Séminaire de mathématiques 15 janvier 1934
Exposé 1-D, p. 1 à 14

ALGÈBRES DE MATRICES

par **Jean Dieudonné**

A. Définitions. Anneaux de matrices

1.– Matrices. Soit $\mathfrak{o}$ un anneau[1] ayant un élément unité. Une matrice de cet anneau est un tableau de mn éléments de l'anneau :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

Une matrice est *nulle* si tous ses éléments sont nuls.

Soient deux matrices A et B ayant chacune le même nombre de lignes et de colonnes. On pose :

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

Si λ est un nombre de $\mathfrak{o}$, le *produit* λA est défini par :

$$\lambda A = (\lambda\alpha_{ij}) \text{ et de même } A\lambda = (\alpha_{ij}\lambda)$$

Enfin, soient A et B deux matrices telles que le nombre des colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. On appelle alors *produit* AB la matrice

$$C = (\gamma_{hk}) \text{ où } \gamma_{hk} = \sum_i \alpha_{hi}\beta_{ik}$$

Toutes ces définitions s'expliquent d'elles-mêmes quand on considère une matrice A comme définissant une substitution linéaire :

$$\mathfrak{U} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Une telle substitution peut d'ailleurs elle-même s'écrire

$$\mathfrak{U} = A\mathfrak{V} \quad \text{où} \quad \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On déduit immédiatement des définitions les règles suivantes :

$$\begin{gathered} A + 0 = A \\ A + (B + C) = (A + B) + C \\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \\ (A + B)\lambda = A\lambda + B\lambda \\ A \cdot BC = AB \cdot C \\ A(B + C) = AB + AC \\ (B + C)A = BA + CA \end{gathered}$$

lorsque les opérations effectuées ont un sens.

Dans la suite de cette conférence, nous ne considérerons plus que des matrices[2] *carrées* d'ordre n.

2.–. *Toutes les matrices carrées d'ordre n dans un anneau $\mathfrak{o}$ forment un anneau, l'anneau de matrices complet (ou total) sur $\mathfrak{o}$.*

Cet anneau admet $\mathfrak{o}$ comme domaine d'opérateurs à droite et à gauche. Posons :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{[le 1 est sur la } i\text{ème ligne et la } j\text{ème colonne]}$$

On peut écrire toute matrice sous la forme :

$$A = (\alpha_{ij}) = \sum \alpha_{ij} e_{ij} = \sum e_{ij} \alpha_{ij}$$

2/3 et inversement. On n'a $A = 0$ que si $\alpha_{ij} = 0$ quelque soient i, j. Les e_{ij} sont dits *éléments de base* de l'anneau de matrices par rapport à $\mathfrak{o}$.

D'après la règle de multiplication des matrices, on a :

$$\begin{gathered} e_{ij} e_{hk} = 0 \text{ si } j \neq h \\ e_{ij} e_{jk} = e_{ik} \end{gathered}$$

L'anneau de matrices admet un *élément unité*, la matrice :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & \dots & \dots & & 1 \end{pmatrix} = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}$$

3.–. Supposons maintenant que $\mathfrak{o}$ soit un *corps* K. On désigne alors l'anneau de matrices d'ordre n sur K par K_n.

Théorème I. *K_n est un anneau simple, c'est dire qu'il n'existe pas d'autres idéaux bilatères que* (0) *et K_n lui-même.*[3]

En effet, si $\mathfrak{a}$ est un tel idéal et a un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{a}$ on a :

$$a = \sum_{ij} \alpha_{ij} e_{ij}$$

soit maintenant $\alpha_{\lambda\mu} \neq 0$, $\mathfrak{a}$ contient aussi :

$$\alpha_{\lambda\mu}^{-1} e_{h\lambda} a e_{\mu k} = e_{hk}$$

quels que soient h et k, donc $\mathfrak{a} = K_n$

Montrons que K_n peut être décomposé en une somme directe d'idéaux à gauche minima. Il est facile d'avoir ici une telle décomposition :

$$\ell_1 = (e_{11} + e_{21} + \cdots + e_{n1}) \text{ est un tel idéal.}$$

3/4

En effet :

$$e_{hk} e_{i1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ e_{h1} & \text{si } k = i \end{cases} \qquad \text{donc } e_{hk} e_{i1} \in \ell_1$$

par suite aussi :

$$x\ell_1 \subset \ell_1 \text{ quel que soit } x \in K_n$$

D'autre part ℓ_1 est minimum, car si $a \in \ell_1$ et $a \neq 0$ soit $a = \sum_i \alpha_i e_{i1}$ et si $\alpha_\lambda \neq 0$, ℓ_1 contient aussi

$$\alpha_\lambda^{-1} e_{h\lambda} a = e_{h1} \text{ quel que soit } h.$$

Donc tout élément a de ℓ_1 engendre tout l'idéal, ce qui montre que ℓ_1 est minima. Même raisonnement pour :

$$\ell_k = (e_{1k}[+]e_{2k}[+]\cdots[+]e_{nk})$$

d'où il suit que :

$$K_n = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n$$

somme directe de n idéaux à gauche.

