# LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

**édition réalisée et annotée par**
**Michèle Audin**

## 4. Année 1936-1937

***Travaux d'Élie Cartan***

Henri Cartan

**Systèmes de Pfaff (suite)**

*Séminaire de mathématiques* (1936-1937), Exposé 4-C, 15 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1936-1937__4__C_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 14 décembre 1936
Exposé 4-C, p. 1 à 15

# SYSTÈMES DE PFAFF (SUITE)

par **Henri Cartan**

Cet exposé[1] fait suite au précédent, auquel nous renvoyons le lecteur (Voir l'erratum). Dans le présent exposé l'abondance de la matière nous oblige à passer sous silence la plupart des démonstrations (qu'on trouve en général dans le livre de Kähler).

Étant donné un système de Pfaff, on se propose de déterminer toutes les variétés « intégrales ». La méthode de E.Cartan que nous avons commencé d'exposer, consiste à ramener la recherche (locale) des variétés intégrales (à un nombre donné de dimensions) à la formulation de systèmes de Cauchy-Kowalewski, qui peuvent être des systèmes différentiels ordinaires ; une fois ces systèmes formés, on leur applique le théorème connu d'existence et d'unicité locales. Pour former ces systèmes, il est commode de déterminer[2] tout d'abord les « éléments intégraux » de toutes dimensions. Nous avons vu que les éléments intégraux de dimension $p$ se répartissent en familles analytiques irréductibles, et que la recherche des variété intégrales à $p$ dimensions peut s'effectuer séparément pour chaque famille irréductible d'éléments intégraux à $p$ dimensions. Parmi toutes ces familles, nous avons appris à distinguer, lorsqu'elle existe, une famille dite « générale » (partie V du précédent exposé) ; l'étude des familles générales de toutes dimensions constitue la théorie des « systèmes en involution » de 1/2
E.Cartan.

Le présent exposé comprend essentiellement deux parties. La première se rapporte aux systèmes en involution ; elle concerne donc la détermination des variétés intégrales dont les éléments de contact appartiennent à une famille *générale* d'éléments intégraux. Dans la deuxième partie est abordée l'étude d'une famille *quelconque* d'éléments intégraux ; des opérations de différentiation et d'élimination ramènent toujours l'étude d'une telle famille à celle de familles *générales* de systèmes de Pfaff convenables, déduits du système donné par *prolongement* (Cf. parg.III du précédent exposé).

En résumé, il existe toujours des procédés algébriques réguliers qui permettent de transformer les systèmes de Cauchy-Kowalewski donnant les variétés intégrales. Tel est, avec les restrictions nécessaires que nous indiquerons plus loin, le résultat essentiel de la théorie de E.Cartan.

## I.–Systèmes en involution

Le système de Pfaff étudié définit un idéal $\mathcal{I}$ que nous supposons *différentiel* (c'est-
2/3 à-dire : si la forme $\omega$ appartient à $\mathcal{I}$, $d\omega$ appartient aussi à $\mathcal{I}$). En outre nous supposons que les formes de degré zéro de l'idéal constituent une base pour l'idéal *premier* (dans l'anneau des fonctions holomorphes) relatif à la variété $V_0$ des points intégraux, variété que nous supposons irréductible.

Dans ces conditions, nous avons défini des entiers $s_i$ et $r_i$ qui satisfont au système d'égalités et d'inégalités

$$\begin{array}{lll}
s < r, & r - s - 1 = r_1, & s = r - r_1 - 1, \\
s_1 < r_1, & r_1 - s_1 - 1 = r_2, & s + s_1 = r - r_2 - 2, \\
 & \cdots \quad \cdots & \cdots\cdots \\
s_p < r_p, & r_p - s_p - 1 = r_{p+1}, & s + s_1 + \cdots + s_p = r - r_{p+1} - (p+1) \\
 & \cdots \quad \cdots & \cdots\cdots \\
s_n = r_n & & s + s_1 + \cdots + s_n = r - n
\end{array}$$

L'entier $n$ s'appelle le *genre* du système, qui est dit « en involution » pour chaque dimension $p \leqslant n$. Quel que soit $p \leqslant n$, il y a des éléments intégraux « généraux » à $p$ dimensions ; ils constituent, dans l'espace des éléments à $p$ dimensions, une variété analytique irréductible $V_p$ (en particulier, $V_0$ est la variété des points intégraux, qui sont tous généraux par définition). Parmi les éléments intégraux généraux à $p$ dimensions, sont « ordinaires » ceux par lesquels passent exactement $\infty^{r_{p+1}}$ (0 si $p = n$)
3/4 éléments intégraux à $p + 1$ dimensions ; les éléments intégraux à $p + 1$ dimensions qui passent par un élément général ordinaire à $p$ dimensions sont généraux.

Il ne faut pas confondre les éléments généraux *ordinaires* avec les éléments généraux *réguliers*. Nous avons donné des éléments réguliers une définition qui revient à celle-ci : est régulier tout élément intégral général $E_p$ dans lequel on peut trouver une chaîne de sous-éléments $E_{p-1}, \ldots, E_0$ ($E_0$ est le point d'appui de $E_p$),

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{p-1} \subset E_P$$

tels que chaque $E_k$ $(0 \leqslant k \leqslant p - 1)$ soit *ordinaire* (et par suite régulier). Une telle chaîne sera dite *chaîne régulière.*

Tout élément intégral suffisamment voisin d'un $E_p$ régulier est général et régulier ; tout élément intégral suffisamment voisin d'un $E_p$ régulier ordinaire est régulier ordinaire.

