) montrent que M est un Ω-module (à gauche).

3.– Représentation. Cela étant, considérons d'abord un *anneau quelconque* $\mathfrak{o}$. 3/4

Définition. On appelle *représentation de degré* m *de* $\mathfrak{o}$ *dans* K, toute homomorphie (d'anneau)[3]

$$\mathfrak{o} \sim \Omega \quad c \longrightarrow C \quad (c \text{ est représenté par } C)$$

c'est à dire

$$c + c' \longrightarrow C + C'$$
$$cc' \longrightarrow CC'$$

faisant correspondre à $\mathfrak{o}$ un anneau de matrices Ω d'ordre m dont les éléments appartiennent à K. Si l'homomorphie est *un isomorphisme*, la représentation est dite *fidèle*.

4.– Module de représentation. Étant donné une représentation de degré m, considérons un module M, K-module de rang m à droite, et les transformations linéaires sur ce module correspondant aux matrices C de l'anneau Ω : M est un Ω-module à gauche ; mais en raison de l'homomorphisme entre $\mathfrak{o}$ et Ω nous pouvons aussi définir les éléments c de $\mathfrak{o}$ comme opérateurs à gauche sur les éléments de M, en posant :

$$cy = Cy$$

et remplacer dans les relations (2), (3) et (4) les lettres C, C' par les lettres c, c' correspondantes : M est donc aussi un $\mathfrak{o}$-*module à gauche.*

Définition. Un tel module M, K-module à droite de rang fini n,

$$M = x_1K + \cdots + x_nK$$

et $\mathfrak{o}$-module à gauche, s'appelle *module de représentation de* $\mathfrak{o}$ *par rapport à* K. (notion introduite par *Krull*, Theorie und Anv. des verallg. Anelsch. Gruppen, Sitzungsb. 4/5
Heidelb. Akad. 1926)

D'après ce qui précède, *la connaissance d'une représentation de degré* m *de* $\mathfrak{o}$ *dans* K *permet de définir un module de représentation de* $\mathfrak{o}$ *dans* K*, module de rang* m *par rapport à* K.

Inversement, si l'on se donne un module de représentation, et si on en précise la base, on en déduit une représentation.

Soit $M = x_1K + \cdots + x_nK$, un module de représentation de base $(x_1, \ldots, x_n)$, M étant un $\mathfrak{o}$-module à gauche, on a, pour c dans $\mathfrak{o}$:

$$cx_k = \sum_i x_i\gamma_{ik} \qquad \gamma_{ik} \in K$$

et les formules (2), (3) et (4) *avec les lettres* c sont valables. Si donc, on fait correspondre à l'élément c de $\mathfrak{o}$ la matrice

$$C = (\gamma_{ik})$$

d'ordre n, il y a homomorphisme entre $\mathfrak{o}$ et l'anneau Ω des matrices C. On a bien une représentation de $\mathfrak{o}$.

Remarque. À une représentation correspond un module de représentation bien déterminé, tandis qu'à un module de représentation correspondent une infinité de représentations, dépendant du choix de la base du module.

5/6 Un changement de base de M est une transformation linéaire, définie par une matrice P :

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n)P$$

Ce changement de base remplace la représentation $c \to C$ par la représentation $c \to P^{-1}CP$ qui est dite *équivalente* à la première. Il en est de même si on passe de M à un module M' isomorphe, les bases étant quelonques.

On appelle *classes de représentations* l'ensemble des représentations équivalentes à une représentation donnée. À des modules de représentation isomorphes, correspond une *classe de représentations et inversement.*

B. Réduction d'une représentation

5.– Définition. *Une représentation d'un anneau* $\mathfrak{o}$ *est dite* réductible *si le module de représentation correspondant* M *admet un sous-module permis*[4] N (N, K-module à droite, et $\mathfrak{o}$-module à gauche), irréductible dans le cas contraire (c'est-à-dire si M est simple).

Dire que la représentation est réductible, revient à dire que les transformations linéaires correspondantes laissent invariant un sous-espace linéaire, différent de M et de zéro.