B. Théorème fondamental de Macclagan [Maclagen]-Wedderburn

4.–. L'intérêt des anneaux de matrices réside dans le théorème fondamental de Macclagan-Wedderburn : *Toute algèbre simple est isomorphe à un anneau de matrices sur un corps.*

(Rappel de la définition d'une algèbre *simple* : anneau sans radical satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche, et n'ayant pas d'autre idéal bilatère que 0 et l'anneau lui-même).

La démonstration que nous allons donner, dûe [sic] à Artin et non publiée, se fait
4/5 en deux étapes.

5.– Première partie de la démonstration.

Définition. Un anneau $\mathfrak{o}$ avec élément unité est dit posséder un *système d'unités matricielles* e_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ si les e_{ij} sont dans $\mathfrak{o}$ et satisfont aux conditions :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} e_{ij}e_{k\ell} & = 0 \quad \text{si } j \neq k \\ e_{ij}e_{jk} & = e_{ik} \\ 1 & = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn} \end{cases}$$

Théorème. *Si un anneau possède un système d'unités matricielles e_{ij} il est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients dans le sous-anneau $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{o}$ composé des éléments de $\mathfrak{o}$ permutables avec tous les e_{ij}.*[4]

Formons les éléments de $\mathfrak{K}$. Soit $x \in \mathfrak{o}$. Posons :

$$y(x) = \sum_i e_{i1}xe_{1i}$$
$$ye_{jk} = e_{j1}xe_{1k} = e_{jk}y$$

Donc $y \in \mathfrak{K}$. Inversement, si $y \in \mathfrak{K}$ on a :

$$\sum_i e_{i1}ye_{1i} = \sum_i e_{ii}y = y$$

Ceci posé, à $x \in \mathfrak{o}$ faisons correspondre la matrice à coefficients dans $\mathfrak{K}$

$$\overline{x} = (a_{ij}) \text{ où } a_{ij} = y(e_{1i}xe_{j1})$$

on a $\overline{x + x'} = \overline{x} + \overline{x}'$

D'autre part,

$$y(e_{1i}xe_{j1}) = \sum_{\lambda} e_{\lambda i}xe_{j\lambda}$$

$$\text{Donc} \quad y(e_{1i}xx'e_{j1}) = \sum_{\lambda} e_{\lambda i}xx'e_{j\lambda} = \sum_{\lambda\mu} e_{\lambda i}xe_{\mu\lambda}e_{\lambda\mu}x'e_{j\lambda}$$
$$= \sum_{\mu} y(e_{1i}xe_{\mu 1})y(e_{1\mu}x'e_{j1})$$

et par suite $\overline{xx'} = \overline{x}\overline{x'}$ 5/6

Inversement, soit $M = (a_{ij})$, une matrice de l'anneau des matrices sur $\mathfrak{K}$. Il existe un seul élément x de $\mathfrak{o}$ tel que $\overline{x} = M$. En effet, si on écrit l'équation :

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda i} \cdot xe_{j\lambda} = a_{ij}$$

on en tire

$$a_{ij}e_{ij} = e_{ii}xe_{jj}$$
$$\sum_{ij} a_{ij}e_{ij} = \sum_{ij} e_{ii}xe_{jj} = x$$

Donc $x \to \overline{x}$ est une homomorphie.

6.– Deuxième partie de la démonstration. Soit maintenant $\mathfrak{S}$ une algèbre simple. Nous allons former un système d'unités matricielles dans $\mathfrak{S}$. D'après le 1er théorème de Macclagan-Weddeburn,[5] elle se décompose en une somme directe de n idéaux à gauche minima.

$$\mathfrak{S} = \sum_{i} \mathfrak{S}e_i$$
$$\text{avec } e_ie_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ e_i \text{ si } i = j \end{cases}$$
$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

Nous poserons

$$\mathfrak{S}_{ij} = e_i\mathfrak{S}e_j$$

C'est un module de $\mathfrak{S}$. (C'est même un sous-anneau, mais si $i \neq j$ le produit de deux nombres quelconques est 0).

Nous aurons à envisager des *produits* de modules. Il est clair, de façon générale, que si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modules d'un anneau $\mathfrak{o}$, les sommes de produits $\sum \alpha\beta$, 6/7
$\alpha \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{N}$ définissent un nouveau module qu'on désigne par $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Ce produit est associatif et distributif.

a) Etude de $\mathfrak{S}_{ii}$. D'une façon plus générale, soit $\mathfrak{S}$ un anneau, e un idempotent de $\mathfrak{S}$, et considérons la module $e\mathfrak{S}e$ qui est évidemment un sous-anneau de $\mathfrak{S}$, et n'est pas nul puisqu'il contient $e^3 = e \neq 0$. e est d'ailleurs unité de $e\mathfrak{S}e$.

