LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

3. Année 1935-1936
Topologie

René de Possel

Espaces topologiques

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-A, 12 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__A_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 18 novembre 1935
Exposé 3-A, p. 1 à 12

ESPACES TOPOLOGIQUES

par **René de Possel**

A.– Introduction. On peut[1] peut-être définir la topologie comme l'*étude des fonctions continues.*

Idée d'une famille de fonctions définie à partir de deux familles de fonctions. Soit x un point d'un espace $\mathfrak{E}$, y un point d'un espace $\mathfrak{F}$, $y = f(x)$ une fonction définie en tout point de $\mathfrak{E}$, univoque. L'*image inverse* E d'un ensemble F de $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des points de $\mathfrak{E}$ tels que $f(x) \in F$, ce qu'on note

$$E = f^{-1}(F)$$

Considérons une famille $\mathcal{E}$ d'ensembles de $\mathfrak{E}$ et une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles de $\mathfrak{F}$; elles définissent la famille des fonctions $y = f(x)$ telles que, si $F \in \mathcal{F}$, alors $f^{-1}(F) \in \mathcal{E}$. C'est le procédé qui permettrait de définir les fonctions de Baire à partir des ensembles de Borel. Si on a un troisième espace $\mathfrak{G}$ et une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles de $\mathfrak{G}$, les familles d'ensembles $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ définissent une famille de fonctions $z = g(y)$; dans ces conditions, toute fonction $g[f(x)]$ appartient à la famille de fonctions définie par les familles d'ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$. Cette dernière propriété serait d'ailleurs vraie avec les images directes, mais pour l'application aux fonctions continues ce sont les images inverses qu'il faut 1/2
prendre.

Nous définirons les fonctions continues de cette manière, à partir de deux familles d'ensembles, les ensembles « ouverts ».

B.– Espaces topologiques. Les définitions qui ont été proposées pour un espace topologique sont extrêmement nombreuses (Voir plus loin). Nous adopterons la suivante, particulièrement appropriée à l'étude des fonctions que nous avons en vue :

Définition. *Un espace topologique $\mathfrak{E}$ est constitué par un ensemble fondamental E et par une famille $\mathcal{O}$ de parties de cet ensemble appelé[e]s* ensembles ouverts *et vérifiant l'axiome I :*

Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.[2]

$$\text{Si } \mathcal{O}_i \in \mathcal{O} \qquad \mathfrak{S}_i \mathcal{O}_i \in \mathcal{O}$$

Par définition, l'ensemble vide est ouvert.[3]

On dit encore que la famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ouverts définit une *topologie* dans l'ensemble fondamental E.

Il arrive que l'on ait à considérer des topologies différentes sur un même ensemble fondamental. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ les familles d'ensembles ouverts des topologies T_1 et T_2,
2/3 on dira alors : T_1 *plus faible* que T_2 si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

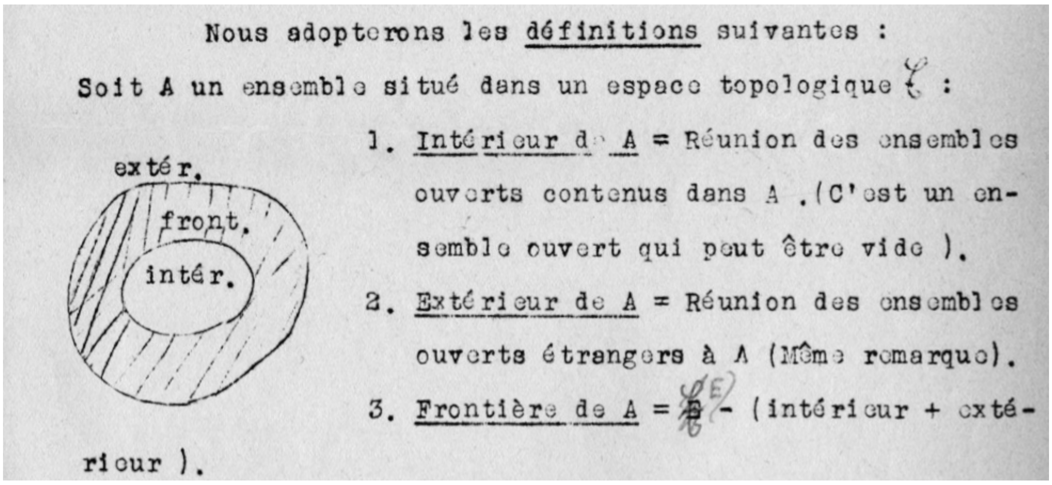
Les deux topologies extrêmes définies dans un ensemble E sont :

la topologie *discrète* où tout point est un ensemble ouvert donc tout ensemble ouvert ;

la topologie dans laquelle l'espace tout entier seul est ouvert.