6/7 **6.– Représentations réductibles.** Nous allons supposer maintenant que K est *un corps* (ce qui permet notamment d'affirmer que tout K-module fini admet une base minima) (Voir l'exposé de M.Chevalley, B, et Van der Waerden, BdII prg.105).

Si M admet un sous-module (permis)

$$N = x_1 K + \cdots + x_n K$$

on peut toujours prendre pour N une base comprenant $x_1, \ldots, x_n$ et $m - n = \ell$ autres éléments $y_1, \ldots, y_\ell$

$$M = x_1 K + \cdots + x_n K + y_1 K + \cdots + y_\ell K$$

Comme N est $\mathfrak{o}$-module, les x sont transformés en éléments de N par les transformations linéaires de la représentation :

$$\begin{aligned} x'_k &= \sum x_i \gamma_{ik} \\ y'_k &= \sum x_i \alpha_{ik} + \sum y_i \beta_{ik} \end{aligned} \tag{6}$$

Posons : $R = (\gamma_{ik})$, $S = (\alpha_{ik})$, $T = (\beta_{ik})$. R et T sont des matrices carrées d'ordres respectifs n et ℓ, S est une matrice rectangulaire.

Nous voyons que les matrices C de la représentation ont la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix} \tag{7}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau de matrices dans K soit réductible, est que : au moyen d'une transformation convenable $C' = P^{-1} C P$ (correspondant au choix d'une base convenable pour M) toutes les matrices de l'anneau puissent être mises sous la forme (7). 7/8

Les relations (6) peuvent encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (x'_1, \ldots, x'_n) &= (x_1, \ldots, x_n) R \\ (y'_1, \ldots, y'_\ell) &= (y_1, \ldots, y_\ell) T \quad \text{(modulo } N\text{)} \end{aligned} \tag{6'}$$

D'où il résulte que, *non seulement N, mais le module-facteur M/N, peuvent être regardés comme modules de représentation, et que les représentations correspondantes sont fournies par les matrices R et T.*

Cela étant, considérons une *série de composition* du module M :

$$M = M_\lambda, M_{\lambda-1}, \ldots, M_0 = (0) \quad (M_i, \text{ sous-module } \textit{permis})$$

Puis, prenons $N = M_{\lambda-1}$. De même, dans $M_{\lambda-1}$, considérons le sous-module $M_{\lambda-2}$, qui est maximum, etc... En choisissant convenablement les bases (de manière que la base d'un module comprenne celle du suivant) on voit que les matrices de représentation correspondant à M prennent la forme

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1,\lambda} \\ 0 & R_{22} & \ldots & R_{2,\lambda} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Les matrices R_{ii} de la diagonale correspondent aux facteurs de composition M_i / M_{i-1}. Ceux-ci étant simples, les représentations correspondantes sont *irréductibles.* On dit

8/9 qu'on a opéré *la réduction* de la représentation correspondant au module M. Il résulte du théorème de Jordan-Hölder sur les séries de composition que les *parties irréductibles* R_{ii} *sont déterminées à l'ordre et à l'équivalence près.*

7.– Décomposition d'une représentation. Il y a un cas où les matrices C prennent une forme encore plus simple. Il peut se faire que dans (6) tous les α_{ik} soient nuls : alors le sous-module :

$$N_1 = y_1 K + \cdots + y_\ell K$$

est lui-même sous-module permis, et $M = N \oplus N_1$ (*somme directe*). Les matrices S sont alors toutes nulles et C prend la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \tag{9}$$

On dit que la *représentation* $c \to C$ *se décompose en* $c \to R$, $c \to T$.