Soit $\mathfrak{w}$ un idéal à gauche de $e\mathfrak{S}e$. On a

$$\mathfrak{w} = e\mathfrak{w} = \mathfrak{w}e$$

$$\text{d'où}\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{w} = \mathfrak{S}e\mathfrak{w}$$

$$\text{et}\qquad e\mathfrak{S}\mathfrak{w} = e\mathfrak{S}e\mathfrak{w} = \mathfrak{w}$$

la correspondance $\mathfrak{w} \rightleftarrows \mathfrak{S}\mathfrak{w}$ est donc biunivoque. Donc, si $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition du minimum (ou du maximum) pour les idéaux à gauche, il en est de même de $e\mathfrak{S}e$. De plus,

$$\mathfrak{S}\mathfrak{w}^2 = \mathfrak{S}\mathfrak{w}\cdot e\mathfrak{S}\mathfrak{w} = \mathfrak{S}\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{S}\mathfrak{w} = (\mathfrak{S}\mathfrak{w})^2$$

donc, *si* $\mathfrak{S}$ *est semi-simple,* $e\mathfrak{S}e$ *est aussi semi-simple.*

Supposons maintenant que $\mathfrak{S}e$ soit idéal à gauche *minimum.* On a :

$$\mathfrak{S}\mathfrak{w} = \mathfrak{S}\mathfrak{w}e \subset \mathfrak{S}e$$

Donc

$$\mathfrak{S}\mathfrak{w} = 0 \qquad \mathfrak{w} = e\mathfrak{S}\mathfrak{w} = 0 \qquad \text{ou } \mathfrak{S}\mathfrak{w} = \mathfrak{S}e \qquad \mathfrak{w} = e\mathfrak{S}e$$

Donc, *les seuls idéaux à gauche de* $e\mathfrak{S}e$ *sont* 0 *et* $e\mathfrak{S}e$. Par suite $e\mathfrak{S}e$ *est un corps*, car, si l'on considère un élément a de $e\mathfrak{S}e$, l'idéal à gauche engendré par a est $\neq 0$
7/8 donc est identique à $e\mathfrak{S}e$. Par suite, il existe un b tel que $ba = e$, $b \subset e\mathfrak{S}e$

Autrement dit, il existe un inverse à gauche et une unité, donc $e\mathfrak{S}e$ est bien un corps $\mathfrak{K}$.

Construction des e_{ij}. Supposons maintenant $\mathfrak{S}$ simple. On a

$$\mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{jk} = e_i\mathfrak{S}e_j\mathfrak{S}e_k$$

Mais $\mathfrak{S}e_j\mathfrak{S}$ est idéal bilatère dans $\mathfrak{S}$, et différent de 0, puisqu'il contient $e_j^3 = e_j \neq 0$, donc est $\equiv \mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{jk} = \mathfrak{S}_{ik} \qquad \mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{k,\ell} = e_i\mathfrak{S}e_je_k\mathfrak{S}e_\ell = 0 \quad (j \neq k)$$

On a : $\mathfrak{S}_{ii} \neq 0$. Donc, $\mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{ji} = \mathfrak{S}_{ii} \neq 0$ et par suite $\mathfrak{S}_{ij} \neq 0$ quels que soient e et j.

Posons $e_1 = e_{11}$. Choisissons dans $\mathfrak{S}_{i1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ un élément $e_{ii} \neq 0$. On a

$$e_{i1} \in e_i\mathfrak{S}e_1$$

$$\text{ou}\qquad e_{i1} = e_i\alpha e_1$$

$$\text{Donc,}\qquad e_ie_{i1} = e_i\alpha e_1 = e_{i1}$$

$$\mathfrak{S}e_ie_{i1} = \mathfrak{S}e_{i1} \neq 0$$

$$\text{De plus,}\qquad \mathfrak{S}e_{i1} = \mathfrak{S}e_i\alpha e_1 \subset \mathfrak{S}e_1$$

et $\mathfrak{S}e_{i1}$ est *idéal à gauche* dans $\mathfrak{S}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}e_{i1} &= \mathfrak{S}e_1 \\ \mathfrak{S}e_i e_{i1} &= \mathfrak{S}e_1 \qquad e_1\mathfrak{S}e_i \cdot e_{i1} = e_1\mathfrak{S}e_1 = \mathfrak{S}_{11} \\ \text{ou } \mathfrak{S}_{1i}e_{i1} &= \mathfrak{S}_{11} \end{aligned}$$