Nous adopterons les *définitions* suivantes :

1. *Intérieur de A* = Réunion des ensembles ouverts contenus dans A. (C'est un ensemble ouvert qui peut être vide).
2. *Extérieur de A* = Réunion des ensembles ouverts étrangers à A (Même remarque).
3. *Frontière de A* = $E-$ (intérieur + extérieur).



Nous adopterons les définitions suivantes :

Soit A un ensemble situé dans un espace topologique $\mathcal{E}$:

1. Intérieur de A = Réunion des ensembles ouverts contenus dans A. (C'est un ensemble ouvert qui peut être vide).
2. Extérieur de A = Réunion des ensembles ouverts étrangers à A (Même remarque).
3. Frontière de A = $\mathcal{E}$ (E) - (intérieur + extérieur).

Tout ensemble A définit donc une décomposition de E en trois ensembles étrangers. L'ensemble complémentaire $\complement A$ donnerait la même décomposition. De tout point de l'espace on peut dire qu'il est *point intérieur*, *point extérieur* ou *point frontière*. Nous appellerons *adhérence de A* et nous noterons $\overline{A}$ la somme de l'intérieur et de la frontière
3/4 de A. On dit d'ordinaire la fermeture. Ici adhérence sera plus commode, bien qu'on se soit déjà servi de ce mot dans la dérivation transfinie des ensembles. Un point de l'adhérence de A sera dit un *point adhérent à A* ; on peut, d'une manière intuitive considérer que c'est un point qui « touche » l'ensemble, qu'il lui appartienne ou non.

Si une topologie T_1 est plus *faible* qu'une topologie T_2

$$\mathrm{Front}_{T_1}(A) \subset \mathrm{Front}_{T_2}(A) \qquad \text{et}$$
$$\mathrm{Adh}_{T_1}(A) \subset \mathrm{Adh}_{T_2}(A)$$

Remarques

1. On a les équivalences suivantes :
   p intérieur à $A \leftrightarrows$ il y a un ensemble ouvert contenant p et contenu dans A.
   p extérieur à $A \leftrightarrows$ il y a un ensemble ouvert contenant p et étranger à A.
   p point-frontière de $A \leftrightarrows$ tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A et un point étranger à A.
2. Si des points de E n'étaient pas contenus dans aucun ensemble ouvert, ils seraient ponts-frontières de tout ensemble et ne joueraient aucun rôle dans cette topologie. Nous supposerons qu'il n'y en a pas.[4]
3. On a encore les équivalences :
   (A ouvert) $\leftrightarrows$ ($A =$ intérieur de A) $\leftrightarrows$ (A ne contient aucun point frontière) 4/5
   ($A =$ adhérence de A ou A contient sa frontière) $\leftrightarrows$ ($\complement A$ ouvert)
   Dans ce dernier cas, A est dit fermé, par définition : tout l'espace est fermé comme complémentaire de l'ensemble vide.
4. On aurait pu définir une topologie par la famille des ensembles fermés en remplaçant dans l'axiome I la réunion par l'intersection.

Les exemples étant beaucoup plus compliqués que ces définitions, nous n'en donnerons pas : on en rencontre sans cesse.[5] Les cas qui se présentent sont si variés que tout exemple risque de faire oublier la simplicité de l'axiome de départ.

Un moyen d'obtenir une topologie dans un ensemble fondamental E est le suivant : On part d'une famille de sous-ensembles de E ne vérifiant pas nécessairement l'axiome I et on prend pour ensembles ouverts la famille $\mathcal{V}_\Sigma$ formée de toutes les réunions d'ensembles de $\mathcal{V}$. La condition pour que deux familles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ conduisent à la même topologie est : $\mathcal{V}_\Sigma = \mathcal{V}'_\Sigma$, ou encore : pour tout ensemble V de $\mathcal{V}$ et tout point p de V, il y a un ensemble V' de $\mathcal{V}'$ contenant p et contenu dans V, et inversement.