Les éléments *réguliers* $E_p$ sont ceux au voisinage desquels est valable le théorème d'existence (théorème 3 du précédent exposé) ; en effet, ce sont ceux au voisinage desquels les variétés intégrales à $p$ dimensions sont données par un système de Cauchy-Kowalewski régulier. C'est ce que nous allons voir maintenant avec plus de précision.

4/5

**Étude du système donnant les paramètres de position des éléments intégraux voisins d'un élément intégral régulier.** Soit $I_p$ un élément intégral particulier à $p$ dimensions, et $E_p$ un élément intégral arbitraire, voisin de $I_p$. Définissons $I_p$ par des équations

$$dx_i - \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_i^\alpha dx_\alpha = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, r)$$

ce qui est possible à condition de supposer $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_p \neq 0$ sur $I_p$ ; les quantités $\lambda_i^\alpha$ sont les paramètres (indépendants) qui fixent l'orientation de $I_p$. Pour des raisons qu'on apercevra plus loin, il est préférable de substituer à ce mode de représentation, un procédé plus général : au lieu de $dx_1, \ldots, dx_r$, considérons $r$ formes du premier degré indépendantes $\omega_1, \ldots, \omega_r$ ; en supposant $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$ sur $I_p$, $I_p$ peut être défini par des équations

$$\omega_i - \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_i^\alpha \omega_\alpha = 0 \qquad (i = p+1, \ldots, r)$$

Soient $\xi$ les coordonnées du point d'appui de $I_p$. Si on exprime qu'un élément voisin $E_p$, de point d'appui $x$ et d'équations

$$\omega_i - \sum_{\alpha=1}^{p} \ell_i^\alpha \omega_\alpha = 0$$

est *intégral*, o trouve un système d'équations 5/6

(1) $$\varphi_p(x, \ell^1, \ldots, \ell^p) = 0,$$

algébriques par rapport aux coordonnées $\ell$ de l'élément $E_p$, et linéaires (non homogènes) par rapport à la série des variables $\ell^p$ (comme d'ailleurs à la série des variables $\ell^\alpha$ pour chaque valeur de $\alpha$). Le système (1) admet par hypothèse la solution $x = \xi$, $\ell = \lambda$.

*Dans tous les cas* (que le système de Pfaff étudié soit ou ne soit pas en involution pour $p$) les équations (1) entraînent en particulier celles qui expriment que le sous-élément $E_{p-1}$ de $E_p$, défini par $\omega_p = 0$, est intégral ; soient

$$\varphi_{p-1}(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1}) = 0$$

ces équations. Ce système entraîne à son tour les équations

$$\varphi_{p-2}(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-2}) = 0$$

qui expriment que le sous-élément $E_{p-2}$ de $E_{p-1}$, défini par $\omega_{p-1} = 0$ est intégral... et ainsi de suite jusqu'à

$$\varphi_1(x, \ell^1) = 0$$

et enfin

$$\varphi_0(x) = 0$$

(équations de la variété des points intégraux).

6/7 Ainsi la considération des formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ nous amène à associer :

d'une part à chaque élément $E_p$ une chaîne de sous-éléments

$$E_p \supset E_{p-1} \supset \cdots \supset E_1 \supset E_0$$

d'autre part au système (1) une chaîne de sous-systèmes dont chacun est sous-système du précédent.

Considérons en particulier la chaîne

$$I_p \supset I_{p-1} \supset \cdots \supset I_1 \supset I_0$$

relative à l'élément $I_p$. Je dis que l'examen du système (1) et de ses sous-systèmes permet de reconnaître s'il y a involution pour la dimension $p$ et si la chaîne $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_p$ est régulière. On a en effet les deux théorèmes suivants :

**1.–.** *Si la chaîne $I_0 \subset \cdots \subset I_p$ est régulière, alors en tout point intégral $x$ voisin de $\xi$, les équations*

$$\varphi_1(x, \ell^1) = 0$$

*linéaires en $\ell^1$, sont compatibles ; leur rang est $s$ et il y a $(r_1 + 1 - p)$ inconnues arbitraires* ; pour toute solution $(x, \ell^1)$ voisine de $(\xi, \lambda^1)$, les équations

$$\varphi_2(x, \ell^1, \ell^2) = 0,$$

linéaires en $\ell^2$, sont compatibles ; leur rang est $s+s_1$ et il y a $(r_2 - 2 - p)$ inconnues $\ell^2$ arbitraires ; et ainsi de suite, jusqu'à : pour toute solution $(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1})$ du système

$$\varphi_{p-1}(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1}) = 0$$

7/8 (pourvu qu'elle soit assez voisine de $\xi, \lambda^1, \lambda^{p-1}$) les équations

$$\varphi_p(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1}, \ell^p) = 0$$

linéaires en $\ell^p$, sont compatibles ; leur rang est $s+s_1+\cdots+s_{p-1}$, et il y a $r_p$ inconnues $\ell^p$ arbitraires.