Il existe donc dans $\mathfrak{S}_{1i}$ un e_{1i} tel que

$$e_{1i}e_{i1} = e_{11}$$

8/9

$$\begin{aligned} \text{Posons } e_{ij} &= e_{i1}e_{1j} \\ \text{On a } e_{ij} &\in \mathfrak{S}_{i1}\mathfrak{S}_{1j} = \mathfrak{S}_{ij} \\ \text{Puis } (j \neq k) \quad e_{ij}e_{k\ell} &\in \mathfrak{S}_{ij}\mathfrak{S}_{k\ell} = 0 \\ e_{ij}e_{jk} &= e_{i1}e_{1j}e_{j1}e_{1k} = e_{i1}e_{11}e_{1k} \\ \text{Mais } e_{i1}e_{11} &= e_i\alpha e_{11} = e_{i1} \\ \text{Donc } e_{ij}e_{jk} &= e_{ik} \\ \text{Par suite } e_{ii}^2 &= e_{ii} \end{aligned}$$

et comme $e_{ii} \in \mathfrak{S}_{ii}$ le seul idempotent du corps $\mathfrak{S}_{ii}$ est e_i donc $e_{ii} = e_i$ et par suite :

$$1 = e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}$$

Les conditions (I) sont toutes vérifiées. D'après le théorème d'Artin[6], $\mathfrak{S}$ est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n sur le sous-anneau $\mathfrak{K}$ des nombres de $\mathfrak{S}$ permutables avec les e_{ij}. Ici, il est facile de voir que $\mathfrak{K}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{11}$, donc est un *corps*. En effet, si :

$$y \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{S} \qquad \overline{y} = e_{11}ye_{11} \in \mathfrak{S}_{11}$$

et à yy' correspond $\overline{yy}'$, à $y + y'$, $\overline{y} + \overline{y}'$.

D'autre part, on a pour tout $\overline{y} \subset \mathfrak{S}_{11}$ en résolvant :

$$\overline{y} = e_{11}ye_{11}$$

On en tire $\sum e_{i1}\overline{y}e_{1i} = \sum e_{i1}ye_{1i} = \sum e_{ii}y = y$ et la valeur de y obtenue est bien
dans $\mathfrak{K}$. Donc il y a bien isomorphie entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{S}_{11}$ ce qui démontre complètement le 9/10
deuxième théorème de Wedderburn. Le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{S}$ est contenu dans $\mathfrak{K}$ d'après la définition de $\mathfrak{K}$.

En résumé, la recherche de la structure des algèbres semi-simples est ramenée, grâce aux théorèmes de Wedderburn, à celle des *corps gauches*.

C. Systèmes hypercomplexes

7.– Définitions. Soit P un corps commutatif. On appelle *système hypercomplexe sur* P un anneau $\mathfrak{o}$ qui est un P-module et dont les éléments sont permutables avec ceux de P ; autrement dit,

$$\mathfrak{o} = b_1 P + b_2 P + \cdots + b_n P$$

tout élément de $\mathfrak{o}$ ayant la forme

$$a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \cdots + b_n \lambda_n$$

avec $\lambda_i \in P$ et les b_i étant linéairement indépendants par rapport à P (si $a = 0$, $\lambda_i = 0$ quel que soit i).

n est le *degré* par rapport à P de $\mathfrak{o}$, les b_i formant une *P-base.* Tout système de n formes indépendantes en b_i est une autre P-base de $\mathfrak{o}$. La loi de multiplication des b_i donne celle de tous les nombres de $\mathfrak{o}$. Elle doit seulement satisfaire à la condition d'associativité :

$$(b_\lambda \cdot b_\mu) \cdot b_\nu = b_\lambda \cdot (b_\mu \cdot b_\nu)$$

8.– Produit de deux systèmes hypercomplexes. Soient

$$\mathfrak{o}_1 = b_1 P + b_2 P + \cdots + b_m P$$
$$\mathfrak{o}_2 = c_1 P + c_2 P + \cdots + c_n P$$

10/11 deux systèmes hypercomplexes sur P. On appelle

$$\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{o}_2 = \sum_{\lambda\mu} b_\lambda c_\mu P$$

leur *produit.*[7] C'est un système hypecomplexe ayant pour base les $b_\lambda c_\mu$ et où les b_λ sont interchangeables avec les c_μ

$$b_\lambda c_\mu b_\nu c_\rho = (b_\lambda b_\nu) \cdot (c_\mu c_\rho) = (c_\mu c_\rho) \cdot (b_\lambda b_\nu)$$

Tout élément du produit $\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{o}_2$ s'écrit

$$\sum \alpha_{\lambda\mu} b_\lambda b_\mu = \sum b'_\mu b_\mu = \sum b_\lambda c'_\lambda \qquad b'_\mu \in \mathfrak{o}_1, \quad c'_\lambda \in \mathfrak{o}_2$$

et inversement. Donc $v_1 \times v_2$ est indépendant des bases choisies. On a :

$$\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{o}_2 = \mathfrak{o}_2 \times \mathfrak{o}_1 \qquad (\mathfrak{o}_1 \oplus \mathfrak{o}_2) \times \mathfrak{o}_3 = \mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{o}_3 \oplus \mathfrak{o}_2 \times \mathfrak{o}_2 \qquad \mathfrak{o}_1 \times (\mathfrak{o}_2 \times \mathfrak{o}_3) = (\mathfrak{o}_1 \times \mathfrak{o}_2) \times \mathfrak{o}_3$$