Sous espaces. Soit A un ensemble de $\mathfrak{E}$. La famille des ensembles $O \cap A$, où O est ouvert, vérifie l'axiome I : elle définit une topologie dans A, c'est la *topologie induite* 5/6
dans A par celle de $\mathfrak{E}$. L'espace topologique $\mathfrak{A}$ ainsi obtenu est dit *sous espace* de $\mathfrak{E}$. On dit que $\mathfrak{A}$ est *plongé* ou *immergé* dans $\mathfrak{E}$. Par exemple, la topologie d'une droite euclidienne du plan euclidien, est induite par celle du plan.

Produit topologique. Considérons des espaces topologiques $\mathcal{E}_i$ d'ensembles fondamentaux E_i où i est un élément d'un ensemble d'indices I quelconque. Dans l'ensemble produit $E = \prod_{i \in I} E_i$, considérons la famille $\mathcal{V}$ des ensembles $\prod_{i \in I} O_i$ où O_i est un ensemble ouvert de $\mathfrak{E}_i$. La famille $\mathcal{V}_\Sigma$, vérifiant l'axiome I, définit une topologie dans E

d'où un espace topologique $\mathfrak{E}$ qui est, par définition, le *produit des espaces topologiques* donnés.

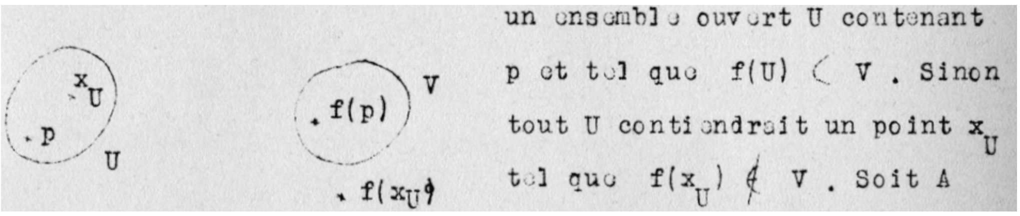
Exemple. L'espace euclidien à n dimensions est le produit de n droites euclidiennes.

C.– Fonctions continues. $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ étant des espaces topologiques, soit $f(p)$ une fonction définie pour tout point de $\mathfrak{E}$ et dont la valeur est un point de $\mathfrak{F}$. Considérons la définition suivante :

C.1. *$f(p)$ est continue si, p étant un point adhérent à A, $f(p)$ est adhérent à $f(A)$.*

6/7 définition qui correspond, si l'on veut, à une notion intuitive.

Soit V un ensemble ouvert contenant $f(p)$. Il y a un ensemble ouvert U contenant p et tel que $f(U) \subset V$. Sinon, tout I contiendrait au moins un point x_U tel que

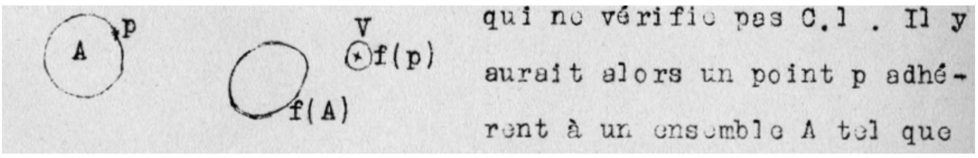


$f(x_U) \notin V$. Soit A l'ensemble des points x_U. p est adhérent à A et $f(A)$ est étranger à V, donc $f(p)$ n'adhère pas à $f(A)$. Par conséquent une fonction continue au sens C.1 vérifie la définition classique :

C.2. *Si V est un ensemble ouvert de $\mathfrak{F}$ contenant $f(p)$, il y a un ensemble ouvert U contenant p tel que $f(U) \subset V$.*

Soit maintenant V un ensemble ouvert ; ou bien $f^{-1}(V)$ est vide, donc ouvert, ou bien, tout point de $f^{-1}(V)$ est un point intérieur, donc $f^{-1}(V)$ est ouvert. Par conséquent, la fonction f vérifie la propriété :

