LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

1. Année 1933-1934
Théorie des groupes et des algèbres

Claude Chevalley

Modules

Séminaire de mathématiques (1933-1934), Exposé 1-B, 9 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1933-1934__1__B_0.pdf>

cedram
Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire de mathématiques 27 novembre 1933
Exposé 1-B, p. 1 à 9

MODULES

par **Claude Chevalley**

Définition du module. On appelle[1] module un groupe abélien écrit sous forme additive. L'élément unité du groupe se représente par 0, et l'élément inverse d'un élément a par $-a$.

Anneau. On appelle anneau un système $\mathfrak{o}$ d'éléments $\alpha, \beta, \dots$ jouissant des propriétés suivantes :

a) C'est un module.

b) Il existe dans $\mathfrak{o}$ une seconde loi de composition, appelée multiplication, satisfaisant aux conditions suivantes :

   A) associativité : $(\alpha\beta) \cdot \gamma = \alpha(\beta\gamma)$

   B) distributivité : $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

1.– Modules par rapport à un anneau. Supposons qu'un module $\mathfrak{M}$ admette les éléments d'un anneau $\mathfrak{o}$ comme opérateurs, c'est-à-dire que α étant dans $\mathfrak{o}$ et a dans $\mathfrak{M}$, αa soit un élément défini de $\mathfrak{M}$, et que, de plus, $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$. Supposons de plus que $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ $(\alpha \subset \mathfrak{o}, \beta \subset \mathfrak{o})$

Dans ces conditions, *on dit que $\mathfrak{M}$ est module par rapport à $\mathfrak{o}$ ou $\mathfrak{o}$-module* (gauche si dans la multiplication d'un élément de $\mathfrak{o}$ par un élément de $\mathfrak{M}$, on écrit l'élément de $\mathfrak{o}$ à gauche).[2]

Exemple : si $\mathfrak{o}$ est l'anneau des entiers rationnels, tout module $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{o}$-module. En effet, a étant dans $\mathfrak{M}$ et ν étant un entier, on pose : 1/2

$$\begin{aligned} &\text{Si } \nu > 0, \qquad \nu a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\nu \text{ fois}} \\ &\text{Si } \nu = 0, \qquad 0 \cdot a = 0 \\ &\text{Si } \nu < 0, \qquad \nu a = -(-\nu)a \end{aligned}$$

Convention. Nous aurons dans cet exposé à considérer des modules par rapport à un certain anneau $\mathfrak{o}$. Les seuls sous-modules que nous considérerons seront des sous-modules « permis » (c'est-à-dire qui sont aussi des $\mathfrak{o}$-modules) de sorte que nous nous abstiendrons de le répéter à chaque fois. D'autre part les éléments des modules que nous considérerons seront désignés par des minuscules latines, ceux de $\mathfrak{o}$ par des minuscules grecques.

2.– Addition des sous-modules. Considérons un module $\mathfrak{M}$ et des sous-modules $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$ de $\mathfrak{M}$. On appelle *somme* de ces sous-modules et on désigne par $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \cdots + \mathfrak{N}_k$ le module composé des éléments de la forme $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ avec $n_i \subset \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.[3] Si d'ailleurs un élément de la somme ne se met que d'une manière sous la forme $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, $n_i \subset \mathfrak{N}_i$, la somme est dite *directe* et peut se représenter par $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_k$. Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que la condition $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 0$, $n_i \subset \mathfrak{N}_i$, entraîne $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 0$.

2/3 **3.– Idéaux.** En vertu de l'existence de la multiplication $\mathfrak{o}$ est lui-même $\mathfrak{o}$-module gauche. Les $\mathfrak{o}$-modules gauches contenus dans $\mathfrak{o}$ sont appelés *idéaux à gauche* de $\mathfrak{o}$. On définit de même les *idéaux à droite.* Si la multiplication est commutative dans $\mathfrak{o}$, ces deux notions coïncident.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de $\mathfrak{o}$, et soit $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{o}$-module à gauche. Si u est dans $\mathfrak{M}$, l'ensemble des produits des éléments de $\mathfrak{a}$ par u constitue un sous-module de $\mathfrak{M}$ qu'on désigne par $\mathfrak{a}u$. De même si $\mathfrak{N}$ est un sous-module, l'ensemble des éléments de la forme $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \cdots + \alpha_k n_k$ avec $\alpha_i \subset \mathfrak{a}$, $n_i \subset \mathfrak{N}$ constitue un sous-module qu'on désigne par $\mathfrak{a}\mathfrak{N}$. On a :

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{N} + \mathfrak{N}') = \mathfrak{a}\mathfrak{N} + \mathfrak{a}\mathfrak{N}'$$

4.– Base d'un module. À partir de maintenant, nous supposerons pour simplifier que $\mathfrak{o}$ contienne une unité 1, c'est-à-dire un élément tel que pour tout élément α de $\mathfrak{o}$ on ait $1 \cdot \alpha = \alpha$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Nous supposerons de plus que les $\mathfrak{o}$-modules que nous considérerons seront tels que $1 \cdot a = a$ pour tout a du module.