Comme cas particuliers de systèmes hypercomplexes figurent les *surcorps finis* (commutatifs ou non) de P. Si Λ est un tel surcorps on a :

$$\mathfrak{o}_1 \times \Lambda = b_1 \Lambda + b_2 \Lambda + \cdots + b_m \Lambda = \Lambda b_1 + \Lambda b_2 + \cdots + \Lambda b_m \tag{1}$$

au lieu de $\mathfrak{o} \times \Lambda$ on écrit aussi[8] $\mathfrak{o}_\Lambda$. La définition (1) s'applique encore lorsque Λ est un *corps infini.* On désigne encore l'anneau obtenu par $\mathfrak{o}_\Lambda$ ou $\mathfrak{o} \times \Lambda$ (ce qui n'est plus un système hypercomplexe sur P).

Un système hypercomplexe ou un produit de tels systèmes satisfait toujours aux conditions maximale et minimale.

9.– Systèmes semblables. Soit $\mathfrak{S}$ un système simple, $\mathfrak{K}$ le corps formé des éléments de $\mathfrak{S}$ permutables avec les e_{ij} et P le corps premier contenu dans $\mathfrak{K}$ (ou plus 11/12
généralement un corps commutatif de $\mathfrak{K}$), on peut écrire :

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times P_n$$

Tous les systèmes simples pour lesquels les corps $\mathfrak{K}$ correspondants sont isomorphes, sont dits *semblables.* Si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont deux tels systèmes, on écrit :

$$\mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}'$$

En particulier, on a $\mathfrak{S}' \sim \mathfrak{K}$

La notion de produit de systèmes hypercomplexes permet d'établir dans quelle mesure la structure d'un système simple $\mathfrak{S}$ dépend de celle du corps correspondant $\mathfrak{K}$, en étudiant la manière dont se modifie $\mathfrak{S}$ quand on remplace $\mathfrak{K}$ par un surcoprs Σ de $\mathfrak{K}$, autrement dit quand on fait le produit $\mathfrak{S} \times \Sigma$

On est donc amené à étudier les *produits de systèmes simples.* On obtient les résultats suivants :

10.– a) produit de deux corps commutatifs $\mathfrak{S}$ et Σ sur P ($\mathfrak{S}$ fini). Si $\mathfrak{S}$ est de plus *séparable* (ses éléments racines d'équations irréductibles dans P et sans racines multiples) soit Θ un élément primitif de $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S} = P + P\Theta + \cdots + P\Theta^{n-1}$), $\varphi(z)$ le polynome irréductible de $P[z]$ dont Θ est une racine. Si $\varphi(z)$ se décompose dans $\Sigma[z]$ en r polynomes irréductibles $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, $\mathfrak{S} \times \Sigma$ est *la somme directe des r surcorps de $\mathfrak{S}$ engendrés par les racines de ces polynomes.*

Si $\mathfrak{S}$ n'était pas séparable, $\mathfrak{S} \times \Sigma$ pourrait avoir un radical. 12/13

11.– b) Produit d'un corps non commutatif $\mathfrak{S}$ de degré fini par rapport à P par un corps commutatif Σ. On suppose que le centre $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{S}$ est un *surcorps séparable* de P.

Le centre de $\mathfrak{S} \times \Sigma$ *n'est autre que* $\mathfrak{Z} \times \Sigma$. En effet, supposons d'abord Σ fini par rapport à P. Alors,

$$\Sigma = \sigma_1 P + \cdots + \sigma_n P \quad \sigma_i \quad P\text{-base de } \Sigma$$
$$\text{et } \mathfrak{S} \times \Sigma = \sigma_1 \mathfrak{S} + \cdots + \sigma_n \mathfrak{S}$$

Soit a un élément du centre de $\mathfrak{S} \times \Sigma$

$$a = \sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_n u_n \qquad u_i \subset \mathfrak{S}$$

a doit être commutatif avec tous les éléments de $\mathfrak{S} \times \Sigma$ en particulier, avec tous les éléments de $\mathfrak{S}$. Si $v \in \mathfrak{S}$ est quelconque, on doit avoir :

$$\sigma_1 u_1 v + \cdots + \sigma_n u_n v = \sigma_1 v u_1 + \cdots + \sigma_n v u_n$$