C.3. *Si V est un ensemble ouvert, $f^{-1}(V)$ est ouvert.*

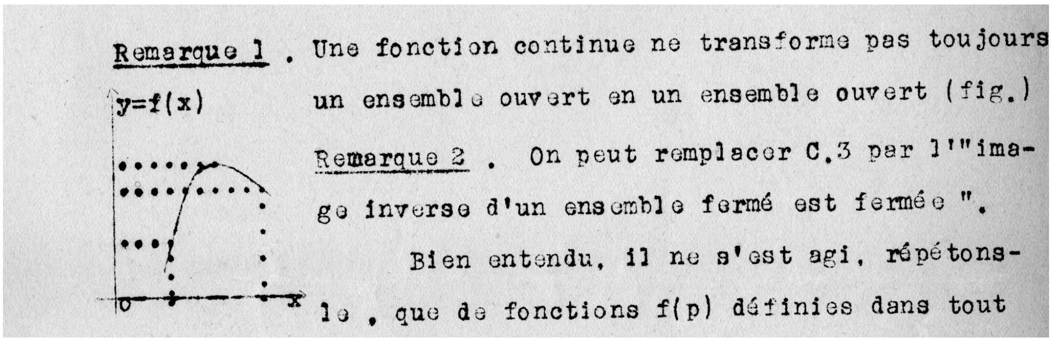


Enfin, démontrons que C.3 entraîne C.1. Supposons en effet qu'il existe une fonction $f(p)$ qui vérifie C.3 et qui ne vérifie pas C.1. Il y aurait alors un point p adhérent à un ensemble A tel que $f(p)$ n'adhère pas à $f(A)$. Il y a donc un ensemble ouvert V contenant $f(p)$ sans contenir de point de $f(A)$; son image inverse est un ensemble
7/8 ouvert U contenant p tel que $f(U) \subset V$, donc ne contenant aucun point de A ; p étant

adhérent à A, il y a contradiction.

Le cycle se referme : les trois propriétés sont équivalentes ; une fonction continue sera une fonction qui vérifie l'une des trois propriétés, donc aussi les deux autres.

***Remarque** 1.* Une fonction continue ne transforme pas toujours un ensemble ouvert en un ensemble ouvert (fig.)[6]



Remarque 1 . Une fonction continue ne transforme pas toujours un ensemble ouvert en un ensemble ouvert (fig.)
Remarque 2 . On peut remplacer C.3 par l'"image inverse d'un ensemble fermé est fermée ".
Bien entendu, il ne s'est agi, répétons-le , que de fonctions f(p) définies dans tout

***Remarque** 2.* On peut remplacer C.3 par l'« image inverse d'un ensemble fermé est fermée ».

Bien entendu, il ne s'est agi, répétons-le, que de fonctions $f(p)$ définies dans tout l'espace ; sinon l'équivalence des trois propriétés ne serait plus vraie, il faudrait utiliser une topologie induite.

Une correspondance biunivoque continue dans les deux sens est appelée *homéomorphie*, ou *transformation topologique.* Dans ce cas, les ensembles ouverts se correspondent, il s'agit au fond des mêmes espaces topologiques.

***Remarque**.* Une transformation peut être biunivoque et continue dans un sens, sans être topologique : prenons par exemple un premier espace de trois points a, b, c, les ensembles ouverts étant 0, ab, cb, abc, et un deuxième espace discret de trois points a', b', c' ; la correspondance $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$ est continue dans un sens, mais pas dans l'autre.[7] 8/9

D.– Qualités des ensembles d'un espace topologique et de cet espace.

Points d'accumulation. Par définition, p est *point d'accumulation* de A si tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A autre que p.

On voit immédiatement que les points d'accumulation de A appartiennent à A ou à sa frontière, et que tout point frontière est, ou point de A, ou point d'accumulation de A. D'où l'équivalence :

$$(\text{ensemble fermé}) \rightleftarrows (\text{ensemble qui contient ses points d'accumulation})$$

***Remarque** 1.* Il peut arriver qu'il n'y ait pas une infinité de points dans tout ensemble ouvert contenant p.

***Remarque** 2.* L'ensemble d'accumulation d'un ensemble donné n'est pas toujours fermé.

Par définition, p est dit *point d'accumulation complète de* A (maximée au sens de Fréchet) si tout ensemble ouvert contenant p contient un ensemble de points de A qui a même puissance que A.[8]

Compacité. Par définition :

9/10 Un ensemble A est dit *compact* si toute partie infinie de A a un point d'accumulation. (Généralisation des ensembles bornés, lemme de Bolzano-Weierstrass).