Si on peut trouver dans un $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{M}$ un système d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}x_1 + \mathfrak{o}x_2 + \cdots + \mathfrak{o}x_n$, ces éléments seront dits constituer une *base*[4] de $\mathfrak{M}$. Si de plus la somme du second membre est directe, la base est dite *minima.* Pour cela il faut et il suffit que les x_i soient linéairement indépendants (par rapport à $\mathfrak{o}$)
3/4 c'est-à-dire qu'il n'existe aucune égalité de la forme : $\displaystyle\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$ à coefficients α_i non tous nuls dans $\mathfrak{o}$.

5.– Critère d'existence d'une base. Supposons qu'un module $\mathfrak{M}$ ne possède pas de base. Définissons par récurrence $\mathfrak{M}_r$ de la manière suivante :

(1) $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{o}x_1$ où x_1 est un élément différent de 0 de $\mathfrak{M}$

(2) $\mathfrak{M}_r$ étant défini et ayant une base $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ n'étant pas identique à $\mathfrak{M}$, on prend un élément x_{r+1} de $\mathfrak{M}$ non situé dans $\mathfrak{M}_r$ et on pose : $\mathfrak{M}_{r+1} = \mathfrak{M}_r + \mathfrak{o}x_{r+1}$, ce qui définit $\mathfrak{M}_{r+1}$ et démontre qu'il a une base. $\mathfrak{M}_{r+1}$ contient $\mathfrak{M}_r$ sans lui être identique.

Donc $\mathfrak{M}$ ne satisfait pas au

Teilerkettensatz. *Toute suite croissante de sous-modules ne contient qu'un nombre fini de termes.*[5]

On a démontré que

Si un module $\mathfrak{M}$ satisfait au Teilerkettensatz, il possède une base.

La réciproque n'est pas vraie en général, mais elle est vraie dans le cas où $\mathfrak{o}$, considéré comme $\mathfrak{o}$-module à gauche, satisfait au Teilerkettensatz. On démontre en effet le théorème suivant (Van der Waerden, Moderne Algebra, t.II, p.87)[6]

Si $\mathfrak{o}$ satisfait au Teilerkettensatz, et si un $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{M}$ y satisfait également, tout sous-module de $\mathfrak{M}$ possède une base.

Les sous-modules qui possèdent une base sont souvent appelés *finis*. 4/5

6.– Corps. Un anneau $\mathfrak{K}$ s'appelle un *corps* quand il jouit de la propriété suivante : α, β étant les éléments de $\mathfrak{K}$ avec $\beta \neq 0$, il existe un élément γ et un seul tel que $\alpha = \gamma\beta$ et quand de plus il ne se réduit pas à l'élément 0.

Les corps $\mathfrak{K}$ sont caractérisés par cette propriété qu'ils ne possèdent que deux idéaux à gauche distincts, à savoir (0) et $\mathfrak{K}$. Ils satisfont au Teilerkettensatz.

7.– Modules par rapport à un corps. Soit $\mathfrak{K}$ un corps et soit $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{K}$-module fini. Répétons la construction faite au début du paragraphe 5. La suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'arrête au bout d'un nombre fini n de termes. Les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forment une base de $\mathfrak{M}$. Cette base est minima. Supposons en effet qu'il existe une relation $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$, les α_i n'étant pas tous nuls. Soit α_{n_0} le dernier coefficient différent de 0. On a

$$x_{n_0} = -\alpha_{n_0}^{-1}\alpha_1 x_1 - \alpha_{n_0}^{-1}\alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_{n_0}^{-1}\alpha_{n_0-1}x_{n_0-1}$$

ce qui est impossible.