d'où $u_i v = v u_i$ quels que soient i et v donc $u_i \in \mathfrak{Z}$, $a \in \mathfrak{Z} \times \Sigma$. Inversement, si a est un nombre quelconque de $\mathfrak{Z} \times \Sigma$, soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} \times \Sigma &= z_1 \Sigma + \cdots + z_\mu \Sigma && z_i\ P\text{-base de } \Sigma \\ a &= z_1 \sigma_1 + \cdots z_\mu \sigma_\mu \\ \text{alors si } v &= \sigma'_1 u_1 + \cdots + \sigma'_q u_q && u_i\ P\text{-base de } \mathfrak{S} \end{aligned}$$

est un nombre quelconque de $\mathfrak{S} \times \Sigma$, on a évidemment

$$av = \sum \sigma_i \sigma'_j z_i u_j = \sum \sigma'_j \sigma_i u_j z_i = va$$

Soit maintenant Σ *infini algébrique* sur P. Soit a un élément du centre de $\mathfrak{S} \times \Sigma$. On peut écrire

$$a = u_1 \sigma_1 + \cdots + u_\mu \sigma_\mu \qquad u_i\ P\text{-base de } \mathfrak{S}$$

13/14 Mais $\sigma_1, \ldots, \sigma_\mu$ engendrent un corps fini algébrique sur P, soit Σ_1 ($P \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma$). Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ une P-base de Σ_1. On peut écrire :

$$a = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \qquad v_i \in \mathfrak{S}$$

et on montre comme ci-dessus que

$$a \subset \mathfrak{Z} \times \Sigma_1 \subset \mathfrak{Z} \times \Sigma$$

et inversement, la démonstration ci-dessus établit que tout nombre de $\mathfrak{Z} \times \Sigma$ fait partie du centre.

On montre ensuite (Voir Van der Waerden, BD.II, p.175) que *tout idéal bilatère de* $\mathfrak{S} \times \Sigma$ *est engendré par un idéal bilatère de* $\mathfrak{Z} \times \Sigma$, c'est à dire que si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{S} \times \Sigma$, il existe q nombres $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q$ de $\mathfrak{Z} \times \Sigma$ tels que $\mathfrak{a} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q)$ (tout nombre de $\mathfrak{a}$ est de la forme $\ell_1 \delta_1 + \cdots + \ell_q \delta_q$, $\delta_q \in \mathfrak{S}$)

Si un idéal bilatère est simple dans $\mathfrak{S} \times \Sigma$, l'idéal correspondant de $\mathfrak{S} \times \Sigma$ est aussi simple et inversement.

Cela étant, $\mathfrak{S} \times \Sigma$ n'a pas de radical, sans quoi, le radical, étant bilatère, serait engendré par un idéal bilatère nilpotent de $\Sigma \times \mathfrak{S}$, ce qui est impossible d'après a).

Donc $\mathfrak{S} \times \Sigma$ est semi-simple. D'après a) son centre $\mathfrak{Z} \times \Sigma$ se décompose en une somme directe de r ($r \leqslant n =$ degré de $\mathfrak{Z}$ sur P) corps commutatifs sur Σ. *Donc* $\mathfrak{S} \times \Sigma$ *se décompose en une somme directe de r algèbres simples.*

En particulier, *si* $\mathfrak{Z} = P$, $r = 1$, $\mathfrak{S} \times \Sigma$ *est une algèbre simple isomorphe à un*
14/15 *anneau complet de matrices dans un corps* $\mathfrak{K} \supseteq \Sigma$ *de degré fini sur* Σ.

Si on prend, en particulier, pour Σ le corps Ω *algébriquement fermé* sur P, $\mathfrak{K}$ est un corps (gauche) de degré fini sur Ω ; mais un tel corps est nécessairement $\equiv \Omega$, car si x est un de ses éléments, on a

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p \qquad \lambda_i \subset \Omega$$

x satisfait à une équation de degré $p+1$ à coefficients dans Ω,

$$f(x) \equiv \alpha_0 x^{p+1} + \alpha_1 x^p + \cdots + \alpha_p x = 0$$

non tous nuls. Mais $f(x)$ se décompose en facteurs linéaires dans $\Omega[x]$ et comme $\mathfrak{K}$ n'a pas de diviseurs de 0, x annule un de ces facteurs, donc est dans Ω.

Donc, $\mathfrak{S} \times \Omega$ est une algèbre de matrices d'ordre m à coefficients dans Ω. Son degré sur Ω est donc un carré m^2. Comme c'est aussi le degré de $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{Z}$, on voit qu'*un corps gauche a toujours un degré carré parfait par rapport à son centre.* m est l'*indice* du corps.

12.– c) Produit de deux corps gauches finis $\mathfrak{S}$ et Σ de centres $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ ($\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ séparables). On voit comme ci-dessus que $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}'$ est le centre de $\mathfrak{S} \times \Sigma$; d'autre part, on montre aussi que tout idéal bilatère de $\mathfrak{S} \times \Sigma$ est engendré par un idéal bilatère de $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}'$. Donc, $\mathfrak{S} \times \Sigma$ est somme directe d'algèbres simples en nombre égal au nombre de corps dont la somme directe forme $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z}'$. 15/16

13.– d) Produit de deux algèbres simples. On a $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times P_r$, $\Sigma = \mathfrak{K}' \times P_s$, d'où

$$\mathfrak{S} \times \Sigma = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}' \times P_r \times P_s$$

On a : $P_r \times P_s = P_{rs}$.

