LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

4. Année 1936-1937
Travaux d'Élie Cartan

Paul Dubreil

Algèbres de Lie (suite)

Séminaire de mathématiques (1936-1937), Exposé 4-J, 19 p.
<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1936-1937__4__J_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 26 avril 1937
Exposé 4-J, p. 1 à 19

ALGÈBRES DE LIE (SUITE)

par **Paul Dubreil**

I.– Propriétés des racines d'un groupe semi-simple ou simple. On a vu[1] dans la conférence précédente qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une décomposition en sous-espaces vectoriels

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_\beta + \cdots$$

où $\mathfrak{g}_0$ est d'ordre n, est sous-groupe nilpotent maximum et où les sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ sont invariants par tout élément de $\mathfrak{g}_0$. On peut choisir dans $\mathfrak{g}$ une base $(h_1, \dots, h_n, u_\alpha, u'_\alpha, \dots, u_\beta, u'_\beta, \dots)$ telle que la matrice H correspondant à un élément quelconque $h = \lambda^i h_i$ de $\mathfrak{g}_0$ dans la représentation adjointe soit de la forme

$$H = \left|\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & & \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \\ \hline\end{array} & & 0 \\ & \begin{array}{|ccc|}\hline \alpha & \star & \star \\ & \alpha & \star \\ 0 & & \alpha \\ \hline\end{array} & \\ 0 & & \begin{array}{|cc|}\hline \beta & \star \\ 0 & \beta \\ \hline\end{array} \end{array}\right|$$

les racines α étant des formes linéaires par rapport aux λ^i, $\alpha = a_i \lambda^i$. Les vecteurs $u_\alpha, u_\beta, \dots$ sont les vecteurs de poids $\alpha, \beta, \dots$

La classification des groupes simples, qui est l'objet de cette conférence, repose sur les propriétés que possèdent ces racines α lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple ou simple. Nous 1/2
allons les déduire du second critère de Cartan : $\sigma_2(x) = \operatorname{tr} . X^2$ n'est pas dégénérée[2] où x est un élément général de $\mathfrak{g}$:

$$x = x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha = \lambda^i h_i + \sum_{\alpha \neq 0} (\xi^\alpha u_\alpha + \xi'^\alpha u'_\alpha + \cdots)$$

On a :

$$\sigma_2(x) = \operatorname{tr} X^2 = \operatorname{tr} X_0^2 + \sum_{\alpha\neq 0} \operatorname{tr} X_\alpha X_{-\alpha}$$
$$= \Phi(\lambda) + \sum_{\alpha\neq 0} (\xi^\alpha \xi^{-\alpha} \operatorname{tr} U_\alpha U_{-\alpha} + \xi^\alpha \xi'^{-\alpha} \operatorname{tr} U_\alpha U'_{-\alpha} + \cdots)$$

car $\operatorname{tr} U_\alpha U_\beta \neq 0$ si $\alpha+\beta \neq 0$ puisque $U_\alpha U_\beta$ transforme un vecteur de $\mathfrak{g}_\rho$ en un vecteur de $\mathfrak{g}_{\rho+\alpha+\beta}$.

La forme quadratique σ_2 n'étant pas dégénérée, contient effectivement les r variables ξ, η, cela nous donne :

1) puisque $\Phi(\lambda)$ est la somme des carrés des racines α : *il y a exactement n racines α linéairement indépendantes.* Ces racines ne s'annulent toutes que pour $\lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0$, c'est-à-dire pour $h = 0$. Or on a vu qu'elles sont nulles pour tout
2/3 élément de $\mathfrak{g}'_0$. On a don $\mathfrak{g}'_0 = 0$: $\mathfrak{g}_0$ *est abélien.*

2) tous les ξ^α doivent figurer, donc : *$-\alpha$ est racine en même temps que α, et les quantités* $\operatorname{tr} U_\alpha U_{-\alpha}, \operatorname{tr} U_\alpha U'_{-\alpha}, \ldots$ *ne sont pas toutes nulles :* soit $U^\star_{-\alpha}$ celui des éléments de base de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $\operatorname{tr} U_\alpha U^\star_{-\alpha} \neq 0$.

Pour pouvoir donner les deux dernières propriétés des racines des groupes semi-simples, à savoir : *α est racine* simple et $m\alpha$ (o[ù] m est un nombre fixe $\neq \pm 1, 0$) *n'est pas racine*, nous avons besoin de quelques propositions préliminaires, qui seront d'ailleurs fondamentales pour la suite ; en particulier, il nous faut avoir la valeur de $\operatorname{tr} U_\alpha U^\star_{-\alpha}$. Pour cela, considérons une racine ρ différente de α, et supposons que $\rho - \alpha$ *n'est pas racine* mais que $\rho + p\alpha$ est racine pour p entier positif ou nul, jusqu'à une certaine valeur P. L'ensemble de ces racines sera appelé une suite $-(\alpha)$.

Soit $v_0 = u_\rho$ le vecteur de poids ρ dans $\mathfrak{g}_0$. Prenons la suite de vecteurs :

$$v_0, \quad v_1 = [u_\alpha\, v_0] = U_\alpha v_0, \ldots\ldots, v_{p+1} = U_\alpha v_p, \ldots$$

Si v est un vecteur de poids Λ, $U_\alpha v$ est un vecteur de poids $\Lambda + \alpha$, puisque :

$$H \cdot U_\alpha v = [H\, U_\alpha] v + U_\alpha H v = (\alpha + \Lambda) \cdot U_\alpha v$$

3/4 On a donc :

$$H v_p = (\rho + p\alpha) v_p \tag{1}$$

Appliquons à v_{p+1} la transformation $U^\star_{-\alpha}$:

$$U^\star_{-\alpha} v_{p+1} = \Big[u^\star_{-\alpha}\, [u_\alpha\, v_p]\Big] = -\Big[u_\alpha\, [v_p\, u^\star_{-\alpha}]\Big] - \Big[v_p\, [u^\star_{-\alpha}\, u_\alpha]\Big]$$

ou, en posant $h^\star_\alpha = [u_\alpha\, u^\star_{-\alpha}]$:

$$U^\star_{-\alpha} v_{p+1} = \Big[u_\alpha\, [u^\star_{-\alpha}\, v_p]\Big] - H^\star_\alpha v_p \tag{2}$$

Mais $[u^\star_{-\alpha}\, v_0]$ étant nul, (2) s'écrit pour $p = 0$:

$$U^\star_{-\alpha} v_1 = -E^\star_\alpha v_0 = -\rho^\star_\alpha v_0$$

en désignant par $\psi^\star_\alpha$ la valeur que prend pour $h = h^\star_\alpha$ une forme linéaire $\psi(\lambda)$. On en déduit de proche en proche :

$$U^\star_{-\alpha} v_{p+1} = U^\star_{-\alpha} U_\alpha v_p = \mu_{p+1} v_p \tag{3}$$

avec

$$\begin{cases} \mu_1 & = -\rho^\star_\alpha \\ \mu_{p+1} & = \mu_p - (\rho^\star_\alpha + p\alpha^\star_\alpha) = -(p+1)\Big(\rho^\star_\alpha + \dfrac{p}{2}\alpha^\star_\alpha\Big) \end{cases} \tag{4}$$