Donc : *Si $\mathfrak{K}$ est un corps, un $\mathfrak{K}$-module fini possède une base minima.*[7]

On démontre que le nombre des éléments d'une base est indépendant de cette base et égal au rang du module, c'est-à-dire au nombre maximum d'éléments linéairement indépendants du module. 5/6

8.– Modules par rapport à l'anneau des entiers rationnels. À partir de maintenant, $\mathfrak{o}$ désignera l'anneau des entiers rationnels, k le corps des nombres rationnels, et $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$... des $\mathfrak{o}$-modules finis.[8]

On dit que $\mathfrak{M}$ est *régulier* si la condition

$$\nu a = 0 \qquad \nu \subset \mathfrak{o} \qquad a \subset \mathfrak{M}$$

entraîne qu'un des éléments ν, a, est nul.(1)

A) *Étude des modules réguliers finis.* Nous allons d'abord supposer $\mathfrak{M}$ régulier. On démontre d'abord facilement que $\mathfrak{M}$ est isomorphe à un module contenu dans un k-module fini $\mathfrak{M}_k$. Nous supposerons donc que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_k$.

Si $\mathfrak{M} \neq (0)$ soit u_1 un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{M}$. On appelle coefficient de u_1 (par rapport à $\mathfrak{M}$) l'ensemble des éléments ξ de k tels que ξu_1 soit dans $\mathfrak{M}$. C'est un $\mathfrak{o}$-module qui est isomorphe à l'ensemble des ξu_1, donc qui est fini. Or :

Un $\mathfrak{o}$-module fini $\mathfrak{a}$ contenu dans k se compose des multiples d'un nombre rationnel ρ. On écrit $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\rho = (\rho)$.

En effet, $\mathfrak{a}$ possède une base $(\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_k)$. Il en résulte que les dénominateurs des nombres de $\mathfrak{a}$ (mis sous forme réduite) divisent les produits des dénominateurs des ξ_i. Il existe donc, dans $\mathfrak{a}$ (si $\mathfrak{a} \neq 0$) un nombre rationnel positif minimum ρ ; soit ξ un élément quelconque de $\mathfrak{a}$. On a $\xi = \nu\rho + \rho'$, $\nu \subset \mathfrak{o}$,
6/7 $0 \leqslant \rho' < \rho$, $\rho' = \xi - \nu\rho$ est dans $\mathfrak{a}$, d'où $\rho' = 0$, ce qui démontre la proposition.

Ceci posé, revenons au module $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{o}\rho u_1$. $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ est un module régulier. En effet, soit $v^\star \subset \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ et soit v un élément de $\mathfrak{M}$ contenu dans la classe $v^\star$ (mod. $\mathfrak{M}_1$). Supposons $\lambda v^\star = 0$; on a $\lambda v = \nu\rho u_1$, ν entier. Si $\lambda \neq 0$ on a $v = \lambda^{-1}\nu\rho u_1$ et $v^\star = 0$.

Ceci conduit à la définition suivante :

Un sous-module $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ soit régulier est dit primitif. $\mathfrak{N}$ étant un sous-module primitif, nous allons montrer qu'il existe un autre sous-module $\mathfrak{P}$ tel que

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{P}$$

Définissons par récurrence des éléments $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de la manière suivante :

a) On a $v_0 = 0$

b) Si $v_1, v_2, \ldots, v_i$ sont déjà définis et si $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N} + \mathfrak{o}v_1 + \mathfrak{o}v_2 + \cdots + \mathfrak{o}v_i$ est primitif, soit $u^\star_{i+1}$ un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i$ (s'il y en a, sinon v_{i+1} ne sera pas défini) et soit ρ_{i+1} son coefficient par rapport à $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i$. Soit u_{i+1} un élément de $\mathfrak{M}$ appartenant à la classe $u^\star_{i+1}$ (mod. $\mathfrak{N}_i$). On pose $v_{i+1} = \rho_{i+1}u_{i+1}$, $\mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}_i + \mathfrak{o}v_{i+1}$.

1. Voir la note 9.

En vertu de l'un des théorèmes d'isomorphisme, on a :

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_{i+1} \simeq (\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_i)/\mathfrak{o}\rho_{i+1}u^\star_{i+1}$$

et par suite $\mathfrak{N}_{i+1}$ est primitif. La suite des modules $\mathfrak{N}_i$ est croissante et par suite, au bout d'un nombre fini n d'opérations, on sera arrêté, ce qui signifie que $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}$. Posons $\mathfrak{P} = \mathfrak{o}v_1 + \mathfrak{o}v_2 + \cdots + \mathfrak{o}v_n$. Supposons qu'il existe une 7/8
relation de la forme $u + \sum\limits_1^n \alpha_i v_i = 0$ avec $u \subset \mathfrak{N}$, $\alpha_i \subset \mathfrak{o}$.