Un ensemble est dit *compact en soi* si toute partie infinie de A a un point d'accumulation *contenu dans* A.

On voit que : Tout ensemble *fermé et compact* est *compact en soi.* Si un ensemble E compact en soi est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles ouverts O_i : $E \subset \mathfrak{S} O_i$, il est contenu dans la réunion d'un nombre fini des O_i (lemme de Borel-Lebesgue dénombrable).

Un *espace topologique* est dit *compact* si l'ensemble de tous les points de l'espace est compact.

Soit A un ensemble et $\mathfrak{A}$ le sous-espace avec la topologie induite correspondant. On aperçoit l'équivalence suivante :

(ensemble A compact en soi) $\leftrightarrows$ (espace $\mathfrak{A}$ compact)

Un ensemble est dit *localement compact* si chacun de ses points est contenu dans un ensemble ouvert compact.

Bicompacité. (compacité parfaite au sens de Fréchet). Un ensemble A est dit *bicompact* si toute partie infinie de A a un point d'accumulation complète. On définit de même *bicompact en soi* et *localement bicompact.*[9]

La propriété fondamentale de la bicompacité s'exprime par les équivalences suivantes :

10/11 (ensemble A bicompact en soi) $\leftrightarrows$ (de toute famille d'ensembles ouverts dont la réunion contient A, on peut extraire une famille finie jouissant de la même propriété) $\leftrightarrows$ (toute famille monotone ordonnée d'ensembles fermés contenus dans A a une intersection non vide). Le deuxième terme est le lemme de Borel-Lebesgue général (Chittenden) ; le troisième est la propriété de Cantor.

Ces équivalences sont particulièrement importants dans le cas d'un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité (1) de Hausdorff ; en ce cas (compact) $\leftrightarrows$ (bicompact).[10]

Limites. On dit qu'une suite de points (a_n) distincts ou non converge vers a si tout ensemble ouvert contenant a contient tout point de la suite sauf au plus un nombre fini.

1. Dans la suite cet axiome sera désigné par D.2.

Il existe des espaces bicompacts dans lesquels il n'existe aucune suite convergente, à l'exception de celles dont tous les points sont les mêmes à partir d'un certain rang (Tychonoff).[11]

E.– Autres familles d'espaces topologiques. Nous venons d'étudier une famille d'espaces topologiques, il en existe beaucoup d'autres. 11/12

Deux questions se posent alors :

1) Quelles sont les familles d'espaces intéressantes par leurs propriétés ? Ainsi la famille des espaces-limites (Fréchet) qui a joué un grand rôle historique semble avoir perdu aujourd'hui beaucoup de son intérêt.

2) Une famille ayant été jugée intéressante, trouver pour la définir un système d'axiomes à partir duquel on puisse l'étudier aussi commodément que possible. Il y a intérêt, par exemple, à ce que la définition soit univoque. Ainsi dans les définitions classiques des espaces par des voisinages, des systèmes de voisinages différents peuvent conduire aux mêmes ensembles ouverts : il est nécessaire alors de dire dans quels cas les espaces topologiques définis par ces systèmes doivent être considérés comme équivalents.

Voici quelques familles d'espaces qui se rangent par ordre de généralité décroissante, chacune d'elle comprenant les suivantes :[12]

1. *Espaces avec notion de dérivation*
2. *Espaces* $\mathcal{V}$ (Fréchet).

   Les voisinages sont complètement arbitraires.

Ces espaces dont de nature différente des suivants et ne conduisent pas aux propriétés C.1,2,3 des fonctions continues.