Avant d'utiliser ces formules, nous devons remarquer qu'elles subsistent à de très légères modification près, si on fait les hypothèses : 4/5

$$\rho = \alpha \qquad v_0 = u'_\alpha \qquad \text{(2ème vecteur de base de } \mathfrak{g}_\alpha)$$

On a cette fois la congruence :

$$Hv_0 \equiv \alpha v_0 \pmod{u_\alpha} \qquad \text{soit : } Hv_0 = \alpha v_0 + k u_\alpha \tag{1$'$}$$

et on voit sans peine que :

$$Hv_p = (p+1)\alpha v_p \qquad \text{pour } p \geqslant 1 \tag{1$''$}$$

D'autre part, la relation (2) pour $p = 0$ donne ici, en remarquant que $[u^\star_{-\alpha}, v_0]$ est un élément h' de $\mathfrak{g}_0$, la *congruence :*

$$U^\star_{-\alpha} v_1 \equiv \mu_1 v_0 = -\alpha^\star_\alpha v_0 \pmod{u_\alpha} \tag{3$'$}$$

On a ensuite les *égalités :*

$$U^\star_{-\alpha} v_{p+1} = \mu_{p+1} v_p = -\frac{(p+1)(p+2)}{2}\,\alpha^\star_\alpha v_p \qquad \text{pour } p \geqslant 1 \tag{3$''$}$$

Revenons aux premières hypothèses. Soit $\ell \geqslant 0$ le plus petit entier tel que l'on ait : $v_{\ell+1} = 0$; ℓ sera appelé la *longueur* de la suite (α) considérée. La relation (3), pour $p = \ell$, donne :

$$\mu_{\ell+1} = 0$$

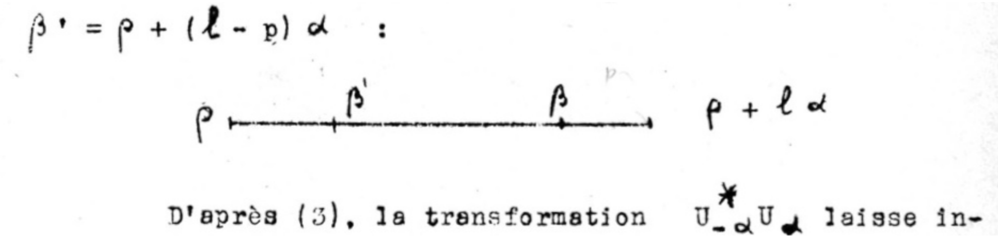
d'où 5/6

$$\ell = -\frac{2\rho^\star_\alpha}{\alpha^\star_\alpha} \tag{5}$$

et si $\beta = \rho + p\alpha$ est une racine quelconque de la suite on a :

$$\ell - 2p = -\frac{2\beta^\star_\alpha}{\alpha^\star_\alpha}$$

Le nombre $\dfrac{2\beta^\star_\alpha}{\alpha^\star_\alpha}$ *est donc un entier. De plus, les quantités* $\beta - k\alpha$ *où l'entier* k *prend toutes les valeurs comprises entre* 0 *et* $\dfrac{2\beta^\star_\alpha}{\alpha^\star_\alpha}$ *sont des racines :* ce qont les racines de la suite (α) comprises entre $\beta = \rho + p\alpha$ et $\beta' = \rho + (\ell - p)\alpha$:[3]



D'après (3), la transformation $U^\star_{-\alpha}U_\alpha$ laisse invariant l'espace $\mathcal{R}_1 = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ et sa trace dans cet espace est

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{R}_1} U_{-\alpha^\star}U_\alpha = \sum_{p=1}^{\ell} \mu_p = \sum_{p=1}^{\ell} \frac{p(\ell-p+1)}{2}\,\alpha^\star_\alpha = \frac{\alpha^\star_\alpha}{2}\cdot\frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)}{6}$$

On peut maintenant faire le même raisonnement dans l'espace facteur $\mathfrak{g}/\mathcal{R}_1$; on
6/7 aura dans cet espace (où les poids sont toujours des racines de $\mathfrak{g}$) une nouvelle suite (α) de longueur $\ell' \geqslant 0$, et ainsi de suite. On voit ainsi que

1) les propriétés précédentes des nombres $\dfrac{2\beta^\star_\alpha}{\alpha^\star_\alpha}$ sont valables pour toute racine β ;

2) la trace de la transformation $U^\star_{-\alpha}U_\alpha$ dans l'espace $\mathfrak{g}$ lui-même est :

$$\operatorname{tr} U^\star_{-\alpha}U_\alpha = \frac{\alpha^\star_\alpha}{2}\sum\frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)}{6}$$

la sommation étant étendue aux suites $-(\alpha)$ considérées successivement dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}/\mathcal{R}_1$, etc... Comme on a

$$\operatorname{tr} U_\alpha U^\star_{-\alpha} = \operatorname{tr} U^\star_{-\alpha}U_\alpha \neq 0$$

il vient

$$\alpha^\star_\alpha \neq 0$$

Nous allons en déduire que la racine α est nécessairement *simple*. En effet s'il en était autrement, $\mathfrak{g}_\alpha$ admettrait au moins un deuxième vecteur de base $u'_\alpha \not\equiv 0$ (mod.u_α). La suite des v formés à partir de $v_0 = u'_\alpha$ ne comprendrait d'après $(3'')$ que des vecteurs différents de 0 quel que soit $p > 0$, ce qui est absurde. Toutes les racines
7/8 sont donc simples, et on a :

$$U^\star_{-\alpha} = U_{-\alpha} \qquad \operatorname{tr} U_\alpha U_{-\alpha} = N_\alpha \neq 0 \qquad \alpha^\star_\alpha = \alpha_\alpha \qquad \alpha_\alpha \neq 0$$

Enfin, si $m\alpha$, $-m\alpha$ $(m \geqslant 2)$ étaient racines, mais non $(m+1)\alpha$, $-(m+1)\alpha$, on pourrait construire la suite définie par le vecteur $v_0 = u_{-m\alpha}$ $(\neq 0)$. Cette suite, puisque $\alpha_\alpha \neq 0$ serait de longueur $2m$ et le premier vecteur pouvant être nul serait v_{2m+1}. Or v_{m+1} étant de poids α, est un multiple de u_α et $v_{m+2} = [u_\alpha, v_{m+1}]$ est nul. On a donc :

$$2m+1 \leqslant m+2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad m \leqslant 1$$

et aucun multiple entier de α n'est racine. Il est impossible de plus que $k\alpha$ soit racine, k étant un nombre fixe *quelconque* différent de ± 1 et de 0. Si on avait en effet $\beta = k\alpha$, il en résulterait

$$\frac{2\beta_\alpha}{\alpha_\alpha} = 2k \qquad \frac{2\alpha_\beta}{\beta_\beta} = \frac{2}{k}$$

$2k$ et $\dfrac{2}{k}$ devant être entiers et 2α et 2β n'étant pas racines, il reste la seule possibilité $k = \pm 1$.