8.– Représentation complètement réductible. Supposons le module de représentation M *complètement réductible*, c'est à dire somme directe de *doubles-modules simples.*

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_\lambda$$

On en déduit la série de composition

$$M = M_\lambda, \quad M_{\lambda-1} = N_1 \oplus \cdots \oplus N_{\lambda-1}, \quad M_1 = N_1, \quad M_0 = (0)$$

9/10 (Voir exposé A sur la théorie des groupes). Et les matrices (8) prennent la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \tag{10}$$

où les R_{ii} définissent des *représentations irréductibles*, plusieurs R_{ii} peuvent d'ailleurs être identiques. La représentation $c \to C$ est dite *complètement réductible.*

9.– Cas d'un système hypercomplexe. Prenons maintenant comme $\mathfrak{o}$ un système hypercomplexe sur P, P étant un corps commutatif :

$$\mathfrak{o} = u_1\mathsf{P} + u_2\mathsf{P} + \cdots + u_r\mathsf{P}$$

Alors on considère pour la représentation un anneau K (en général un corps) dont *le centre contient* P, et on exige que l'homomorphisme d'anneau

$$\mathfrak{o} \sim \mathfrak{O}$$

soit aussi homomorphisme vis à vis des opérateurs p de P en d'autres termes, que si :

$$c \longrightarrow C$$

on ait aussi

$$c_{\mathsf{p}} \longrightarrow C_{\mathsf{p}} \tag{11}$$

quel que soit $\mathsf{p} \in \mathsf{P}$. Par conséquent, *la représentation est entièrement définie dès qu'on connaît les matrices $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_r$ représentant les éléments de la base $u_1, \ldots, u_r$ du système hypercomplexe.* 10/11

Pour le module de représentation M, dans lequel on a (puisqu'il s'agit d'un module double) :

$$cm \cdot \mathsf{p} = c \cdot m\mathsf{p},$$

(11) entraîne :

$$c\mathsf{p} \cdot m = cm \cdot \mathsf{p} \tag{11'}$$

10.– Cas particuliers. Le plus simple est : $K = \mathsf{P}$

On passe de ce cas à celui de K *commutatif quelconque* en considérant K comme une extension de P, c'est à dire en introduisant le système[5] $\mathfrak{o}_K$. Si dans la représentation de $\mathfrak{o}$ dans K, $u_1, \ldots, u_r$ sont représentées par des matrices $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_r$, on peut représenter un élément $\sum \mathfrak{N}_i u_i$ ($\mathfrak{N}_i \in K$) de $\mathfrak{o}_k$ par la matrice $\sum \mathfrak{N}_i \mathfrak{U}_i$, ce qui définit une représentation de $\mathfrak{o}_K$: donc, inversement, toute représentation de $\mathfrak{o}$ dans un corps commutatif s'obtient à partir d'une représentation de $\mathfrak{o}_k$.

Une autre hypothèse restreignant le problème est celle de l'*existence d'une unité e dans $\mathfrak{o}$*. On peut alors supposer que cette unité est opérateur unité pour le module de représentation M : $em = m$. Il n'en est pas forcément ainsi, car on pourrait poser par exemple : $cm = 0$ quel que soit c dans $\mathfrak{o}$. Mais on montre *que tout module de représentation M est somme directe de deux modules de représentation*

$$M = M_1 \oplus M_0$$

où M_1 admet l'unité e de $\mathfrak{o}$ comme opérateur unité et où M_0 est annulé par $\mathfrak{o}$ (c'est 11/12
à dire $cm_0 = 0$ quels que soient $c \in \mathfrak{o}$ et $m_0 \in M_0$). Il suffit de poser :

$$m = em + (m - em)$$

11.– Représentation régulière. *Pour $K = \mathsf{P}$, $\mathfrak{o}$ est lui-même module de représentation* ($\mathfrak{o}$-module à gauche, P-module à droite). La représentation correspondante s'appelle *la représentation régulière.* Les sous-modules (doubles) ne sont autres que les *idéaux* à gauche. (Les modules de représentations irréductibles sont les idéaux à gauche simples), et la forme réduite de la représentation est donnée par une série de composition des idéaux à gauche. La représentation régulière est complètement réductible si l'anneau $\mathfrak{o}$ l'est lui-même (à gauche).