En résumé, la résolution du système (1) se ramène à des résolutions successives d'équations *linéaires.*

**2.– Théorème réciproque.** Soit $(\xi, \lambda^1, \ldots, \lambda^p)$ une solution du système (1) jouissant des propriétés suivantes : en tout point intégral $x$ voisin de $\xi$, les équations (linéaires en $\ell^1$)

$$\varphi_1(x, \ell^1) = 0$$

sont *compatibles* et ont un rang $\sigma$, indépendant de $x$ (si l'on pose $r - \sigma - 1 = \rho_1$, il y a $\rho_1 - 1 - p$ inconnues $\ell^1$ arbitraires) ; pour toute solution $(x, \ell^1)$ voisine de $(\xi, \lambda^1)$, les équations (linéaires en $\ell^2$)

$$\varphi_2(x, \ell^1, \ell^2) = 0$$

*sont compatibles* et ont un rang $\sigma+\sigma_1$, indépendant de $(x, \ell^1)$, (si l'on pose $\rho_1+\sigma_1 = \rho_2$, il y a $\rho_2+2-p$ inconnues $\ell^2$ arbitraires) ; et ainsi de suite, jusqu'à : pour toute solution

8/9 $(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1})$ du système

$$\varphi_{p-1}(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1}) = 0$$

(pourvu qu'elle soit assez voisine de $\xi, \lambda^1, \ldots, \lambda^{p-1}$) les équations en $\ell^p$

$$\varphi_p(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1}, \ell^p) = 0$$

sont compatibles et ont un rang $\sigma + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{p-1}$ indépendant de $(x, \ell^1, \ldots, \ell^{p-1})$ (si l'on pose $\rho_{p-1} - \sigma_{p-1} = \rho_p$ il y a $\rho_p$ inconnues $\ell^p$ arbitraires).

S'il en est ainsi,

1°– *le système de Pfaff proposé est en involution pour la dimension $p$*

2°– *la chaîne $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_p$ définie par $(\xi, \lambda^1, \ldots, \lambda^p)$ et par les sections $\omega_p = 0, \ldots\ \omega_p = \cdots = \omega_2 = 0$ est régulière*

3°– *les entiers $\rho_i$ et $\sigma_i$ sont respectivement égaux aux entiers $r_i$ et $s_i$ du système de Pfaff.*

Les deux théorèmes précédents, dont la démonstration est simple (bien que celle du second ne soit pas triviale) montrent que le seul examen du système (1) permet de décider si une chaîne est régulière, et fournit en outre les entiers $r_i$ et $s_i$.

Si l'on n'a en vue que la résolution du problème restreint : *Y a-t-il involution pour* 9/10
*la dimension $p$ ?* on procèdera ainsi : on regardera le rang $\sigma$ du système

$$\varphi_1(c, \ell^1) = 0$$

d'équations en $\ell^1$ pour le point intégral $x$ « le plus général » ; puis le rang $\sigma + \sigma_1$ du système

$$\varphi_2(x, \ell^1, \ell^2) = 0$$

d'équations en $\ell^2$ pour la solution $(x, \ell^1)$ « la plus générale » du système $\varphi_1 = 0$ ; et ainsi de suite. Pour qu'il y ait involution, il faut et il suffit que les systèmes linéaires envisagés successivement soient toujours *compatibles* ; ou plutôt, *il doit en être ainsi pour le choix le plus général des formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$* (la compatibilité pouvant cesser pour certains choix particuliers, correspondant à des chaînes non régulières). Nous venons de parler de la solution « la plus générale » d'un système ; cette expression a un sens précis, parce que tout est analytique et que les solutions envisagées sont prises dans une famille irréductible de solutions.

**Complément : numérotation des $\omega_i$ $(i = p+1, \ldots, r)$.** Supposons le système de Pfaff en involution pour la dimension $p$, et la chaîne $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_p$ régulière. Alors on peut numéroter les $\omega_i$ $(i > p)$ de telle sorte que, pour chaque valeur de l'entier $v$
$(1 \leqslant v \leqslant p)$ les équations 10/11

$$\varphi_v(x, \ell^1, \ldots, \ell^{v-1}, \ell^v) = 0$$

linéaires par rapport aux $\ell_i^v$, n'établissent aucune relation entre celles des $\ell_i^v$ pour lesquelles $i \leqslant r_v + v$ (les $\ell_i^v$ correspondantes sont appelées *paramétriques*) et permettent de calculer les autres $\ell_i^v$ $(r_v + v < i \leqslant r)$, dites *principales*, en fonction des paramétriques. En voici brièvement la raison : les relations linéaires homogènes entre les $\omega_\alpha$ ($\alpha \leqslant p$) et les $\omega_i$ ($i > p$) qui expriment qu'un élément linéaire engendre, avec $I_{v-1}$ un élément intégral peuvent être résolues par rapport à $s + s_1 + \cdots + s_{v-1}$ des $\omega_i$ (en effet, elles ne peuvent entraîner aucune relation entre les seules $\omega_\alpha$, puisque sur $I_p$ les $\omega_\alpha$ sont indépendantes) ; d'autre part, ces relations contiennent celles qui expriment que l'élément linéaire engendre avec $I_{v-2}$ un élément intégral (ceci dans le cas où $v > 1$). La possibilité de numéroter les $\omega_i$ comme il a été dit s'ensuit facilement par récurrence par rapport à $v$.