En résumé, un groupe semi-simple a une base de la forme

$$G = (h_1, \dots, h_n, u_\alpha, u_{-\alpha}, u_\beta, u_{-\beta}, \dots)$$

et sa structure est définie par les relations : 8/9

$$[h_i\, h_k] = 0, \qquad [h\, u_\alpha] = \alpha u_\alpha, \qquad \alpha = a_i \lambda^i,$$

$$[u_\alpha\, u_{-\alpha}] = h_\alpha = -a^i h_i, \qquad [u_\alpha\, u_\beta] = N_{\alpha\beta} u_{\alpha+\beta}$$

$$(N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}, \qquad N_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{si } \alpha + \beta \text{ n'est pas racine.})$$

et on a

$$\sigma_2(x) = \Phi(\lambda) + \sum_{\alpha \neq 0} N_\alpha \xi^\alpha \xi^{-\alpha}$$

$$N_\alpha = \operatorname{tr} U_\alpha U_{-\alpha} = \frac{\alpha_\alpha}{2} \sum \frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)}{6}$$

avec

$$\Phi(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$$

2.– Classification des groupes simples. Chacun des vecteurs $u_\alpha, u_{-\alpha}, u_\beta, \dots$ n'étant défini qu'à un facteur près, on pourra les normer de manière à simplifier les constantes N_α, $N_{\alpha\beta}$. Nous choisirons u_α, $u_{-\alpha}$ de manière que l'on ait

$$N_\alpha = -1$$

α_α est alors négatif et rationnel. Cela fait, on pourra encore multiplier u_α par un facteur arbitraire μ_α, à condition de multiplier $u_{-\alpha}$ par $\dfrac{1}{\mu_\alpha}$. 9/10

La forme σ_2 étant invariante par le groupe adjoint, on a pour tout x :

$$x = \lambda^i h_i + \sum_{\beta \neq 0} \xi^\beta u_\beta$$

$$\sigma_2\big([u_\alpha\, x], x\big) = 0$$

Or

$$[u_\alpha\, x] = -\xi^{-\alpha} \cdot a^i h_i - \alpha u^\alpha + \sum_{\beta \neq -\alpha} N_{\alpha\beta} \xi^\beta u_{\alpha+\beta}$$

d'où les deux relations importantes :

(6) $$\Phi(a^i, \lambda^k) = g_{ik} a^i \lambda^k = \alpha = a_k \lambda^k$$

$$(7) \qquad \sum_{\alpha+\beta+\gamma\neq 0} N_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\xi^{\gamma} = 0$$

Utilisons d'abord la première ; nous avons :

$$a_k = g_{ik}a^i$$

de sorte *que les a_k et les a^i sont les composantes du même vecteur a par rapport au*
10/11 *tenseur fondamental g_{ik}* : ce vecteur a de l'espace à n dimensions qui correspond de manière biunivoque à la racine $\alpha = a_i\lambda^i$ sera appelé *vecteur-racine.* Comme $h_\beta = -b^i h_i$, on peut écrire :

$$\alpha_\beta = -a_i b^i = -(ab)$$

(a, b) désignant le produit scalaire des deux vecteurs a et b ; de là résulte la propriété de symétrie $\alpha_\beta = \beta_\alpha$.

Considérons maintenant n racines linéairement indépendantes : $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ dont toute autre racine ρ est une combinaison linéaire

$$\rho = r_k\alpha^{k)}$$

Désignons par $a^{(i)}$ et r les vecteurs-racines correspondant à $\alpha^{(i)}$ et ρ, et par ω_i^k l'entier $2\dfrac{(a^{(k)}\, a^{(i)})}{(a^{(i)}\, a^{(i)})}$ on voit facilement que le déterminant $\left|\omega_i^k\right|$ est différent de zéro ; les n coefficients r_k peuvent se déterminer au moyen des n relations :

$$2\frac{(r\, a^{(i)})}{(a^{(i)}\, a^{(i)})} = \omega_i^k r_k$$

et les r_k *sont réels et rationnels.* Nous pouvons donc choisir dans l'espace à n dimensions des vecteurs a un système de coordonnées tel que *toutes les racines soient*
11/12 *réelles :* la forme quadratique $\Phi(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik}\lambda^i\lambda^k$ est alors *réelle et définie positive*, et *la métrique définie par le tenseur g_{ik} est une métrique euclidienne ordinaire.*[4]

On peut achever de normer les vecteurs de base iu_α du groupe $\mathfrak{g}$ de façon que *les constantes $N_{\alpha\beta}$ elles-mêmes deviennent réelles.* Pour établir ce point, on peut remarquer d'abord que la relation (7) entraîne

$$(8) \qquad N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \qquad \text{dès que } \alpha+\beta+\gamma = 0.$$

D'autre part, si β appartient à la suite (α) :

$$\beta - j\alpha, \dots, \beta-\alpha, \beta, \beta+\alpha, \dots, \beta+k\alpha$$

on a d'après (3)

$$\left[u_{-\alpha}\left[u_\alpha\, u_\beta\right]\right] = \frac{(j+1)k}{2}\,\alpha_\alpha u_\beta$$

d'où, en tenant compte de (8) :

$$(9) \qquad N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} = R_{\alpha\beta}$$

où la quantité

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{(j+1)k}{2}\,\alpha_\alpha$$

est *rationnelle* et *positive*, dès que $\alpha + \beta$ est racine ($k \geqslant 1$), ce qui entraîne $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

De plus, les racines étant des formes linéaires *réelles*, on peut les ordonner : cela permet de normer de proche en proche (en multipliant u_α et en divisant $u_{-\alpha}$ par le même facteur μ_α) de manière que l'on ait 12/13

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$$

Alors, d'après l'équation (9), les constantes de structure $N_{\alpha\beta}$ sont *réelles*. On constate en outre que les nombres $N_{\alpha\beta}$ sont déterminés d'une manière unique par le système Σ_n des vecteurs-racines $a, b, \ldots$. Il en est évidemment de même de l'ordre du groupe $\mathfrak{g}$ puisque Σ_n se compose de $r - n$ vecteurs.

Nous nous proposons maintenant d'indiquer la méthode *qui permet de former tous les systèmes Σ_n correspondant aux groupes simples*. D'après les propriétés établies, ces systèmes satisfont aux quatre conditions suivantes :

1°– Σ_n contient $-a$ en même temps que a, mais non ka ($k \neq 0, \pm 1$).