C. Théorèmes fondamentaux

(Van der Waerden, Bd.II p.121)

12.– Rappels de résultats connus. (Voir exposé I.C. de M. de Possel, Grandeurs idempotentes).

On a considéré différentes conditions générales auxquelles un anneau est susceptible de satisfaire et étudié la manière dont ces conditions dépendent les unes des autres. Ces conditions sont :

(1) Conditions maximales pour idéaux à gauche (T.K.S.)

(2) Condition minimale pour idéaux à gauche (V.K.S.)[6]

12/13 (3) Absence de radical (c'est à dire (0) seul idéal nilpotent)

(Quand les conditions 2 et 3 sont vérifiées, l'anneau est dit *semi-simple*).

(4) Existence d'une unité.

(5) Réductibilité complète à gauche (anneau somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche simples).

Alors le théorème fondamental s'énonce :

$$2+3 \rightleftarrows 4+5$$

Pour les *systèmes hypercomplexes* il faut se rappeler que (en raison de l'existence d'une base) 1 et 2 sont toujours remplies. Donc le théorème fondamental devient :

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{o}\text{ sans radical}\\ \text{(donc semi-simple)}\end{array}\right\}\ \text{entraîne}\ \left\{\begin{array}{c}\text{existence d'une unité}\\ \text{et réductibilité complète}\end{array}\right.$$

et réciproquement.

Rappelons enfin, qu'à partir d'un anneau $\mathfrak{o}$ possédant un radical $\mathfrak{r}$, on peut déduire un anneau ne possédant plus de radical : *l'anneau des classes de restes* $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$.

Soit donc $\mathfrak{o}$ un système hypercomplexe semi-simple :

$$\mathfrak{o} = u_1\mathsf{P} + \cdots + u_r\mathsf{P}$$

Utilisons les deux propriétés caractéristiques :

— *existence de l'unité e*

— et

$$\mathfrak{o} = \ell_1 + \cdots + \ell_s \tag{12}$$

Considérons une représentation dans P, le module de la représentation M admet-
13/14 tant l'unité e de $\mathfrak{o}$ comme opérateur unité.

13.– Théorème I. *M est complètement réductible et les modules simples dont M est la somme directe sont isomorphes aux idéaux à gauche simples de $\mathfrak{o}$: $\ell_1, \dots, \ell_s$.*

Démonstration. a) On montre d'abord que M est un module fini par rapport à $\mathfrak{o}$ en utilisant l'existence de l'unité e de $\mathfrak{o}$. En effet, M est par définition module fini par rapport à P :

$$M = m_1\mathsf{P} + \cdots + m_s\mathsf{P}$$

or d'après (11') :

$$m_k\mathsf{p} = em_k \cdot \mathsf{p} = e\mathsf{p} \cdot m_k = \omega m_k \quad \text{où } \omega \text{ élément de } \mathfrak{o}$$

Donc, $m_k\mathsf{P} \subset \mathfrak{o}m_k$ et par suite

$$M = (\mathfrak{o}m_1 + \cdots + \mathfrak{o}m_s)$$

b) Tenons compte maintenant de (12), il vient :

$$M = (\dots \ell_i m_k \cdots) \tag{13}$$

On vérifie sans peine qu'un $\mathfrak{o}$-module $\ell_i m_k$ est :
— ou bien nul
— ou bien isomorphe à ℓ_i et par conséquent *simple.*
(En effet, si l'on fait correspondre à x de ℓ_i xm_k dans $\ell_i m_k$, cette correspondance est un homomorphisme. L'ensemble des éléments de ℓ_i auxquels correspond 0 dans $\ell_i m_k$ est un idéal à gauche, donc (0) ou ℓ_i puisque ℓ_i est simple. Dans le premier cas $\ell_i m_k \cong \ell_i$, dans le deuxième cas $\ell_i m_k = 0$.) 14/15

Chacun des modules $\ell_i m_k$ étant simple a, avec la somme de ceux qui le précèdent, seulement zéro en commun, ou y est contenu entièrement. Donc si on supprime ceux qui sont contenus dans la somme des précédents, M est la somme directe de ceux qui restent. C.Q.F.D.