Appliquons ceci à la *formation du système de Cauchy-Kowalevski*, qui détermine les variétés intégrales à $p$ dimensions dont les éléments de contact sont voisins de l'élément $I_p$ supposé régulier ; nous supposons en outre que la chaîne $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_p$ est régulière, et que l'on a $\omega_\alpha = dx_\alpha$, $\omega_i = dx_i$ (ce qui peut toujours être réalisé par un
11/12 choix convenable du système de coordonnées ; nous prenons le point $\xi$ pour origine $x = 0$. Il s'agit de déterminer une variété intégrale $M_p$ qui passe par une variété intégrale $M_{p-1}$, supposée connue et *située dans le plan* $x_p = 0$. Les quantités $\ell_i^\star$ sont ici les dérivées partielles

$$\frac{\partial x_I}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \dots, p; \quad i = p+1, \dots, r)$$

des fonctions inconnues $x_i$ des variables $x_\alpha$. Supposons qu'elles satisfassent au système $\varphi_{p-1}(x, \ell^1, \dots, \ell^{p-1}) = 0$ (par hypothèse elles y satisfont pour $x_p = 0$), et écrivons les équations qui donnent les $\ell_i^p$ *principales* en fonction des *paramétriques*. Celà donne pour $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_p}$ ($i > r_p + p$) des fonctions linéaires des $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_p}$ ($i \leqslant r_p + p$), à coefficients fonctions des $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_\alpha}$ ($j$ quelconque, $\alpha \leqslant p-1$). Donnons-nous pour les $x_i$ ($i \leqslant r_p + p$) des fonctions *arbitraires* de $x_1, \dots, x_p$, pourvu toutefois qu'elles se réduisent, pour $x_p = 0$, aux fonctions correspondant à la variété $M_{p-1}$. Il reste alors, pour $i > r_p + p$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_p} = F_i\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_\alpha}\right) \qquad (j > r_p + p, \quad \alpha = 1, \dots, p-1)$$

les $F_i$ dépendant bien entendu de toutes les variables $x$. Tel est le système de Cauchy-Kowalewski qui donne la variété intégrale $M_p$ correspondant à $M_{p-1}$ et au choix des
12/13 fonctions arbitraires (c'est effectivement une variété intégrale, en vertu du théorème 2 relatif aux idéaux différentiels – Cf. exposé précédent –; pour plus de détails, voir Kähler).

Si maintenant l'on regarde, par le même procédé, l'arbitraire dont dépendent $M_{p-1}$, puis $M_{p-2}$, etc..., on arrive à la conclusion suivante : moyennant les hypothèses relatives à la régularité de la chaîne $I_0 \subset \cdots \subset I_p$ et à la numérotation des $x_i$ ($i > p$), il existe, au voisinage de l'élément intégral $I_p$, *une variété intégrale et une seule*

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_p)$$

correspondant au choix arbitraire des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rll} f_i(x_1, \ldots, x_p) & \text{pour} & p < i \leqslant r_p + p \\ f_i(x_1, \ldots, x_{p-1}, 0) & \text{pour} & r_p + p < i \leqslant r_{p-1} + p - 1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ f_i(x_1, \ldots, x_v, 0, \ldots, 0) & \text{pour} & r_{v+1} + v + 1 < i \leqslant r_v + v \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ f_i(0, \ldots, 0) & \text{pour} & r_1 + 1 < i \leqslant r; \end{array}$$

ce qui fait

$$\begin{array}{rlll} r_p & \text{fonctions arbitraires de} & p & \text{variables} \\ s_{p-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & p-1 & \ldots\ldots \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_v & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v & \ldots\ldots\ldots \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_1 & \text{fonctions arbitraires de} & 1 & \text{variable} \\ s & \text{constantes arbitraires.} & & \end{array}$$

13/14

Tel est, dans toute sa précision, le théorème d'existence et d'unicité locales relatif aux systèmes en involution, – ou, si l'on veut„ aux variétés intégrales dont les éléments de contact appartiennent à une famille *générale* d'éléments intégraux. Ce théorème vaut en particulier si $p$ est égal au genre $n$. Dans ce cas, $r_n = s_n$.

*Exemple : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme* $\Omega$*, de degré quelconque, soit (localement) la dérivée d'une forme* $\Pi$ *est que* $d\Omega = 0$*.*

La condition est évidemment nécessaire. On voit qu'elle est suffisante en résolvant le problème :

$$\Omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} y_{i_1, \ldots, i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

étant donnée, déterminer

$$\Pi = \sum_{i_1, \ldots, i_{k+1}} z_{i_1, \ldots, i_{k+1}}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}$$

de façon que

$$d\Pi - \Omega = 0 \tag{2}$$

Les $y$ sont des fonctions données des variables $x$, les $z$ des fonctions inconnues des $x$ ; 14/15
l'on doit résoudre le système de Pfaff (2) aux variables $z$ et $x$, et d'une façon précise, chercher les variétés intégrales à $p$ dimensions ($p$ étant le nombre des variables $x$) sur lesquelles $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \neq 0$.