2°– $2\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)} = 2\dfrac{\beta_\alpha}{\alpha_\alpha}$ est entier. Par conséquent, si φ désigne l'angle des deux vecteurs a et b, on a :

$$\cos^2\varphi = \frac{(a\,b)^2}{(a\,a)(b\,b)} = 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \text{ou}\ \frac{3}{4}$$

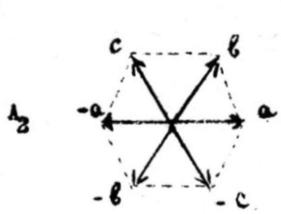
et φ ne peut être que $= 90°$, $60°$, $45°$, ou $30°$ (ou leurs suppléments, mais, en remplaçant un vecteur par son opposé, on peut toujours se ramener au cas d'un angle non obtus). Les différentes possibilités, en supposant que a est le plus petit des deux vecteurs, sont données par le tableau suivant : 13/14

φ	$\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)}$	$\dfrac{(a\,b)}{(b\,b)}$	$\dfrac{(b\,b)}{(a\,a)}$
$30°$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	3
$45°$	1	$\dfrac{1}{2}$	2
$60°$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	1
$90°$	0	0	quelconque

De ce tableau résulte que, *du rapport des longueurs de deux vecteurs non perpendiculaires*, on peut déduire leur angle.

3°– Σ_n *contient en même temps que a et b, tous les vecteurs $b - ka$, où l'entier k prend les valeurs* $0, \ldots, 2\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)}$. Cela entraîne les conséquences suivantes :

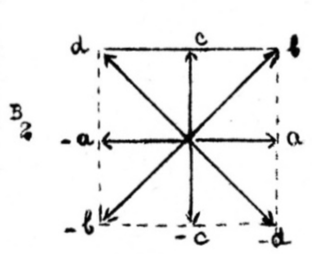
14/15 1) *Si a et b font un angle de* $60°$, on a $2\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)} = 1$



et $b - a = c$ appartient au système. En introduisant les vecteurs opposés, on a le système A_2 des six rayons d'un hexagone régulier.

et $b - a = c$ appartient au système. En introduisant les vecteurs opposés, on a le système A_2 des six rayons d'un *hexagone régulier*.

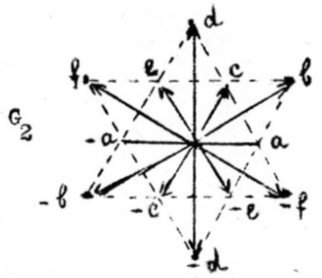
2) *Si a et b font un angle de* $45°$, on a $2\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)} = 2$



et les deux vecteurs $c = b - a$, $d = b - 2a$ appartiennent au système, ce qui donne, avec les vecteurs opposés, un système B_2 de huit vecteurs formant les demi-diagonales et les demi-médiatrices d'un carré .

et les deux vecteurs $c = b - a$, $d = b - 2a$ appartiennent au système, ce qui donne, avec les vecteurs opposés, un système B_2 de huit vecteurs formant les demi-diagonales et les demi-médiatrices d'un carré.

3) *Si a et b font un angle de* $30°$, on a $2\dfrac{(a\,b)}{(a\,a)} = 3$



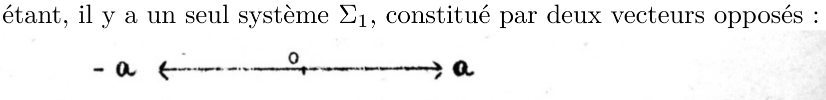
$c = b - a$, $e = b - 2a$, $f = b - 3a$
Comme b fait avec $-f$ un angle de $60°$, nous avons encore nécessairement le vecteur $d = b + f$ complétant l'hexagone. On a donc finalement avec a et b un système G_2 de 12

d'où les trois vecteurs $c = b - a$, $e = b - 2a$, $f = b - 3a$. Comme b fait avec $-f$ un angle de $60°$, nous avons encore nécessairement le vecteur $d = b + f$ complétant l'hexagone. On a donc finalement avec a et b un système G_2

de 12 vecteurs formant une sorte d'étoile qui résulte de la réunion de deux hexagones de type A_2.[5] 15/16

4°– *Le groupe* $\mathfrak{g}$ *étant simple,* Σ_n *ne se décompose pas en deux systèmes partiels perpendiculaires l'un à l'autre*, car on voit sans difficulté que le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs u_α correspondant aux vecteurs-racines a d'un des systèmes partiels, et par les crochets $[u_\alpha\, u_{-\alpha}]$ serait sous-groupe invariant de $\mathfrak{g}$.

Cela étant, il y a un seul système Σ_1, constitué par deux vecteurs opposés :



le groupe simple correspondant est à trois paramètres.

Les systèmes Σ_2 peuvent être construits à partir d'un couple a et b faisant l'angle *minimum*, a étant le plus petit des vecteurs du couple. On obtient ainsi, pour les valeurs 60°, 45°, 30° de l'angle *minimum*, les systèmes A_2, B_2, G_2, qui sont visiblement complets. Les groupes simples correspondants ont 8, 10 et 14 paramètres.[6]

Voyons maintenant les différents systèmes Σ_3 possibles ; ils proviennent de G_2, B_2, ou A_2.

Extension de G_2. Cherchons à adjoindre à G_2 un vecteur r non perpendiculaire à son plan : nous pouvons le supposer non perpendiculaire à a, b, c, d. On a (en prenant 16/17
a de longueur 1)

$$\frac{(r\,r)}{(a\,a)} = (r\,r) = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1.$$

$$\frac{(r\,r)}{(b\,b)} = \frac{(r\,r)}{3} = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1$$

d'où $(r\,r) = 3$ ou 1.

1) $(r\,r) = 3$ entraîne $\widehat{ar} = \widehat{cr} = 30°$, mais les cônes de révolution d'axes a et c et de demi-angle au sommet 30° n'ont en commun que la ligne d'action de b. Ce cas est donc impossible.

2) $(r\,r) = 1$ entraîne $\widehat{br} = \widehat{dr} = 30°$, et ce cas est impossible pour la même raison. Donc :

Le système G_2 n'admet pas d'extension à plus de deux dimensions et aucun système Σ_n pour $n \geqslant 3$ ne contient d'angle égal à 30°.

Extension de B_2. Nous adjoignons à B_2 un vecteur r que nous pouvons toujours supposer non perpendiculaire à a et b. De $(a\,a) = 1$, $(b\,b) = 2$, résulte $(r\,r) = 2$ ou 1.

1°) *Cas* $(r\,r) = 2$. On a alors $\widehat{ra} = 45°$, $\widehat{rb} = 60°$ 17/18
et r est la demi-diagonale du carré construit sur a dans le plan perpendiculaire à B_2 (fig.1). De a et r on déduit les vecteurs e_3 et r_1 ; de b et r le vecteur r_2 (diagonale du carré $-c$, e_3), de $-d$ et r (ou de $-c$ et r_2) le vecteur r_3.

B_3

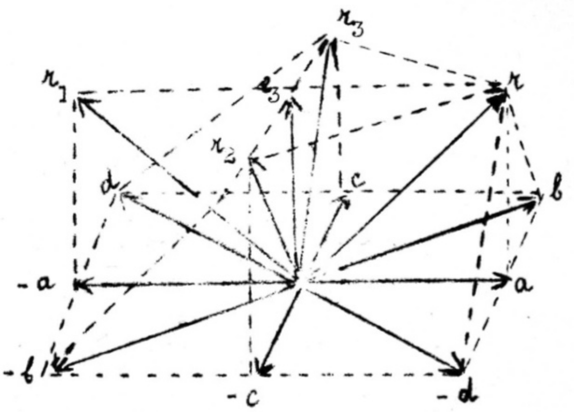


fig.1

Avec les vecteurs opposés, on a un système que nous appellerons B_3. On ne peut adjoindre à ce système aucun vecteur sans augmenter la dimension, car il contient déjà toutes les solutions r du type $(r\,r) = 2$, et nous verrons qu'il ne peut contenir une solution du type $(r\,r) = 1$.