Soit α_{n_0} le dernier coefficient $\neq 0$ (s'il y en a). Dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}_{n_0-1}$, on a $\alpha_{n_0} v^\star_{n_0} = 0$, ce qui est impossible. Donc les α_i sont tous nuls et par suite aussi u. Donc on a $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{P}$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forment une base minima de $\mathfrak{P}$.

Donc : *Si $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{o}$-module régulier fini, et si $\mathfrak{N}$ est un sous-module primitif, il existe un autre sous-module $\mathfrak{P}$ tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{P}$. De plus, $\mathfrak{M}$ possède une base minima.*

On démontre de plus facilement que le nombre des éléments d'une base minima de $\mathfrak{M}$ est égal au rang de $\mathfrak{M}$.

B) *Étude des modules finis quelconques.* Soit à partir de maintenant $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{o}$-module fini quelconque. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une base de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{N}$ le module des formes linéaires par rapport à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients dans $\mathfrak{o}$. La correspondance $\sum\limits_1^n \alpha_i x_i \longrightarrow \sum\limits_1^n \alpha_i u_i$ est une homomorphie. Donc $\mathfrak{M}$ est homomorphe à $\mathfrak{N}$ et par suite isomorphe au quotient $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{N}$ par un de ses sous-modules $\mathfrak{P}$. Or nous allons démontrer que :

Si $\mathfrak{N}$ est un $\mathfrak{o}$-module régulier fini, si $\mathfrak{P}$ est sous-module de $\mathfrak{N}$, il existe des bases minima $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $\mathfrak{N}$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathfrak{P}$ telles que $v_i = \varepsilon_i u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ les ε_i étant des entiers tels que ε_i divise ε_{i+1}. 8/9

Soit w un élément $\neq 0$ de $\mathfrak{P}$ et soient $\mathfrak{o}\rho$, $\mathfrak{o}\sigma$ ses coefficients par rapport à $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$. On a $\mathfrak{o}\sigma \subset \mathfrak{o}\rho$ et par suite $\sigma = \nu_w \rho$, ν_w étant un entier (défini par w au signe près ; nous le supposerons > 0) qu'on appelle *coefficient relatif* de w. Désignons par $\overline{u}$ l'homologue dans $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ d'un élément u de $\mathfrak{N}$. Alors ν_w est le plus petit entier ν positif tel que $\nu\overline{\rho w} = 0$. On voit tout de suite que les éléments $\overline{u}$ de $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ tels que $\nu\overline{u} = 0$ (ν étant un entier fixe) forment un sous-module de $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ qui ne peut qu'augmenter quand on remplace ν par un multiple. Il en résulte, en vertu du Teilerkettensatz dans $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ que les coefficients relatifs des éléments w de $\mathfrak{P}$ divisent tous un entier fixe δ. Soit $\delta = \prod\limits_1^h \varpi_i^{n_i}$ la décomposition de δ en facteurs premiers. Soit d'autre part ε le p.g.c.d. de tous les coefficients relatifs ν_w. On a $\mathfrak{P} \subset \varepsilon\mathfrak{N}$ mais $\mathfrak{P} \not\subset \xi\varepsilon\,\mathfrak{N}$ si ξ est un entier > 1. Déterminons un élément w_i de $\mathfrak{P}$ tel que

$$w_i \not\subset \varpi_i \varepsilon\, \mathfrak{N} \qquad (i = 1, 2, \dots, h)$$

et soit φ_i un entier tel que :

$$\varphi_i \equiv 1\, (\text{mod. } \varpi_i) \qquad \varphi_i \equiv 0\, (\text{mod. } \frac{\delta}{{\varpi_i}^{n_i}})$$

Soit $w = \sum_1^h \varphi_i w_i$, w n'est contenu dans aucun des modules $\varpi_i \varepsilon\, \mathfrak{N}$ et par suite $\frac{\nu w}{\varepsilon}$ n'est divisible par aucun des ϖ_i. Comme ce nombre divise δ, il est égal à ± 1 et même à $+1$ car ν_w et ε sont positifs.