On posera donc

$$dz_{i_1,\ldots,i_{k+1}} = \sum_{\alpha=1}^{p} \ell^{\alpha}_{i_1,\ldots,i_{k+1}}\, dx_\alpha$$

et l'on obtiendra le système $\varphi_p(x, \ell^1, \ldots, \ell^p) = 0$ en portant ces valeurs des $dz$ dans l'équation (2) (Ici la forme $d\Pi - \Omega$ sert de base à l'idéal différentiel, puisque d'après l'hypothèse $d\Omega = 0$, sa dérivée est nulle). Le système obtenu est linéaire par rapport à tous les $\ell$, et son examen montre facilement que le système de Pfaff étudié est en involution pour la dimension $p$.

Ici l'intégration du système de Cauchy-Kowalewski se réduit à de *simples quadratures*, et les résultats subsistent même si les données du problème ne sont pas analytiques (il suffit de supposer que les $y$ sont des fonctions continument différentiables des $x$).

*Cas où le théorème d'existence est muet.* Le théorème d'existence et d'unicité locales,
15/16 relatif aux variétés à $p$ dimensions dont les éléments de contact appartiennent à la famille *générale* $V_p$ des éléments intégraux à $p$ dimensions, ne vaut qu'au voisinage d'un élément intégral général *régulier*. Les éléments non réguliers constituent, dans $V_p$, une ou plusieurs sous-familles (analytiques irréductibles) dont la dimension est moindre que celle de $V_p$ ; au voisinage d'un tel élément, le théorème est muet.

Prenons un exemple : soit l'équation de Pfaff à deux variables $x$ et $y$,

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

le système est en involution pour $p = 1$, et les éléments intégraux à une dimension sont tous *généraux*. Parmi eux, sont *réguliers* ceux dont le point d'appui n'est pas $x = y = 0$. or, on peut obtenir la courbe intégrale relative à un élément *non régulier* en appliquant le théorème d'existence au système *prolongé*

$$xz - y = 0 \qquad dy - z\,dx = 0,$$

et il est naturel de se demander si la circonstance qui se présente ici n'est pas susceptible d'être généralisée à tous les cas.

Il n'en est rien, comme le prouve le système

$$x\,dx - y\,dy = 0;$$

autant de fois qu'on le prolonge, les deux éléments intégraux à une dimension ayant l'origine pour point d'appui restent *non réguliers* pour le prolongement. Par suite ; l'existence des courbes intégrales passant par l'origine ne peut être établie, dans ce
16/17 cas, par l'application du théorème d'existence au cas régulier.

En définitive, l'étude de l'ensemble des variétés intégrales au voisinage d'un élément intégral *non régulier* peut nécessiter l'usage de théorèmes d'existence plus compliqués que le théorème de Cauchy-Kowalewski dans le cas régulier. Nous laisserons cette question complètement de côté.

*Cas des points non simples des variétés intégrales.* Dans le précédent exposé, nous avons défini ce qu'il faut entendre par variété intégrale dans le cas d'une variété analytique irréductible quelconque. Or, le théorème d'existence relatif aux éléments réguliers ne nous fournit que des variétés à points simples, et l'on est alors en droit de se demander comment on obtiendra les points non simples des variétés intégrales. Bornons-nous à l'indication suivante : un point non simple d'une variété intégrale à $p$ dimensions peut être, au moins dans certains cas, obtenue comme point simple d'une variété intégrale d'un *prolongement* (à $p$ dimensions) du système de Pfaff étudié. Ou plutôt, dans le prolongement, chaque point multiple de la variété donne naissance à une infinité de points de la variété prolongée ; et il est probable qu'un nombre suffisant de prolongements finit par décomposer chaque point multiple en points simples. Il y a 17/18
là une question qui mérite d'être étudiée ; elle n'est pas encore complètement résolue même dans le cas des variétés algébriques.

## II.– Étude d'une famille quelconque d'invariants intégraux

Nous avons déjà défini l'*intégrale générale à p dimensions* d'un système de Pfaff (fin du précédent exposé). Est dite générale toute variété intégrale dont les éléments de contact principaux sont *généraux*, et qui, en outre, possède au moins un élément de contact *régulier.* La partie I de cet exposé a été consacrée au théorème d'existence relatif aux variétés intégrales générales à $p$ dimensions. – avec la restriction indiquée plus haut pour le cas des éléments non réguliers.

Si une variété intégrale à $p$ dimensions (que $p$ soit inférieur, égal ou supérieur au genre $n$) n'est pas une variété intégrale générale, ses éléments de contact appartiennent à une famille $\mathcal{F}$ (analytique, irréductible) *non générale* d'éléments intégraux à $p$ dimensions.

Pour déterminer toutes les variétés intégrales à un nombre donné $p$ de dimensions, 18/19
nous sommes donc ramenés à étudier successivement toutes les familles d'éléments intégraux.