Si nous prenons dans l'espace à trois dimensions les vecteurs fondamentaux $e_1 = a$, $e_2 = c$, et e_3, les vecteurs de B_3 sont les vecteurs $\pm e_i$ et $\pm e_i \pm e_j$.

2°) *Cas* $(r\,r) = 1$. On a cette fois : $\widehat{ra} = 60°$, $\widehat{rb} = 45°$ et r est la demi-diagonale
18/19 du carré construit sur b dans le plan perpendiculaire à B_2 (fig.2).

C_3

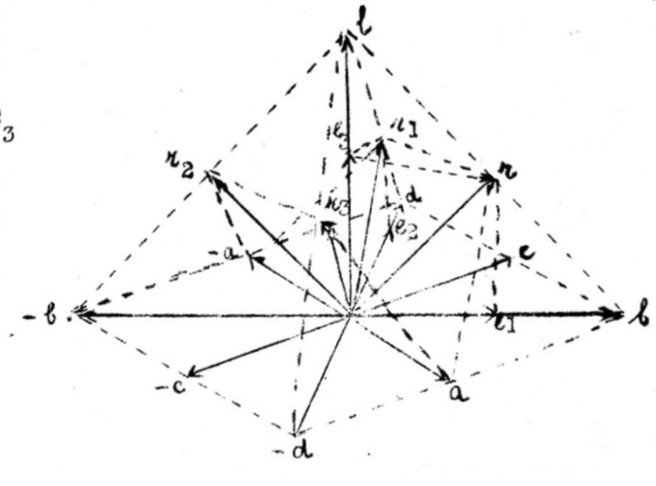


fig.2

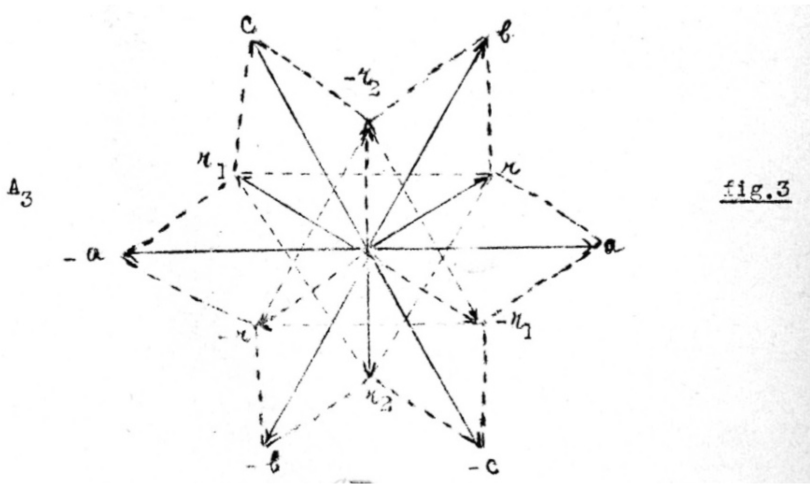
On en déduit successivement les différents vecteurs portés sur la figure qui, avec les vecteurs opposés, forment un système à trois dimensions C_3. Il est impossible de combiner C_3 avec B_3, car l'un contient un vecteur ℓ de longueur

$\sqrt{2}$ porté par la perpendiculaire au plan B_2, tandis que l'autre contient un vecteur de longueur 1 porté par la même droite.

Si on rapporte l'espace aux vecteurs : $e_1 = \dfrac{b}{2}$, $e_2 = \dfrac{d}{2}$, $e_3 = \dfrac{\ell}{2}$, les vecteurs de C_3 sont tous les vecteurs : 19/20

$$\pm 2e_i \qquad \text{et} \qquad \pm\, e_i \pm e_j.$$

Extension de A_2. L'angle minimum du système étant 60°, nous ne pourrons avoir ici que des angles de 60° ou 90°. On a $(a\,a) = 1$, $(b\,b) = 1$ et nécessairement $(r\,r) = 1$. Si, comme on peut toujours le supposer, r n'est perpendiculaire ni à a ni à b, il forme avec ces vecteurs un tétraèdre régulier et il est perpendiculaire à c (fig.3). En associant r à a et à b on obtient les nouveaux vecteurs r_1 et r_2. Avec les vecteurs opposés, on a un système A_3 qui est représentée [sic] ci-contre[7] par sa projection sur 20/21
le plan de A_2 (et non plus en perspective). Comme autres vecteurs possibles, nous ne



pourrions avoir que les symétriques des précédents par rapport au plan de A_2 ; à eux seuls ces vecteurs constituent un système équivalent à A_3. Mais si l'on remarque que le symétrique de $-r$ par exemple, fait avec r_1 et r_2 des angles inférieurs à $\widehat{r_1 r_2} = 60°$, on voit qu'il est impossible de combiner les deux systèmes.

Pour avoir rencontré toutes les circonstances remarquables qui se présentent dans la construction des systèmes Σ_n, il nous reste à mettre en évidence l'existence de *suites infinies* de systèmes d'un même type : c'est ce que nous ferons pour les systèmes B_n.

Soit donc B_n le système constitué par les vecteurs $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ dans un espace euclidien à n dimensions rapporté à n vecteurs unitaires rectangulaires e_i. Nous adjoignons dans l'espace à $n+1$ dimensions, un vecteur $r = (r_1, r_2, \ldots, r_{n+1})$ non perpendiculaire à B_n, et non contenu dans l'hyperplan B_n. On a $(r\,r) = 1$ ou 2. Prenons $(r\,r) = 2$. On peut toujours supposer que r fait un angle aigu avec e_1 ; on

a alors $(r\,e_1) = r_1 = +1$, $\widehat{re_1} = 45°$. On a ensuite $(r\,e_i) = r_i = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$,
21/22 car autrement r ferait avec e_1 et e_i, qui sont perpendiculaires, des angles de 45° ou 135°, donc serait dans leur plan. Par suite, on a $r_{n+1}^2 = 2 - r_1^2 = 1$, d'où, par exemple, $r = (1, 0, \ldots, +1)$. De r et e_1, on déduit :

$$r - e_1 = e_{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

et

$$r - 2e_1 = (-1, 0, \ldots, 0, 1)$$

Enfin, $\eta = e_1 \pm e_i$ est un vecteur de Σ_n pour lequel $(\eta\,\eta) = 2$; r, qui ne lui est pas perpendiculaire, fait avec η un angle de 60°, d'où le vecteur

$$r - \eta = (0, \ldots, \pm 1, 0, \ldots, 0, 1)$$

C'est le vecteur construit à partir de e_i comme r à partir de e_1 : toutes les possibilités sont donc épuisées pour les vecteurs de carré 2, et le système B_{n+1} obtenu se compose lui aussi des vecteurs $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$.