9/10 Ceci posé le théorème à démontrer est à peu près évident si $n = 1$. Supposons-le démontré pour les modules $\mathfrak{N}$ ayant une base minima composée de moins de n éléments. w étant un élément déterminé comme nous venons de le dire, soient $\mathfrak{o}\rho$, $\mathfrak{o}\sigma$ ses coefficients par rapport à $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$. Posons $\rho w = u_1$, $\sigma w = v_1$. σu_1 est comme on l'a démontré dans A) un sous-module primitif de $\mathfrak{N}$; il existe donc un module $\mathfrak{N}_1$ tel que $\mathfrak{N} = \mathfrak{o} u_1 \oplus \mathfrak{N}_1$.

Soit u un élément de $\mathfrak{P}$. Comme $u \subset \varepsilon\mathfrak{N}$ on a $u = \varepsilon\alpha u_1 + v$ où $\alpha \subset \mathfrak{o}$, $v \subset \mathfrak{N}_1$. Mais $\varepsilon u_1 = v_1 \subset \mathfrak{P}$, donc $v \subset \mathfrak{P}$. Les éléments de $\mathfrak{P}$ contenus dans $\mathfrak{N}_1$ forment un sous-module $\mathfrak{P}_1$ et on a, d'après ce qu'on vient de voir, $\mathfrak{P} = \mathfrak{o} v_1 \oplus \mathfrak{P}_1$. D'autre part, $\mathfrak{N}_1$ possède une base composée de $n - 1$ éléments. Donc on peut trouver une base minima $(u_2, \dots, u_n)$ de $\mathfrak{N}_1$ et une base minima $(v_2, v_3, \dots, v_r)$ de $\mathfrak{P}_1$ telles que $v_i = \varepsilon_i u_i$, ε_i divisant ε_{i+1} $(i = 2, \dots, r)$. D'ailleurs $\mathfrak{P} \subset \varepsilon\mathfrak{N}$ ce qui montre que les ε_i sont divisibles par ε_1. Le théorème est donc démontré.

On en déduit la structure de $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ et par suite le théorème suivant :

Si $\mathfrak{M}$ est un $\mathfrak{o}$-module fini, on peut y trouver n éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ tels que tout élément de $\mathfrak{M}$ se mette et d'une seule manière sous la forme $\sum \alpha_i u_i$ avec les conditions $0 \leqslant \alpha_i < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$.

10/11 On peut encore dire que :

$\mathfrak{M}$ est somme directe d'un certain nombre de modules de la forme $\mathfrak{o}u$.

Ces derniers sont souvent appelés, par analogie avec la théorie des groupes, *modules cycliques.*

Enfin on a obtenu le théorème suivant de la théorie des groupes :

Un groupe abélien possédant un système d'un nombre fini de générateurs (en particulier un groupe abélien fini) est produit direct de groupes cycliques.

On remarquera que les méthodes de démonstration employées s'appuient exclusivement (à des détails près) sur les faits suivants : $\mathfrak{o}$ ne possède pas de diviseur de zéro, est commutatif et tous les idéaux de $\mathfrak{o}$ sont principaux, c'est-à-dire de la forme $\mathfrak{o}\rho$. Les théorèmes sont donc vrais pour tous les anneaux satisfaisant à ces conditions.[9] Ils se généralisent d'ailleurs encore pour des classes beaucoup plus vastes d'anneaux.

Notes

1. Cet exposé ne comporte pas de bibliographie. Le seul ouvrage qui y est cité est le deuxième volume [vdW31] de la Moderne Algebra de van der Waerden. Voir le compte rendu à la fin de l'exposé 1-C.
2. Module, défini et utilisé comme substantif, l'est aussi comme adjectif dans cet exposé.
3. Le symbole $\subset$ désigne ici l'appartenance.
4. Le mot base désigne une famille génératrice, c'est base minima ou minimale qui correspond à notre notion de base.
5. *Teilerkettensatz* se dit en français « condition de chaînes ascendantes ». Voir ci-dessous la discussion sur la traduction des termes étrangers signalée dans le compte rendu de l'exposé. Dans son article [Wei35], Weil proposa de nommer cette condition « théorème de la base finie ». Un anneau dont les idéaux satisfont à cette condition est ce que l'on appelle aujourd'hui un anneau noethérien. Il semble d'ailleurs que ce soit Claude Chevalley lui-même qui introduisit la terminologie « anneau noethérien » (d'ailleurs en anglais, « Noetherian ring »), une dizaine d'années plus tard, dans les deux articles [Che43, Che44].
6. Il s'agit du § 97, *Endliche $\mathcal{R}$-Moduln*.
7. Ici il serait bon de voir quand exactement la notion d'espace vectoriel s'est dégagée. En 1947, le chapitre II du livre d'algèbre de Bourbaki [Bou47] connaît les espaces vectoriels (et définit une base d'un module comme un système à la fois générateur et libre).
8. On va le voir abondamment dans les exposés suivants, les notations $\mathbf{Z}$ (pour $\mathfrak{o}$) et $\mathbf{Q}$ (pour k) sont loin d'être fixées.
9. Le théorème de structure des groupes abéliens de type fini est en réalité un théorème sur les modules de type fini sur les anneaux principaux. « Modules sur les anneaux principaux » sera le titre du chapitre VII du livre d'algèbre de Bourbaki [Bou52], presque vingt ans plus tard.