3. *Espaces topologiques avec axiome I*

   Toute réunion d'ensembles ouverts est ouvert (Sierpinski) 12/13

   Propriétés C.1,2,3 des fonctions continues

4. *Espace topologique avec axiome I*
   et axiome II : l'intersection de deux
   ensembles ouverts est ouverte.
   Propriétés des systèmes de voisinages.
5. *Espace accessible* (Fréchet)
   Pour deux points a et b, il existe
   un ensemble ouvert contenant a
   sans contenir b.
6. *Espace de Hausdorff :*
   séparation de deux points
   par des ensembles ouverts
7. Séparation de deux points par des
   ensembles fermés.
8. *Espaces réguliers.*
   Séparation d'un point et d'un ensemble fermé
   par des ensembles ouverts
9. *Espaces complètement réguliers*
   (Tychonoff).
   Séparation d'un point et d'un ensemble fermé
   par une fonction continue, c'est à dire qu'il
   existe une fonction continue prenant
   la valeur 0 au point
   et la valeur 1 sur l'ensemble.
   Pour qu'un espace de Hausdorff puisse être
   immergé dans un espace bicompact il faut
   et il suffit qu'il soit complètement régulier.

Ces propriétés sont *transitives*, c.à d. que si elles sont vraies d'un espace elles sont vraie de tous ses sous-espaces

10. *Espace normal.*
    Séparation de deux ensembles fermés par des
    ensembles ouverts : ou : si $\overline{A} \cap \overline{B} = 0$, A et B
    sont séparables par des ensembles ouverts ;
    ou encore :
    étant donnés des ensembles fermés étrangers
    A et B il existe une fonction continue
    prenant les valeurs 0 sur A et 1 sur B.
    S'il existe un système de voisinages de
    puissances α, on peut immerger l'espace
    dans un espace universel E_α (Tychonoff).
    [Propriétés non transitives]

11. *Espace complètement normal* :
 Deux ensembles A et B sont séparables par des ensembles ouverts chaque fois que $A \cap \overline{B} = 0$ et $\overline{A} \cap B = 0$.
 La condition nécessaire et suffisante pour que tous les sous-espaces d'un espace normal soient normaux est qu'il soit complètement normal.
12. *Espace métrisable* :
 Il existe une fonction symétrique et non négative de deux points $d(a, b)$ qui n'est nulle que si $a = b$ et qui vérifie l'inégalité du triangle :

$$d(ab) + d(bc) \geqslant d(ac)$$

S'il existe un système dénombrable de voisinages (l'axiome D2) les 5 familles 8-12 sont identiques. Dans ce cas l'espace universel dans lequel on peut immerger tout l'espace normal n'est autre que le cube de l'espace de Hilbert (voir le texte de la démonstration).[13] 13/14

Propriétés des familles énumérées.

Espaces topologiques avec axiome I + axiome II : l'intersection de deux ensembles ouverts est ouverte. L'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est ouverte. Donc la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés est fermée. Tout ensemble de points d'accumulation d'un ensemble donné est fermé.

Systèmes de voisinages. Soit une famille $\mathcal{V}$ d'ensembles possédant les deux propriétés suivantes :

1. Tout point appartient à un ensemble de $\mathcal{V}$.
2. Si $p \in (V \cap V')$, $(V,\ V' \in \mathcal{V})$, il existe un ensemble $W \in \mathcal{V}$ tel que $p \in W \subset (V \cap V')$.

La famille $\mathcal{V}_\Sigma$ des réunions des ensembles de $\mathcal{V}$ satisfait aux axiomes I et II et définit 15/16
par conséquent un espace topologique (I.II). Inversement tout espace topologique (I.II) peut être défini de cette manière en prenant comme système $\mathcal{V}$ tous les ensembles ouverts. Deux familles de voisinages $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ définiront la même topologie sous la condition déjà vue plus haut (P.5). Nous avons les propriétés :

1. Le produit topologique de plusieurs espaces (I.II) défini[s] par les systèmes de voisinages $\mathcal{V}_i$ s'obtient en prenant pour voisinages les produits des voisinages de $\mathcal{V}_i$.
2. La définition C.2 des fonctions continues devient ici : pour tout voisinage V de $f(p)$, il existe un voisinage U de p tel que $f(U) \subset V$.