En effet, P_r est engendré par les r^2 quantités e_{ij}, P_s par les s^2 quantités $e'_{k\ell}$, donc P_{rs} par les $r^2 s^2$ quantités $e_{ij,k\ell} = e_{ik} e'_{j\ell}$

$$\begin{aligned} \text{avec } e_{ij,kl} e_{mn,pq} &= e_{ik} e'_{j\ell} e_{mp} e'_{nq} \\ &= e_{ik} e_{mp} e'_{jk} e'_{nq} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \text{ ou } \ell \neq n \\ e_{ip} e'_{jq} = e_{ij,pq} & \text{si } k = m, \ell = n \end{cases} \end{aligned}$$

Soit α le numéro d'une paire $i\ j$, allant de 1 à rs, β celui de la paire $k\ \ell$, et posons $e_{ij,k\ell} = e_{\alpha\beta}$. On a

$$e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \gamma \\ e_{\alpha\delta} & \text{si } \beta = \gamma \end{cases}$$

Donc, *les $e_{\alpha\beta}$ sont un système d'unités matricielles.* $P_r \times P_s$ est donc isomorphe à P_{rs}.

Si $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ sont finis sur P, on a, d'après b)

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}' &= K'_{r'} \oplus K''_{r''} \oplus \cdots \\ \text{d'où } \mathfrak{S} \times \Sigma &= (K'_{r'} \oplus K''_{r''} \oplus \cdots) \times P_{rs} \\ &= K'_{r'rs} \oplus K''_{r''rs} \oplus \cdots \end{aligned}$$

En particulier, supposons que $P = \mathfrak{Z}$, *centre de* $\mathfrak{K}$, et de plus que $(s = 1)$ $\Sigma = \mathfrak{K}'$ soit un *corps algébrique commutatif* (fini ou infini) sur $\mathfrak{Z}$. Alors, d'après b) 16/17

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} \times \Sigma &= K'_{r'} \qquad K' \supseteq \Sigma \\ \mathfrak{S} \times \Sigma &= K'_{r'r} \end{aligned}$$

donc *une algèbre simple* $\mathfrak{S}$ *reste simple par extension algébrique* Σ *du centre* $\mathfrak{Z}$. Le corps associé $\mathfrak{K}$ devient une algèbre simple, anneau complet de matrices d'ordre r' dans un corps $\mathfrak{K} \supseteq \Sigma'$ et $\mathfrak{S}$ devient un anneau complet de matrices d'ordre rr' dans le même corps.

On voit en particulier, que toutes les algèbres semblables se comportent de la même manière lorsqu'on fait le produit par un corps Σ.

On peut continuer en prenant une extension T de Σ (qui est le nouveau centre), $\mathfrak{K}'$ devient un anneau de matrices d'ordre r'' dans $\mathfrak{K}'' \supseteq T$, $\mathfrak{S} \times T$ devient un anneau de matrices d'ordre $rr'r''$ dans le même coprs.

Lorsqu'en continuant ainsi, on arrive à Ω, corps algébriquement fermé, $\mathfrak{S} \times \Omega$ devient un anneau de matrices d'ordre mr dans Ω (m indice de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{Z}$)

En général, il existe un corps $T \subset \Omega$ pour lequel $\mathfrak{K} \times T$ est un anneau de matrices *dans T lui-même.*

$$\mathfrak{K} \times T = T \times P_n$$

alors si U est un surcorps de T, on a[9]

$$\mathfrak{K} \times U = \mathfrak{K} \times T \times U = T \times U \times P_n = U \times P_n$$

C'est encore un anneau de matrices de même ordre dans U, en particulier si $U = \Omega$ on voit que $n = m$. T est dit *corps de décomposition de* $\mathfrak{K}$ (et de $\mathfrak{S}$ et en général de toutes les algèbres semblables à $\mathfrak{K}$). Ils jouent un grand rôle dans l'étude des corps
17/ gauches.

Rectification

(1) La démonstration donnée au paragraphe 4, indiquée comme inédite, se trouve à quelques détails près, dans un mémoire d'Arton [sic], publié dans les « Abhandlungen » du séminaire de Hambourg (1926).[10]

(2) Pour se conformer à la terminologie adoptés dans les conférences suivantes, remplacer partout le mot *degré* par *rang* lorsqu'il s'agit d'un système hypercomplexe ou d'un corps non *commutatif.*[11]

Notes

1. Les références citées dans cet article sont des articles de Wedderburn [Wed05] et d'Artin [Art27]. Les caractères ajoutés à la main ont été décryptés à l'aide des notations de van der Waerden dans [vdW31].
2. Le texte dactylographié disait « matières »...
3. Ce théorème porte un numéro. Il y a un seul autre théorème dans l'exposé, et celui-là n'a pas de numéro.
4. Cet énoncé, dont Dieudonné nous dit qu'il va exposer une démonstration due à Artin, est appelé théorème d'Artin à la page 9 (de l'exposé).