Des archives du séminaire...

Compte rendu de la séance du 25 [sic] novembre 1933

1. M.DEGLEIZE est autorisé par M.JULIA à assister aux séances.

2. 5 exemplaires seront tirés de chaque exposé. Un pour les archives (prêt) ; un pour la bibliothèque de l'E.N.S. un pour celle de H.P. (ne peuvent quitter les salles de lecture) ; un pour M.Julia. L'auteur garde l'original. C'est ce qui a été fait pour le premier exposé (DUBREIL).

3. La séance est ouverte à 16h.30, la répartition des exemplaires est indiquée ainsi que la possibilité d'en faire tirer d'autres aux frais des intéressés. La parole est donnée à M.CHEVALLEY qui, à la place de M.WEIL expose de 16h.35 à 17h.30 la théorie des Modules.

4. Discussion à propos du mot « Teilerkettensatz » sur les questions de terminologie doit-on traduire littéralement tous les mots étrangers ou leur chercher un équivalent ayant un sens précis ? Le soin de conclure est laissé à De POSSEL.

5. Thé. Séance levée à 18h [2].

Séminaire de Mathématiques

Année 1933–34. Théorie des Groupes et des Algèbres

Programme et date des séances [3] :

1.	Groupes	par MM.	DUBREIL	le	13 Nov.
2.	Modules		CHEVALLEY		25 Nov.
3.	Grandeurs idempotentes		De POSSEL		11 Déc.
4.	Algèbres de matrices		DIEUDONNÉ		8 Janvier
5.	Représentation des algèbres		DUBREIL		22 Janv.
6.	Représentation des groupes		E.CARTAN		12 Fév.
7.	Structure des corps gauches		CHEVALLEY		26 Fév.
8.			DIEUDONNÉ		12 Mars
9.	Nombres p-adiques		WEIL		9 Avril
10.	Arithmétique p-adique		H.CARTAN		25 Avril
11.	Arithmétique hypercomplexe		CHEVALLEY		8 Mai
12.	Loi de réciprocité		Mme CHEVALLEY		22 Mai

Avis

1. La cotisation est de 50 Frs. Ceux qui ne l'ont pas versée le 25 Nov. sont priés de la remettre au plus tôt à M.MAGNIER 45 rue d'Ulm Paris 5ème ou à la séance du 11 Décembre. Elle est destinée à couvrir les frais de tirage de la rédaction des exposés faits

2. Sur les exemplaires tirés *un* peut être prêté *deux* peuvent être consultés : l'un à la Bibliothèque de l'École Normale, l'autre à la Bibliothèque de l'Institut Poincaré.

3. Les personnes désireuses d'avoir des exemplaires de ces exposés sont priées de se faire connaître. *Prix :* 39 Frs. pour un exemplaire et 6,50 par exemplaire en plus pour le premier exposé (Théorie des groupes) [4].

---

2. Une page ronéotypée, archives de l'IHP.

3. Une page ronéotypée, archives de l'IHP. Le programme, en tout cas les dates, furent à nouveau modifiées à la séance suivante. On notera l'exposé que devait donner Madame Chevalley. Jacqueline Chevalley, cousine et, à cette époque, femme de Claude Chevalley, fit une carrière de médecin. Les informations données dans les archives laissent imaginer qu'elle avait fait aussi (avant ?) des études de mathématiques.

4. Une page ronéotypée, archives de l'IHP.

Références

[Bou47] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 2*, Hermann, Paris, 1947.

[Bou52] ———, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 6 et 7*, Hermann, Paris, 1952.

[Che43] C. Chevalley – « On the theory of local rings », *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 690–708.

[Che44] ———, « On the notion of the ring of quotients of a prime ideal », *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), p. 93–97.

[vdW31] B. van der Waerden – *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.

[Wei35] A. Weil – *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques*, Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, Hermann, Paris, 1935.