Remarque. Le théorème précédent est valable pour un anneau $\mathfrak{o}$ semi-simple et un $\mathfrak{o}$-module fini M.

14.– Application du théorème. On peut obtenir les idéaux à gauche simples $\ell_1, \dots, \ell_s$ dont $\mathfrak{o}$ est la somme directe en décomposant d'abord $\mathfrak{o}$ en idéaux bilatères[7] :

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_\alpha \tag{1}$$

puis chaque anneau *simple* $\mathfrak{a}_\mu$ en idéaux à gauche simples. Les ℓ_i contenus dans un $\mathfrak{a}_\mu$ sont annulés par tout autre $\mathfrak{a}$ (relations d'orthogonalité). Tous les idéaux à gauche simples d'un même $\mathfrak{a}$ sont *isomorphes* (isomorphisme avec opérateurs, les opérateurs étant les éléments de $\mathfrak{o}$ puisque tout idéal à gauche dans $\mathfrak{a}$ est idéal à guche dans $\mathfrak{o}$) ; deux idéaux à gauche simples provenant de $\mathfrak{a}_\nu$ différents, ne sont pas isomorphes.

Cela étant, soit ℓ_i un des idéaux à gauche simples provenant de $\mathfrak{a}_\mu$. Tous les $\mathfrak{a}$ à l'exception de $\mathfrak{a}_\mu$ sont représentés par zéro dans la représentation irréductible définie 15/16 par ℓ_i. De plus, *l'anneau simple* $\mathfrak{a}_\mu$ *ne possède qu'une représentation irréductible (à l'équivalence près).* Et cette représentation *est fidèle*, car $\mathfrak{a}_\mu$ est idéal bilatère *simple* (l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}_\mu$ représentés par la matrice C est un idéal bilatère, donc 0).

Nous construirons dans un instant, explicitement, cette représentation irréductible d'un système simple.

Étudions, auparavant, le cas d'un *système avec radical.*

15.– Théorème II. *Si* $\mathfrak{o}$ *est un système hypercomplexe avec radical* $\mathfrak{r}$ *tout* $\mathfrak{o}$*-module de représentation simple* M *(qui n'est pas annulé par* $\mathfrak{o}$*) est isomorphe à un idéal à gauche simple de l'anneau sans radical* $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$*).*

Démonstration. (Voir Van der Waerden, Bd.II, p.181)

$$\mathfrak{r}M \subset M \text{ donc } \mathfrak{r}M = (0) \text{ ou } M$$

Si on avait $M = \mathfrak{r}M$, on en déduirait $M = \mathfrak{r}M = \mathfrak{r}^2M = \cdots = (0)$ ($\mathfrak{r}$ nilpotent). Impossible. Donc : $\mathfrak{r}M = 0$ et par suite, tous les éléments de $\mathfrak{o}$ appartenant à une même classe par rapport à $\mathfrak{r}$ donnent, multipliés par un élément de M, le même produit. *On*
16/17 *peut donc regarder* M *comme* $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$*-module.* $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$ étant sans radical, possède une unité et est complètement réductible. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème I.

On peut encore exprimer le théorème II de la manière suivante :

Toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{o}$ *sont contenues dans la représentation régulière de* $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$ (puisque, précisément les modules de représentations irréductibles sont les idéaux à gauche simples).

16.– Construction d'une représentation irréductible d'un système simple. Les théories précédentes ont montré l'intérêt de ces représentations.