5. Il s'agit du théorème de Wedderburn présenté dans le § 6 de l'exposé 1-C.
6. Il s'agit du théorème (non numéroté) de la page 5 de l'exposé.
7. C'est le produit tensoriel qui est défini ici, sous cette notation (ambiguë) $\times$, qu'utilisait déjà van der Waerden. Elle suffira jusqu'à ce que Whitney étudie le produit tensoriel de deux groupes commutatifs (**Z**-modules) dans [Whi38] et introduise la notation $A \circ B$. Celle-ci sera utilisée quelque temps aux États-Unis (par exemple dans [EM42]). En 1947, un article de Dieudonné [Die47] et le chapitre III de l'algèbre de Bourbaki [Bou48] (qui suivit immédiatement) imposeront la notation $\otimes$, dont on peut donc attribuer la maternité à Bourbaki.
8. Cette notation, plus lisible pour les mathématiciens d'aujourd'hui, n'est plus utilisée dans cet exposé, mais réapparaîtra dans le suivant.
9. Les utiles remarques « $T \times P_n = T_n$ (T pris comme corps de base) » et, pour la ligne suivante, « $U \times P_n = T_n \times U = U_n$ (idem) » ont été ajoutées par un lecteur ou par l'auteur sur l'exemplaire de l'IHP.
10. En 1927, en fait, voir la référence précise dans la bibliographie. Cette rectification est due à Weil. Voir les archives à la fin de l'exposé 1-E.
11. Cette rectification a été décidée à la suite d'une discussion lors de l'exposé 1-E. Voir les archives ci-dessous.

Des archives du séminaire...

Compte rendu de la séance du 15 Janvier 1934

1. La séance est ouverte à 16h.30. Nouveaux venus : MM. de Pange, Châtelet, Ullmo, Bauer, Proca.

2. M.Julia donne la parole à M.Dieudonné qui expose de 16h.30 à 17h.45 la théorie des algèbres de matrices.

3. M.Julia remercie M.Dieudonné de son exposé très riche et très net.

4. M.Cartan demande si Wedderburn considérait dans son mémoire des systèmes aussi généraux que ceux dont il a été question dans l'exposé. Il rappelle qu'en 1898 il a étudié les systèmes hypercomplexes construits à partir de l'algèbre des nombres ordinaires et a ainsi démontré le théorème de Wedderburn dans un cas particulier [(1)].

4 [sic]. Weil fait remarquer que la généralisation des systèmes hypercomplexes considérés par M.Cartan était nécessaire pour leur application à l'Arithmétique. Encore un exemple d'études dans un domaine qui ont leur répercussion dans un autre [(2)].

5. Thé. Conversations. La séance est levée à 18h.30 [(3)].

---

1. Les articles d'Élie Cartan sont [Car97a, Car97b, Car98]. Au début de son article [Wed08], Wedderburn expliquait très clairement la situation : Cartan, dans son *fundamental and far-reaching memoir*, avait utilisé des méthodes qui ne fonctionnaient que sur les rationnels. Il est plus qu'étonnant que vingt-six ans après, Cartan ait paru découvrir ces travaux.
2. Un credo de Weil.
3. Une page ronéotypée, archives de l'IHP.

Références

[Art27] E. Artin – « Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn », *Abhandlungen Hamburg* **5** (1927), p. 245–250.

[Bou48] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 3*, Hermann, Paris, 1948.

[Car97a] É. Cartan – « Sur les systèmes de nombres complexes », *C. R. Acad. Sc.* **124** (1897), p. 1217–1220.

[Car97b] ———, « Sur les systèmes réels de nombres complexes », *C. R. Acad. Sc.* **124** (1897), p. 1296–1297.

[Car98] ———, « Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **12** (1898), p. B1–B99.

[Die47] J. Dieudonné – « Sur les produits tensoriels », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **64** (1947), p. 101–117 (1948).

[EM42] S. Eilenberg & S. MacLane – « Natural isomorphisms in group theory », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **28** (1942), p. 537–543.

[vdW31] B. van der Waerden – *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.

[Wed05] J. H. M. Wedderburn – « A theorem on finite algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), p. 349–352.

[Wed08] ———, « On hypercomplex numbers », *Proc. Lond. Math. Soc.* **6** (1908), p. 77–118.

[Whi38] H. Whitney – « Tensor products of Abelian groups », *Duke Math. J.* **4** (1938), p. 495–528.