Le cas $(r\,r) = 1$ ne peut se présenter que pour $n = 4$ et conduit à un système exceptionnel F_4, non prolongeable (comme G_2).

Bornons-nous maintenant à indiquer les résultats complets au moyen du tableau
22/23 suivant[8] :

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[rrr, equal] & & & B_1 \arrow[d] \arrow[rr, equal] & & C_1 \arrow[d] \\
G_2 & A_2 \arrow[l] \arrow[d] & & & B_2 \arrow[d] \arrow[rr, equal] & & C_2 \arrow[d] \\
 & A_3 \arrow[d] \arrow[rr, equal] & & D_3 \arrow[d] & B_3 \arrow[d] \arrow[dr] & & C_3 \arrow[d] \\
 & A_4 \arrow[d] \arrow[drr] & & D_4 \arrow[d] & B_4 \arrow[d] & F_4 & C_4 \arrow[l] \arrow[d] \\
 & A_5 \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & & D_5 \arrow[d] & B_5 \arrow[d] & & C_5 \arrow[d] \\
 & A_6 \arrow[d] \arrow[drr] & E_6 \arrow[d] & D_6 \arrow[d] & {} & & {} \\
 & A_7 \arrow[d] \arrow[r] \arrow[drr] & E_7 \arrow[d] & D_7 \arrow[d] & & & \\
 & A_8 \arrow[d] \arrow[r] \arrow[drr] & E_8 & D_8 \arrow[d] & & & \\
 & A_9 \arrow[d] \arrow[drr] & & D_9 \arrow[d] & & & \\
 & {} & & {} & & &
\end{tikzcd}$$

On a, en outre, les relations d'inclusion :

$$D_4 \longrightarrow F_4$$

$$\left.\begin{aligned} D_n &\longrightarrow B_n \\ D_n &\longrightarrow C_n \end{aligned}\right\} \text{faciles à vérifier sur les figures pour } n = 3$$

Les cinq groupes exceptionnels correspondants à G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, ont respectivement $14, 52, 78, 133$ et 248 paramètres. Les groupes correspondant à A_n, B_n, C_n, D_n ont respectivement $n(n+2), n(2n+1), n(2n+1), n(2n-1)$ paramètres, et on peut 23/24
les réaliser de la manière suivante : pour A_n, on a le groupe projectif à n variables ; pour B_n et C_n les groupes projectifs d'une surface du second degré à $2n$ et $2n-1$ variables ; pour D_n, le groupe projectif d'un complexe linéaire à $2n-1$ variables.

3.– Propriétés concernant la nature du corps. Les résultats obtenus jusqu'à présent sur les algèbres de Lie supposent, comme il a été dit, le corps K algébriquement fermé, ce qui a permis de faire intervenir toutes les racines de l'équation caractéristique. Mais certains des théorèmes établis dans la précédente conférence, dont l'énoncé ne fait pas intervenir ces racines, s'étendent facilement au cas d'un corps quelconque.

Soient : $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K quelconque, Ω l'extension algébriquement fermée de K, $\mathfrak{g}^\star$ l'algèbre de Lie, extension de $\mathfrak{g}$ dans Ω, c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les éléments de de la forme αa, $\alpha \subset \Omega$, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^\star$ sont intégrables en même temps, car $\left(\mathfrak{g}^\star\right)' = \left(\mathfrak{g}'\right)^\star$. On voit aussi qu'elles sont nilpotentes en même temps. Donc le théorème de Engel est valable pour un corps quelconque. Le premier critère de Cartan s'étend d'une manière analogue, tout au moins dans le cas d'un corps infini. 24/25

Le second critère de Cartan résulte du premier par des raisonnements rationnels : donc, il est valable aussi pour un corps quelconque (infini).

Le second critère de Cartan étant valable, la semi-simplicité est indépendante du corps : $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^\star$ sont semi-simples en même temps. On ne peut pas en dire autant pour les groupes simples : il est évident que si $\mathfrak{g}$ admet un sous-groupe invariant $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^\star$ admet le sous-groupe invariant $\mathfrak{h}^\star$: donc *si* $\mathfrak{g}^\star$ *est simple, il en est de même de* $\mathfrak{g}$. Mais si $\mathfrak{g}$ est simple, $\mathfrak{g}^\star$ est soit simple, soit semi-simple. Cette seconde circonstance peut effectivement se produire : si, par exemple, $\mathfrak{g}$ est un groupe simple à paramètres réels, $\mathfrak{g}^\star$ s'il n'est pas simple, peut être et peut seulement être la somme directe de deux groupes simples imaginaires conjugués :

$$\mathfrak{g}^\star = \mathfrak{g}_1^\star + \overline{\mathfrak{g}}_1^\star$$

Si le groupe simple $\mathfrak{g}_1^\star$ est à s paramètres, $\mathfrak{g}^\star$ est à $2s$ paramètres, et il se déduit de $\mathfrak{g}_1^\star$ d'une manière triviale.

Les remarques précédentes conduisent à examiner deux catégories de problèmes
bien distinctes. En premier lieu, il semble désirable, au point de vue algébrique, d'avoir 25/26

pour les théorèmes fondamentaux des *démonstrations rationnelles*, c'est-à-dire ne faisant pas sortir du corps K : nous indiquerons à ce sujet comment on peut établir rationnellement le théorème de Engel, en utilisant la notion d'algèbre enveloppante. En second lieu, on peut chercher à obtenir, à partir des classes de groupes simples complexes précédemment déterminées, *les différents types possibles de groupes simples réels.*

1. Démonstrations rationnelles. On a la propriété fondamentale suivante : *si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de matrices nilpotente il en est de même de l'algèbre enveloppante* $\mathfrak{a}$ *et inversement.*

Par définition, une algèbre associative $\mathfrak{a}$ est dite nilpotente s'il existe un entier N tel que $\mathfrak{a}^N = 0$, c'est-à-dire si le produit de N éléments quelconques de $\mathfrak{a}$ est nul. Il faut évidemment pour qu'il en soit ainsi que tous ses éléments soient nilpotents – c'est également suffisant car une algèbre non nilpotente contient, d'après un théorème de Wedderburn, un élément idempotent.[9]

Cela étant, si $\mathfrak{a}$ est nilpotente, toutes les racines de l'équation caractéristique d'une
26/27 matrice A quelconque de $\mathfrak{a}$ sont nulles et $\mathfrak{g}$ est nilpotent[e].[10]

Inversement, supposons que dans $\mathfrak{g}$ toutes les matrices ont $\lambda^n = 0$ comme équation caractéristique. Montrons que $\mathfrak{a}$ est nilpotent[e].[11] Il suffit pour cela de montrer que toutes les matrices de $\mathfrak{a}$ ont une trace nulle, car s'il n'en résultait pas que $\mathfrak{a}$ est nilpotent, il existerait dans A une matrice $U \neq 0$ idempotente ($U^2 = U$) qui pourrait se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & h & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dont la trace h est différente de 0, d'où contradiction.