On sait que le système simple $\mathfrak{o}$ est isomorphe à un anneau complet de matrices dans un corps Λ :

$$\mathfrak{o} = c_{11}\Lambda + c_{22}\Lambda + \cdots + c_{nn}\Lambda$$

(ce qui est une représentation de $\mathfrak{o}$) et qu'un idéal simple à gauche est donné par :

$$\ell_i = c_{1i}\Lambda + c_{2i}\Lambda + \cdots + c_{ni}\Lambda$$

Nous prendrons

$$\ell = \ell_1 = c_{11}\Lambda + c_{21}\Lambda + \cdots + c_{n1}\Lambda$$

On considère la représentation de $\mathfrak{o}$ dans son corps fondamental P, qui est contenu dans Λ : le degré de Λ par rapport à P est fini, car le rang de $\mathfrak{o}$ est égal à $n^2\times$ degré
17/18 de Λ. Si ce degré est d et si :

$$\Lambda = \lambda_1\mathsf{P} + \cdots + \lambda_d\mathsf{P}$$

on a $\mathfrak{o} = c_{11}\lambda_1\mathsf{P} + \cdots + c_{11}\lambda_d\mathsf{P} + \cdots + c_{nn}\lambda_1\mathsf{P} + \cdots + c_{nn}\lambda_d\mathsf{P}$. Considérons d'abord le cas $\Lambda = \mathsf{P}$, qui se produira notamment si P est *algébriquement fermé.* Alors les matrices de la représentation définie par ℓ s'obtiennent immédiatement (voir prg.2).

Soit $a = \sum\limits_{ik=1}^{n} c_{ik}\alpha_{ik}$ un élément de $\mathfrak{o}$. On a

$$ac_{k1} = \sum_{i=1}^{n} c_{i1}\alpha_{ik} \qquad \text{donc} \qquad a \longrightarrow (\alpha_{ik})$$

et par suite, *la représentation irréductible cherchée est constituée par l'anneau complet de matrices auquel $\mathfrak{o}$ est isomorphe* : c'est naturel puisqu'on sait qu'à l'équivalence près, il n'y a qu'une représentation irréductible.

Supposons maintenant Λ *surcorps de* P.

$$\Lambda = \lambda_1\mathsf{P} + \cdots + \lambda_d\mathsf{P}$$

Λ a la forme d'un système hypercomplexe sur P. Cherchons d'abord sa représentation régulière. Soit :

$$\beta\lambda_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\beta_{ij} \qquad \beta \longrightarrow B = (\beta_{ij})$$

Cela étant, cherchons la représentation dans P définie par ℓ. On a :

$$\begin{aligned} \ell &= c_{11}\Lambda + c_{21}\Lambda + \cdots + c_{n1}\Lambda \\ &= (c_{11}\lambda_1\mathsf{P} + \cdots + c_{11}\lambda_d\mathsf{P}) + \cdots + (c_{n1}\lambda_1\mathsf{P} + \cdots + c_{n1}\lambda_d\mathsf{P}) \end{aligned}$$

Cherchons d'abord la représentation d'un élément de $\mathfrak{o}$ de la forme βc_{ik}. Pour cela, on le multiplie par les éléments de base :

$$c_{11}\lambda_1, \ldots, c_{11}\lambda_d, \ldots, c_{n1}\lambda_1, \ldots, c_{n1}\lambda_d$$

de ℓ_1, qui se répartissent en groupes de α éléments. On trouve zéro, sauf pour le $k$ème 18/19
groupe. Pour ce groupe, on a :

$$\beta c_{ik} \cdot c_{k1}\lambda_j = \beta c_{i1}\lambda_j = c_{i1} \sum_{i'=1}^{d} \lambda_{i'}\beta_{i'j} = \sum_{i'=1}^{d} c_{i1}\lambda_{i'}\beta_{i'j}$$

où seuls les éléments de base du $i$ème groupe ont des coefficients différents de zéro, ces coefficients étant d'ailleurs les $\beta_{i'j}$. On peut alors, en groupant les lignes et les colonnes par d, écrire la matrice correspondant à βc_{ik} sous la forme

$$\beta c_{ik} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \ldots & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ldots & B & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ldots & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix} \qquad \text{[le } B \text{ est sur la } i\text{ème ligne et la } k\text{ème colonne]}$$

Soit maintenant $a = \sum_{ik=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ik}$ un élément de $\mathfrak{o}$. Désignons par A_{ik} la matrice d'ordre d représentant dans P l'élément α_{ik} de Λ. On obtient immédiatement la représentation :