Un invariant important d'un espace (I.II) est la plus petite puissance α des systèmes de voisinages qui le définissent (voir sur le tableau l'utilisation de cet invariant pour les espaces normaux). Dans tout ensemble de puissances, il y en a toujours une de plus petite que les autres. Si α est le dénombrable l'espace satisfait à D2, on le dit *parfaitement séparable* (Fréchet) (aucun rapport avec les axiomes de séparation).[14]

Théorèmes de métrisation.

1. Il existe une condition relativement simple portant sur le système de voisinages
16/17 pour qu'un espace (I.II) soit métrisable (Alexander-Urysohn-Fréchet).[15]
2. *Un espace normal qui satisfait à D2 est métrisable* (on démontre même qu'il suffit qu'il soit régulier).

   Étant donné, en effet, un système dénombrable de voisinages, numérotons les couples K_n de voisinages D et D' tels que $\overline{D} \subset D'$. À tout K_n associons une fonction continue $f_n(p)$ nulle sur $\overline{D}$, égale à 1 sur $\complement D'$ et comprise entre 0 et 1. À tout point a, faisons correspondre la suite $a_n = \dfrac{1}{n} f_n(a)$; on voit immédiatement que :

   α) À deux points a et b distincts correspondent deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ différentes.

   β) Pour avoir $\sum(a_n - b_n)^2 < \varepsilon$ il suffit de prendre b dans un certain ensemble ouvert contenant a. Considérant la suite $\{a_n\}$ comme un point de l'espace de Hilbert, il en résulte une homéomorphie de l'espace avec un sous-espace de la sphère de Hilbert : $\sum a_n^2 \leqslant \sum \dfrac{1}{n^2}$; on a comme métrique $d(a,b) = \sum(a_n - b_n)^2$.
3. Un espace de Hausdorff localement compact qui vérifie D2 est métrisable.
17/18 4. Un espace de Hausdorff compact et métrisable vérifie D2.

Enfin, signalons que dans un espace métrisable, l'existence d'une suite dénombrable partout dense (tout point est un point d'accumulation) entraîne D2.

Bibliographie.

1. Pour les propriétés des espaces satisfaisant aux axiomes I et II, voir *Hahn* : Theorie der reellen Funktionen (Berlin Spirnger 2è éd.)
2. Espaces vérifiant l'axiome I seulement : *Sierpinski*, Introduction to the general topology (Toronto 1934) et *Moore* (Colloquium lectures).
3. Sur la métrisation, la bicompacité, les axiomes de séparation, voir outre Hahn, les mémoires d'*Urysohn* et d'*Urysohn-Alexandroff*, Math.Ann. T.92, 95 et 96 ; Verhandlingen Ak. Amsterdam 1928 ; C.R. t.177 (1923) p.1274.
4. *Tychonoff*, Math.Ann. t.102, p.544 et t.111 p.762.

5. *Hausdorff.* Grundzüge der Mengenlehre (Berlin 1927).[16]
6. *Fréchet.* Les espaces abstraits (Paris 1928), où l'on trouvera une multitude de définitions (en particulier toutes celles ci-dessus) et de très nombreuses références.

[17]