Nous nous bornerons au cas où la famille $\mathcal{F}$ à étudier est définie par des relations

$$\varphi(x, \ell) = 0 \tag{3}$$

entre les paramètres $\ell_i^\alpha$ des éléments intégraux à $p$ dimensions

$$\omega_i - \sum_{\alpha=1}^{p} \ell_i^\alpha \omega_\alpha = 0 \tag{4}$$

(Cf. partie I du présent exposé). Nous nous proposerons de trouver les variétés intégrales à $p$ dimensions correspondantes, c'est-à-dire les variétés intégrales à $p$ dimensions du système de Pfaff (3), (4), sur lesquelles

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$$

Le résultat essentiel peut être formulé ainsi :

***Théorème de prolongement.*** *Chaque variété intégrale peut être considérée comme variété intégrale générale d'un prolongement convenable du système (3), (4).*

Autrement dit, par des opérations algébriques bien déterminées, en nombre fini, on est amené à former de nouveaux systèmes de Pfaff, et à déterminer leur intégrale générale par les procédés de la Ière partie.

19/20 Nous devons nous borner à quelques indications sur la démonstration de ce résultat essentiel, qui met en évidence, a posteriori, l'importance des systèmes « en involution ».

Le système de Pfaff (3), (4), est d'un type particulier. Il définit un idéal *différentiel* auquel on peut donner pour base

$$\varphi(x,\ell), \qquad d\varphi, \qquad \theta_i = \omega_i - \sum_\alpha \ell_i^\alpha \omega_\alpha, \qquad d\theta_i$$

c'est-à-dire des formes de degrés 0, 1 et 2. En changeant les notations (et en appelant de nouveau $x$ toutes les variables) on a :

1°– des formes $a(x)$ de degré 0

2°– des formes $\theta_1, \dots, \theta_s$ de degré un

3°– des formes de degré 2

$$\psi_i = \sum_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{i\alpha}\omega_\alpha$$

où $\omega_1, \dots, \omega_p$ ont la même signification que plus haut, et où les $\overline{\omega}_{i\alpha}$ sont des formes du premier degré.

Nous supposons, bien entendu, que les formes $a(x)$ constituent une base pour l'idéal premier de la variété des points intégraux, supposée irréductible ; et que les formes $\theta_1, \dots, \theta_s$ sont indépendantes. Cela étant, *nous nous proposons d'étudier le système de Pfaff* :

$$a = 0, \qquad \theta_j = 0 \quad (i = 1, \dots, s), \qquad \psi_i = \sum_\alpha \overline{\omega}_{i\alpha}\omega = 0 \quad (i = 1, \dots)$$

20/21 *et d'une façon précise, de déterminer les variétés intégrales à $p$ dimensions sur lesquelles $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0$.*

Or voici en bref, comment E.Cartan traite les systèmes de ce type, que nous appellerons le type (C).

Tout d'abord, si les formes $\theta_j$ et $\omega_\alpha$ sont dépendantes, c'est-à-dire s'il existe une identité à coefficients holomorphes

$$\sum_\alpha a_\alpha \omega_\alpha + \sum_j b_j \theta_j = 0$$

on a nécessairement $s_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, p$) sur les variétés intégrales cherchées, puisque $\omega_1, \dots, \omega_p$ sont indépendantes sur ces variétés. Les équations

$$a_\alpha = 0$$

sont alors à joindre aux équations $a = 0$ de la variété des points intégraux, qui peut ainsi se décomposer en variétés de dimension moindre. Dans ce cas, il faut reprendre le problème pour chacune de ces variétés ; et il se peut qu'on soit amené, par le même procédé, à réduire de nouveau leur dimension. Ces opérations auront nécessairement une fin, et on sera finalement amené à étudier des systèmes de Pfaff du type (C) pour lesquels les formes $\omega_\alpha$ et $\theta_j$ seront *indépendantes.* (ou alors, s'il ne subsiste aucun tel système, c'est que le système initial ne possède pas de variétés intégrales du type cherché).

Les $p + s$ formes $\omega_\alpha$ et $\theta_j$ étant désormais supposées indépendantes, on peut leur 21/22
adjoindre $q = r - p - s$ ($r$ désignant toujours le nombre total des variables) formes $\overline{\omega}^\rho$ $(\rho = 1, \dots, q)$, telles que les $\omega_\alpha$, les $\theta_j$ et les $\overline{\omega}_\rho$ forment une base pour les formes du premier degré. En particulier, les $\overline{\omega}_{i\alpha}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des $\omega_\alpha$, $\theta_j$ et $\overline{\omega}_\rho$, à coefficients analytiques

$$\overline{\omega}_{i\alpha} = \sum_{\rho=1}^{q} a_{i\rho\alpha}\overline{\omega}_\rho + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{p} c_{i\alpha\beta}\omega_\beta + (\cdots)\theta_j \qquad (c_{i\alpha\beta} = -c_{i\beta\alpha})$$

ici, attention : les coefficients $a_{i\alpha\beta}$ et $c_{i\alpha\beta}$ peuvent avoir des pôles. Ils seraient holomorphes dans le cas où les $\omega_\alpha$ et les $\theta_j$ seraient non seulement indépendantes, au sens absolu, mais indépendantes *en chaque point.* Or, en un point particulier $(x) = (x)^0$, les formes $\omega_\alpha$ et $\theta_j$ peuvent être indépendantes sans l'être identiquement : dans ce cas, $(x)^0$ peut être un *pôle* pour les coefficients $a_{i\alpha\beta}$, $c_{i\alpha\beta}$.