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

17.– Application. Théorème de Burnside. *Un système S de matrices d'ordre n, contenant, en même temps que deux matrices, leur produit, et de plus absolument*
19/20 *irréductible* (c'est à dire restant irréductible dans toute extension algébrique du corps commutatif K auxquels sont supposés appartenir les coefficients des matrices) *contient exactement n^2 matrices linéairement indépendantes.*[8]

Démonstration. (Voir Van der Waerden, Bd.II, p.183)

On passe à l'extension algébriquement fermée Ω de K : le système S y reste irréductible. Aux matrices A_i de S on ajoute les combinaisons linéaires $\sum A_i \omega_i$ ($\omega_i \in \Omega$), ce qui donne un système S', extension de S. Ce système a un rang fini, par rapport à Ω puisqu'il n'y a pas plus de n^2 matrices linéairement indépendantes dans S' : c'est donc un système hypercomplexe, qui est une représentation irréductible de lui-même. Mais, d'après les théorèmes fondamentaux une telle représentation est représentation d'un système sans radical et même d'un système simple. Donc, puisqu'on est dans un corps algébriquement fermé, elle contient n^2 matrices linéairement indépendantes.

18.– Représentation du centre. (Van der Waerden, Bd.II ; p.122)

Les résultats sont les suivants :

Les matrices constituant la représentation du centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{o}$ sont permutables avec toutes les matrices représentant des éléments quelconques de $\mathfrak{o}$. *Si le corps fondamental*
20/21 P *est algébriquement fermé*, et la représentation *irréductible*, le centre est représenté par des matrices permutables avec toutes les matrices de l'anneau complet, donc par les *matrices de la forme* λE_n (E_n matrice unité d'ordre n). De même dans un corps quelconque, pour des représentations irréductibles.

On en déduit immédiatement, que *si $\mathfrak{o}$ est commutatif, toute représentation absolument irréductible est du premier degré.*

On sait que si $\mathfrak{o}$, non commutatif, est semi-simple, donc somme de systèmes simples

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_s$$

son centre $\mathfrak{Z}$ est somme directe d'autant de corps :

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}_1 + \cdots + \mathfrak{z}_s$$

$\mathfrak{Z}_i$ étant le centre de $\mathfrak{a}_i$ (exposé de M.de Possel). Le nombre de représentations irréductibles de $\mathfrak{o}$ non équivalentes est égal à s. *Donc un système hypercomplexe et son centre possèdent le même nombre de représentations irréductibles distinctes.*

19.– Traces. (Van der Waerden, Bd.II, p.123)

Par définition, la trace[9] de a dans la représentation D est égale à la trace de la matrice représentant a. Si $A = (\alpha_{ik})$, $\mathrm{Sp}_D(a) = \sum \alpha_{ii}$

Dans des représentations équivalentes, les traces d'un même élément sont iden- 21/22
tiques.

Les traces sont des fonctions linéaires :

$$S(a+b) = S(a) + S(b) \qquad S(a\lambda) = S(a) \cdot \lambda$$

La trace d'une représentation réductible est la somme des traces des représentations irréductibles correspondantes.

20.– Caractères. On appelle *caractères, les traces dans les représentations absolument irréductibles* (ou irréductibles dans un corps algébriquement fermé Ω). Dans la νème représentation irréductible $\mathfrak{D}_\nu$, on désigne le caractère par $\chi_\nu(a)$.