Notes

1. Les ouvrages cités dans la bibliographie sont, celui de Hahn [Hah21], la traduction en anglais [Sie34] de celui de Sierpinski, celui [Moo32] de Moore, les articles d'Alexandroff et Urysohn [AU23] [AU24] [Ury25] [AU29], ceux [Tyc29] [Tyc35] de Tychonoff, la deuxième édition [Hau27] du livre de Hausdorff et celui [Fré28] de Fréchet et enfin l'annonce [Chi24] de Chittenden (il s'agit du résumé de sa communication au *Cincinnati meeting* de l'AMS en décembre 1923). Allemands, Polonais, Américains, Russes et Français contribuent à l'invention de la topologie, une sous-discipline vraiment internationale.
2. Bourbaki ajoutera l'axiome II (voir la suite de l'exposé), c'est-à-dire demandera qu'une intersection finie d'ouverts soit un ouvert. Un des avantages de cet axiome est qu'il implique que l'espace tout entier est un ouvert.
3. Il n'y a pas encore de notation spécifique pour l'ensemble vide. Le $\varnothing$ sera inventé par Bourbaki (en la personne d'André Weil) comme on peut le lire dans [Wei91]. Dans la remarque de sa page 8, de Possel utilisera 0.
4. Avec l'axiome II et E ouvert, ce problème n'apparaît pas. Voir la note 2.
5. Pour toutes sortes de raisons, dont celle, un peu surprenante, évoquée ici, il y a très peu d'exemples dans les exposés de ce séminaire.
6. Sur la figure, $f(]a,b[)$ est un intervalle $]c,d]$.
7. C'est plutôt l'inverse. L'application $x \mapsto x'$ n'est pas continue (l'image inverse de l'ouvert $\{a'\}$ est $\{a\}$, qui n'est pas ouvert). Mais $x' \mapsto x$ est continue (toutes les parties de$\{a', b', c'\}$ sont ouvertes).
8. C'est en effet la définition donnée par Fréchet [Fré28, p. 192] d'un point d'accumulation maximée, le participe passé du verbe maximer, peu employé de nos jours.
9. Comme pour l'accumulation maximée, les notions et définitions sont celles du livre [Fré28] de Fréchet mais pas la terminologie.
10. Ce deuxième axiome est l'axiome (10) de [Hau27, p. 229]. Les trois premiers axiomes sont les axiomes I et II du présent texte ; les cinq suivants ((4) à (8)) sont des axiomes de séparation (*Trennungsaxiome*) de plus en plus forts, parmi lesquels l'axiome (5) dit que deux points distincts sont dans des ouverts disjoints. Enfin les axiomes (9) et (10) sont les axiomes de dénombrabilité (*Abzählbarkeitsaxiome*) ou de séparabilité. L'axiome nommé D2 dans cet exposé dit qu'il existe un système dénombrable complet de voisinages.
11. On trouvera un exemple dans l'article [Tyc35].
12. Il est possible que l'établissement de cette liste précise (quelle définition ? que peut-on en faire ?) soit une conséquence de la discussion « animée » qui suivit l'exposé oral. Voir page 78.
13. Nous n'avons pas déterminé de quel texte il s'agit.
14. Séparé/séparable, une mauvaise terminologie qui a pourtant survécu sans gros problème.
15. Il faut lire Alexandroff.

16. Le titre que donne de Possel pour le livre de Hausdorff est celui de l'édition de 1914, qui n'est pas celle que de Possel cite, et qu'il ne connaissait peut-être pas.
17. **Des archives de Bourbaki.** Le congrès fondateur de Bourbaki s'était tenu à Besse, du 10 au 20 juillet 1935. Le premier « Journal de Bourbaki » est daté du 15 novembre (au début) et du 14 (à la fin) (document `deljb_001.pdf`) ; il convoque la première réunion chez Capoulade, mais seulement pour le 16 décembre. De Possel et Weil sont responsables de la topologie.

Références

[AU23] P. Alexandroff & P. Urysohn – « Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (B) », *C. R. Acad. Sci. Paris* **177** (1923), p. 1274–1276.

[AU24] ———, « Zur Theorie der topologischen Räume », *Math. Ann.* **92** (1924), p. 258–266.

[AU29] ———, « Mémoire sur les espaces topologiques compacts dédié à Monsieur D. Egoroff », *Verhandelingen Amsterdam* **14** (1929).

[Chi24] E. W. Chittenden – « Properties of abstract sets implied by properties of the class of oll continuous functions », *Bull. Amer. Math. Soc.* **30** (1924), p. 221.

[Fré28] M. Fréchet – *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[Hah21] H. Hahn – *Theorie der reellen Funktionen. Erster Band*, J. Springer, Berlin, 1921.

[Hau27] F. Hausdorff – *Mengenlehre*, de Gruyter, Leipzig, 1927.

[Moo32] R. Moore – *Foundations of point set theory*, Colloquium Publ., 13., American Mathematical Society, New York, 1932.

[Sie34] W. Sierpiński – *Introduction to general topology*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1934, Translated by C. Cecilia Krieger.

[Tyc29] A. Tychonoff – « Über die topologische Erweiterung von Räumen », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 544–561.

[Tyc35] ———, « Über einen Funktionenraum », *Math. Ann.* **111** (1935), p. 762–766.

[Ury25] P. Urysohn – « Zum Metrisationsproblem », *Math. Ann.* **94** (1925), p. 309–315.

[Wei91] A. Weil – *Souvenirs d'apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Birkhäuser, Basel, 1991.