Or, un calcul direct et élémentaire permet de calculer pour un groupe infinitésimal quelconque de matrices la trace d'une matrice de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{a}$ en fonction des coefficients de l'équation caractéristique des éléments de $\mathfrak{g}$.

D'abord les traces des matrices $A \subset \mathfrak{g}$ sont connues ainsi que les traces des matrices A^p en fonction rationnelle des coefficients de l'équation caractéristique de A. On
27/28 connait par conséquent de même la trace des matrices $\sum A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p}$ où $\sum$ indique la somme étendue à toutes les permutations des indices $i_1, i_2, \ldots, i_p$ car c'est la forme multilinéaire associée à tr A^p.

Pour calculer $\operatorname{tr} A_1 A_2 \cdots A_p$, on remarque que :

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_{k+1} A_k A_{k+2} \cdots A_p - A_1 A_2 \cdots A_p)\\ &\qquad\qquad = \operatorname{tr} A_1 \cdots A_{k-1} \big[A_{k+1}\, A_k\big] A_{k+2} \cdots A_p\end{aligned}$$

Mais $\big[A_{k+1}\, A_k\big]$ est un élément de $\mathfrak{g}$. On a donc au second membre la trace d'un produit de $p+1$ facteurs seulement. On arrive ainsi à une relation de la forme :

$$\operatorname{tr} A_1 A_2 \cdots A_p = \frac{1}{p!} \operatorname{tr} \sum A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p} + \mu \tag{10}$$

où μ est une somme de traces de produits de moins de p facteurs. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotent, $\operatorname{tr} A^p = 0$, donc $\operatorname{tr} \sum A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p} = 0$ et comme $\operatorname{tr} A_i = 0$, la formule (10) montre par récurrence que la trace de toute matrice de $\mathfrak{a}$ est nulle, donc que $\mathfrak{a}$ est nilpotente.

On peut donner d'autre part, pour une algèbre de Lie une deuxième définition de nilpotent, équivalent à celle de la précédente conférence, et qui, étant analogue à celle des algèbres associatives, se trouve plus maniable dans les démonstrations faisant 28/29
intervenir l'algèbre enveloppante. Appelons $\big[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2\big]$ l'algèbre de Lie engendrée par les crochets d'un élément de $\mathfrak{h}_1$ avec un élément de $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ étant des sous-groupes invariants d'un même groupe $\mathfrak{g}$. On peut définir les puissances d'une algèbre de Lie par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^2 &= \big[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\big] = \mathfrak{g}'\\ \mathfrak{g}^3 &= \big[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2\big] \supset \mathfrak{g}''\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathfrak{g}^{k+1} &= \big[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k\big] \supset \mathfrak{g}^{(k)}\end{aligned}$$

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sera alors dite nilpotente si une puissance de $\mathfrak{g}$ est nulle : $\mathfrak{g}^k = 0$: une telle algèbre est visiblement *intégrable.*

Mais un élément générateur quelconque de $\mathfrak{g}^k$ s'écrit :

$$\Big[a_1 \big[a_2 \big[\cdots [a_{k-1}\, a_k] \cdots \big]\big]\Big] \qquad a_i \text{ éléments quelconques de } \mathfrak{g}$$

et cette quantité est précisément égale à

$$A_1 A_2 \cdots A_{k-1} a_k$$

où A_i est la matrice de la représentation adjointe correspondant à a_i ; ceci montre que *si une puissance de l'algèbre de Lie est nulle, l'algèbre enveloppante est nilpotente et* 29/30
inversement. De ceci résulte que nous avons montré rationnellement :

1) l'équivalence des deux définitions de nilpotent,
2) qu'une algèbre nilpotente est intégrable.[12]

Pour montrer rationnellement qu'inversement le premier dérivé d'un groupe intégrable est nilpotent, on s'appuie sur le théorème suivant dont nous ne donnerons pas la démonstration :

Je rappelle d'abord qu'une algèbre associative est dire semi-simple si elle ne contient aucune sous-algèbre nilpotente invariante $\neq 0$. *Soit alors* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de matrices,* Γ *son sous-groupe intégrable invariant maximum,* $\mathfrak{a}$ *l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{g}$. *Si* $\mathfrak{a}$ *est semi-simple*

$$\mathfrak{g} = \Gamma \oplus \mathfrak{g}_1$$

où Γ *est abélien.*

Supposons alors $\mathfrak{g}$ intégrable : $\mathfrak{g} = \Gamma$. Soit $\mathfrak{N}$ le radical, c'est-à-dire la sous-algèbre invariante nilpotente maximale de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$. Les congruences $g_1 \equiv h_1 \pmod{\mathfrak{N}}$, $g_2 \equiv h_2 \pmod{\mathfrak{N}}$ entraînent $[g_1\, g_2] \equiv [h_1\, h_2] \pmod{\mathfrak{N}}$. Les éléments de $\mathfrak{g}$
30/31 pris modulo $\mathfrak{N}$ forment donc une algèbre de Lie γ homomorphe à $\mathfrak{g}$, donc intégrable,
dont l'algèbre enveloppante est $\mathfrak{a}/\mathfrak{N}$. Celle-ci est semi-simple, donc d'après le théorème précédent, γ est abélien.[13] On a donc pour tout couple d'éléments g_1 et g_2 de $\mathfrak{g}$:

$$\big[g_1\, g_2\big] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\mathfrak{N}) \quad \text{c'est-à-dire } \mathfrak{g}'\mathfrak{N}$$

donc $\mathfrak{g}'$ *est nilpotent.*

Le théorème s'étend sans peine à une algèbre de Lie abstraite. Si $\mathfrak{g}$ est intégrable, la représentation adjointe est en effet une algèbre de Lie de matrices dont le dérivé est contenu dans une algèbre nilpotente. Il existe donc t tel que $A_1A_2\cdots A_t = 0$ pour tous A_i dans $\mathfrak{g}'$; donc pour tout x de $\mathfrak{g}$, on a $A_1A_2\cdots A_t\, x = 0$; or ceci s'écrit en revenant aux éléments de l'algèbre abstraite : $\Big[a_1\big[a_2\cdots[a_t\, x]\cdots\big]\Big]$, ou, en prenant x dans $\mathfrak{g}'$:

$$\big(\mathfrak{g}'\big)^{t+1} = 0$$

C.Q.F.D.

2. Détermination des groupes simples réels. D'après ce qui a été vu précédemment, le problème consiste à trouver tous les groupes réels d'ordre r correspondant à chacun des groupes simples complexes $\mathfrak{g}^\star$ d'ordre r déterminés ci-dessus. Or la méthode que nous
31/32 avons utilisée dans cette détermination nous a permis, en nommant convenablement
les vecteurs de base de $\mathfrak{g}^\star$ de donner à ce groupe une *structure réelle*, ($N_{\alpha\beta}$ réels) et de mettre la forme quadratique σ_2 sous la forme :

$$\sigma_2 = \Phi(\lambda) - \sum_\alpha \xi^\alpha \xi^{-\alpha}$$

où $\Phi(\lambda) = g_{ik}\lambda^i\lambda^k$ est définie positive.