Théorème. *Une représentation complètement réductible d'un système hypercomplexe $\mathfrak{o}$ dans un corps Ω de caractéristique nulle, est déterminée, à une équivalence près, par les traces des matrices correspondantes.*

Notes

1. Comme dans son premier exposé (1-A), Dubreil a indiqué la bibliographie au début de son texte. L'usage de regrouper la bibliographie à la fin de l'article est relativement récent. Les références pour cet exposé sont, toujours, le livre [vdW31] et l'article [Noe29]. Est aussi cité l'article [Kru26] de Krull.
2. Les systèmes hypercomplexes ont déjà été définis dans les exposés précédents. La notation P vient directement de [vdW31, § 104] (grâce auquel nous avons pu identifier la nature du « P » manuscrit de Dubreil).
3. Représentation était souvent utilisé pour ce que nous nommons *application* – ici il s'agit d'un homomorphisme d'anneaux. Une sorte de sélection naturelle finira par réserver le terme « représentation » aux homomorphismes d'un groupe dans un groupe linéaire.
4. La notion de sous-module « permis » a été définie dans l'exposé 1-B, il s'agit simplement des sous-$\mathfrak{o}$-modules.
5. La notation $\mathfrak{o}_K$ pour l'extension des scalaires à K a été définie dans l'exposé 1-D.
6. Les sigles abrègent *Teilerkettensatz* et *Vielfachenkettensatz*, les conditions de chaînes ascendantes et descendantes. Voir l'exposé 1-C.
7. Pourquoi cette décomposition s'appelle (1) et pas (14) restera sans doute toujours un mystère.
8. Ce théorème vient de l'article [Bur05].

9. La trace, en allemand *Spur*, est notée Sp, ou S. Dans les notes du cours d'arithmétique qu'André Weil donnera à Strasbourg l'année suivante [1], la notation Sp est toujours présente. On verra apparaître Tr dans l'exposé 2-I.

Des archives du séminaire...

Compte-rendu de la séance du 29 janvier 1934

1. La séance est ouverte à 16h.30. M.JULIA demande une modification de date à cause du Mardi gras. La question sera résolue à la fin de la séance.
2. Weil fait une rectification à propos de l'exposé précédent de Dieudonné : La démonstration de Artin n'est pas inédite comme l'avait dit Dieudonné mais se trouve dans le mémoire des Abhandl. Hamburg. Sem. déjà cité Weil en profite pour recommander la lecture de ce mémoire.
3. La parole est donnée à Dubreil qui parle de « la représentation des algèbres ».
4. À la fin de l'exposé, Dieudonné demande que soit fixé le sens de plusieurs mots, en particulier de *rang* et *degré* qu'il n'a pas employés dans le même sens que Dubreil. Après intervention de Chevalley, on décide d'adopter la terminologie de ce dernier et de faire ajouter un rectificatif à l'exposé de Dieudonné [2].
5. M.Julia remercie vivement Dubreil de son exposé ; le thé est servi cependant que les modifications de programme ont préparées. M.Julia les indique.
6. La séance est levée à 18h.30 [3].

Séminaire de mathématiques

À la séance du 29 Janvier 1934 le programme et les dates des prochains exposés ont été définitivement fixés comme suit :

. . . . . .

6.	Représentation des groupes...	E.CARTAN	19 Février
7.	Structure des corps gauches...	DIEUDONNÉ	26 Février
8.	Nombres p-adiques...	WEIL	12 Mars
9.			16 Avril
10.	Arithmétique hypercomplexe im Grössen...	CHEVALLEY	30 Avril
11.			14 Mai
12	Loi de réciprocité...	X...	28 Mai

Les séances ont toujours lieu le lundi à 16h.30 à l'amphithéâtre Darboux de l'Institut Henri Poincaré ; elles sont suivies d'un thé et de discussions [4].

---

1. Cahier du fonds Henri Cartan, bibliothèque de l'IRMA.
2. Ce rectificatif (et celui concernant la référence à Artin) ont été ajoutés et figurent à la fin de l'exposé 1-D.
3. Une page ronéotée, archives de l'IHP.
4. Une page ronéotypée, archives de l'IHP.

Références

[Bur05] W. Burnside – « On the condition of reducibility of any group of linear substitutions », *Proc. Lond. Math. Soc.* **3** (1905), p. 430–434.

[Kru26] W. Krull – « Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen », *Sitzungsberichte Heidelberg* (1926).

[Noe29] E. Noether – « Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. », *Math. Z.* **30** (1929), p. 641–692.

[vdW31] B. van der Waerden – *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.