Avec ces notations, on a

$$\psi_i \equiv \chi_i \quad (\text{mod.}\theta_j)$$

en posant

$$\chi_i = \sum a_{i\alpha\rho}\overline{\omega}_\rho\omega_\alpha + \sum \frac{1}{2}c_{i\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta;$$

et le système de Pfaff peut s'écrire 22/23

$$\varphi = 0, \qquad \theta_j = 0, \qquad \chi_i = 0$$

Un élément intégral à $p$ dimensions est défini par les coordonnées $\ell_p^\alpha$

$$\overline{\omega}_\rho = \sum_\alpha \ell_p^\alpha\omega_\alpha, \qquad \theta_j = 0$$

en portant dans $\chi_i = 0$, on trouve

$$\sum_\rho (a_{i\alpha\beta}\ell_\rho^\beta - a_{i\beta\rho}\ell_\rho^\alpha) = c_{i\alpha\beta} \qquad (\alpha < \beta \leqslant p); \tag{5}$$

telles sont les équations que dans la première partie nous avons nommées

$$\varphi_p(x, \ell^1, \dots, \ell^p) = 0$$

Ici ces équations sont *linéaires* par rapport à toutes les inconnues $\ell$. Il faut étudier ce système linéaire, et tout d'abord écrire qu'il est compatible. Cela donne, éventuellement, des relations entre les variables $x$ du système de Pfaff initial ; ces relations sont

à joindre aux relations $a = 0$, et il faut alors tout recommencer. De même que plus haut, on repart sur de nouveaux systèmes de Pfaff du type (C), et on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des systèmes pour lesquelles [sic] les équations (5)
23/24 soient compatibles.

Supposons donc désormais les équations (5) compatibles, nous pouvons, en désignant par $\lambda_\rho^\alpha$ une solution particulière, prendre les formes

$$\overline{\omega}_\rho - \sum_\alpha \lambda_\rho^\alpha \omega_\alpha$$

comme nouvelles formes $\overline{\omega}_\rho$, cela revient à supposer que le système (5) admet la solution $\ell_\rho^\alpha = 0$ ; donc que

$$c_{i\alpha\beta} = 0$$

*C'est ce que nous admettrons désormais.*

Le système de Pfaff est alors caractérisé par le système des fonctions $a_{i\alpha\beta}$ ; s'il est en involution, et si les formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ définissent des chaînes régulières. Nous formerons, pour chaque valeur de $\nu$ ($\nu < p$) le sous-système qui était désigné par

$$\varphi_\nu(x, \ell^1, \ldots, \ell^\nu) = 0$$

et qui, ici, se réduit à celles des équations (5) pour lesquelles $\beta \leqslant \nu$. Nous obtenons ainsi une chaîne de sous-systèmes dont le seul examen permet de reconnaître s'il y a involution pour la dimension $p$.

E.Cartan substitue aux inconnues $\ell_\rho^\alpha$ d'autres inconnues, savoir les $\ell_{i\alpha\beta}$ définies
24/25 par

$$\overline{\omega}_{i\alpha} = \sum_\beta \ell_{i\alpha\beta}\omega_\beta$$

les relations qui lient les $\ell_{i\alpha\beta}$ aux $\ell_\rho^\alpha$ sont évidentes et conduisent aussitôt aux équations déterminant les $\ell_{i\alpha\beta}$. Ces équations sont de deux sortes :

1°– $\ell_{i\alpha\beta} = \ell_{i\beta\alpha}$ (équations traduisant les équations (5)) ;

2°– toute relation linéaire qui existe entre les $\overline{\omega}_{i\alpha}$ doit, pour chaque valeur fixe de $\beta$, exister entre les $\ell_{i\alpha\beta}$ correspondantes (ces relations entre les $\ell_{i\alpha\beta}$ expriment les conditions de compatibilité des équations donnant les $\ell_\rho^\alpha$ en fonction des $\ell_{i\alpha\beta}$).

En définitive, la formation du système d'équations (linéaires) en $\ell_{i\alpha\beta}$ se ramène à *l'étude de la dépendance des formes du premier degré* $\overline{\omega}_{i\alpha}$. Et la condition pour qu'il y ait involution fait intervenir uniquement les relations linéaires qui existent entre les $\overline{\omega}_{i\alpha}$.

Nous arrêtons ici notre exposé, renvoyant pour la suite au mémoire original de E.Cartan (Ann.Ec.Norm.1904), dans lequel on trouvera une démonstration du théorème de prolongement énoncé plus haut.

Nous avons voulu conduire le présent exposé jusqu'au point où apparaît nettement la méthode de E.Cartan : elle consiste à raisonner sur des systèmes de *formes* de
25/26 Pfaff (du premier degré) et ne fait intervenir que les relations linéaires qui existent

entre ces formes ; on peut ensuite normer des systèmes par des substitutions linéaires convenables.