De là résulte déjà qu'à $\mathfrak{g}^\star$ correspondent deux groupes réels simples évidents :

D'abord le groupe obtenu en remplaçant les paramètres complexes de $\mathfrak{g}^\star$ par des paramètres réels ; pour ce groupe la forme quadratique σ_2 contient certainement des carrés positifs (provenant de Φ).

Puis, on peut remarquer que cette forme σ_2 serait *définie négative* si on donnait aux λ^i des valeurs imaginaires pures et à ξ^α, $\xi^{-\alpha}$ des valeurs imaginaires conjuguées. Or on vérifie bien aisément que le crochet de deux éléments de $\mathfrak{g}^\star$ dont les coordonnées sont de cette nature, est encore un élément de ce type. Comme tous ces éléments s'expriment linéairement au moyen de la base $(ih_1, \ldots, ih_n, u_\alpha + u_{-\alpha}, i(u_\alpha - u_{-\alpha}), \ldots)$ avec des paramètres *réels*, leur ensemble est un nouveau groupe simple réel $\mathfrak{g}$ déduit de $\mathfrak{g}^\star$ et pour lequel la forme quadratique σ_2 est *définie négative.* [(1)] 32/33

Les deux groupes ainsi obtenus se distinguent par leur *caractère* δ, c'est-à-dire par la différence entre le nombre des carrés positif[s] et le nombre des carrés négatifs dans σ_2.

L'existence d'un groupe réel simple pour lequel σ_2 est définie négative entraîne des conséquences importantes, mais qui sortent du point de vue algébrique, qui fait l'objet de ces conférences. On peut en effet montrer directement à partir de cette propriété, que le groupe adjoint Γ du groupe continu $\mathfrak{g}$ engendré par le groupe infinitésimal considéré est clos. On en déduit ensuite que $\mathfrak{g}$ lui-même est clos en montrant qu'à une transformation de Γ ne correspondent dans $\mathfrak{g}$ qu'un nombre fini d'éléments, circonstance due encore au fait que σ_2 est définie.

Cela étant, Monsieur Cartan a montré en outre qu'étant donné un groupe simple ouvert à paramètres réels, on peut toujours trouver un groupe clos de même structure. Et la recherche des groupes réels ouverts d'une structure simple donnée revient à celle 33/34
des substitutions isomorphiques involutives du groupe clos de la structure donnée. Les différents types de groupes simples réels ainsi obtenus se distinguent les uns des autres par leur caractère. Enfin c'est à ce problème de la détermination des différentes formes réelles qu'est susceptible de prendre un groupe simple de structure complexe donnée que se ramène la recherche des espaces de Riemann dont la courbure est conservée par le transport parallèle.

Bibliographie.

H. WEYL. Theorie des Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationnen II. Math. Zeitsch. 24, p.328

The structure and representation of continuous groups (Princeton, 1933).

B.L. van der WAERDEN. Die Klassification der einfachen Liesche Gruppen, Math.Zeitsch. 37, p.446.

E.CARTAN. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse Paris, Nony 1894)

Les groupes réels simples finis et continus (Ann.Ec.Normale sup. 1914, p.261).

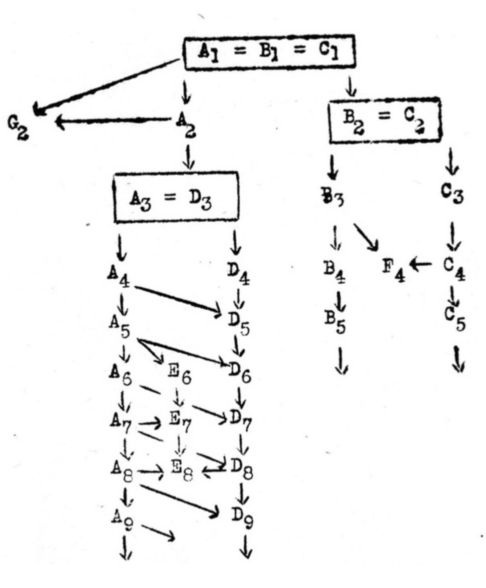
Groupes simples clos et ouverts et géométrie Riemannienne (Journal math. 1929, p.1).

1. Les résultats sur lesquels on s'appuie ici étant valables pour un groupe semi-simple, on voit qu'à tout groupe semi-simple à paramètres complexes correspond un groupe semi-simple à paramètres réels pour lequel la forme σ_2 est définie négative.

N.JACOBSON. Rational methods in the theory of Lie algebras (Annals of math. 36 (1935), p.875).[14]

Notes

1. Les articles cités dans cette conférence sont celui [Wey26] d'Hermann Weyl (nous n'avons pas identifié la référence à Princeton), celui [vdW33] de van der Waerden, la thèse [Car94] et les articles [Car14, Car29] d'Élie Cartan, ainsi que celui [Jac35] de Jacobson.
2. Tout au long de son exposé, Dubreil note la trace tr ., j'ai supprimé le point dans la suite.
3. Toutes les figures illustrant l'exposé sont reproduites ici telles quelles.
4. La page 12 est manquante dans l'exemplaire de l'IRMA.
5. Les figures représentant les systèmes de racines en rang 2 étaient parues pour la première fois dans un article de van der Waerden [vdW33] en 1933.
6. Les noms des systèmes A_2, B_2 et G_2 sont sur les figures des pages précédentes.
7. Le ci-contre aurait dû être un « ci-dessus » dans l'original.
8. Voici le tableau copié dans l'original (lui aussi vient de l'article [vdW33] de van der Waerden) :



9. Voir l'exposé 1-C.
10. La page 27 manque dans l'exemplaire de l'IRMA.
11. Clairement, l'auteur pense à $\mathfrak{g}$ comme à un groupe, d'où l'accord au masculin dans cette partie. Je ne corrige plus.
12. C'est-à-dire : une algèbre de Lie nilptotente est résoluble.
13. Voir la note 11.
14. Un lecteur a rajouté à la main, dans l'exemplaire de l'IRMA, des références à [Jac38] et à [Jac37].

Références

[Car94] É. Cartan – « Sur la structure des groupes de transformations finis et continus », Thèse, Faculté des sciences, Paris, Nony et Co, 1894.

[Car14] ———, « Les groupes réels simples, finis et continus », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)* **31** (1914), p. 263–355.

[Car29] ———, « Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne », *Journ. de Math. (9)* **8** (1929), p. 1–33.

[Jac35] N. Jacobson – « Rational methods in the theory of Lie algebras », *Ann. of Math. (2)* **36** (1935), p. 875–881.

[Jac37] ———, « Simple Lie algebras of type A », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **23** (1937), p. 240–242.

[Jac38] ———, « Simple Lie algebras of type A », *Ann. of Math. (2)* **39** (1938), p. 181–188.

[vdW33] B. van der Waerden – « Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen », *Math. Z.* **37** (1933), p. 446–462.

[Wey26] H. Weyl – « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen II », *Math. Z.* **24** (1926), p. 328–376.