La structure du système de Pfaff étudié se trouve ainsi mise en évidence, et il n'est pas étonnant que cette méthode se soit montrée féconde en géométrie différentielle et soit adaptée à l'étude des groupes continus.

## Compléments
## Quelques types importants de systèmes en involution

### 1.– Systèmes complètement intégrables.

*Définition.* Par un $E_0$ intégral passe (en général) un $E_n$ intégral et un seul ($n =$ genre du système). Condition équivalente :

$$s_1 = \cdots = s_n = 0, \qquad s = r - n$$

Autre condition équivalente : au voisinage du point intégral le plus général on peut donner à l'idéal différentiel $\mathcal{I}$ une base formée de $(r-n)$ formes indépendantes du premier degré $\omega_1, \ldots, \omega_{r-n}$

$$\text{(on a donc } d\omega_i \equiv 0 \pmod{\omega_i}\text{)}$$

Réciproquement, des équations du premier degré $\omega_i = 0$ telles que

$$d\omega_i \equiv 0 \pmod{\omega_i}$$

définissent un système complètement intégrable. 26/27

*Propriété caractéristique :* par chaque point intégral passe (en général) une variété intégrale $M_n$ et ne seule ; les $M_n$ dépendent donc de $s = r - n$ *constantes arbitraires*. Si on résout par rapport à ces constantes, on trouve *s intégrales premières*, dont les différentielles totales constituent une base pour l'idéal $\mathcal{I}$.

*Méthode d'intégration :* basée sur la propriété caractéristique : tout lieu de courbes intégrales qui s'appuient sur une variété intégrale est une variété intégrale. Par exemple, on cherche un lieu de courbes intégrales passant par un point fixe et dépendant de $n$ paramètres.

**2.– Systèmes pour lesquels $s_{p+1} = \cdots = s_n = 0$.** Pour $p = 0$, ce sont les systèmes complètement intégrables. Pour $p$ quelconque, ce sont les systèmes jouissant de la propriété : par un $E_p$ intégral passe (en général) un $E_n$ intégral et un seul.

Alors par une variété intégrale $M_p$ passe, en général, une variété $M_n$ et une seule (Cf. l'indétermination de l'intégrale générale, partie I de cet exposé). On en déduit une méthode d'intégration qui généralise celle des systèmes complètement intégrables (voir E.Cartan, Ann.Ec.Norm.1901). 27/28

**3.– Systèmes admettant des caractéristiques de Cauchy.** Ce sont ceux pour lesquels les $E_n$ intégraux qui passent par un point intégral ont en commun des éléments linéaires (formant nécessairement une variété linéaire $F_{n-p}$ nous désignerons par $n-p$ le nombre de ses dimensions). On a alors

$$s_{p+1} = \cdots = s_n = 0$$

et l'on est donc dans un cas particulier du cas 2.

Pour qu'un élément linéaire (passant par un point intégral) appartienne à la variété $F_{n-p}$ (relative à ce point), il faut et il suffit qu'il engendre, avec chaque $E_{n-1}$ intégral, un élément intégral. D'où un procédé pour former les équations de $F_{n-p}$ : un $E_n$ étant défini par les coordonnées d'un $E_{n-1}$ et par les paramètres $dx_1, \ldots, dx_r$ d'un $E_1$, on écrit que $E_n$ est intégral ; entre les équations obtenues on élimine les coordonnées de $E_{n-1}$, et il reste (si possible) des relations linéaires entre $dx_1, \ldots, dx_r$. Ce sont les équations cherchées de $F_{n-p}$.

Le système différentiel ainsi obtenu (appelé *système caractéristique*) est *complètement intégrable*. Autrement dit, il existe une variété à $n-p$ dimensions et une seule, tangente en chaque point intégral à $F_{n-p}$. Cette variété est commune à toutes les $M_n$ passant par ce point. D'où génération des variétés intégrales $M_n$ par les variétés
28/29 caractéristiques à $(n-p)$ dimensions.

Le système de Pfaff initial peut s'écrire de façon à ne faire intervenir que les intégrales premières du système caractéristique et leurs différentielles. Les équations ainsi obtenues indiquent la loi suivant laquelle les variétés caractéristiques doivent être associées pour engendrer une variété intégrale.

## Bibliographie

Outre les ouvrages cités dans l'exposé précédent :

*E. CARTAN.*– Sur la structure des groupes infinis de transformations (Ann.Ec.Norm., 3ème série, 21, 1904, p.153–206) ; la première partie du mémoire est relative à notre sujet, et contient une démonstration du « théorème du prolongement ».

### Notes

1. La bibliographie en fin d'exposé renvoie à celle de l'exposé précédent (c'est-à-dire à [Car01] et [Käh34]. Elle ajoute un autre article [Car04] d'Élie Cartan (ces deux articles sont invoqués dans le cours de l'exposé).
2. Nous avons corrigé d'après l'erratum, relié après l'exposé G dans l'exemplaire de l'IRMA.

## Références

[Car01] É. Cartan – « Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)* **18** (1901), p. 241–312.

[Car04] ———, « Sur la structure des groupes infinis de transformations », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)* **21** (1904), p. 153–206.

[Käh34] E. Kähler – *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Hamburg. Math. Einzelschr., Teubner, Leipzig, Berlin, 1934.