LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

2. Année 1934-1935
Espace de Hilbert

Henri Cartan

Résumé du Mémoire de F.Riesz sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert

Séminaire de mathématiques (1934-1935), Exposé 2-L, 7 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1934-1935__2__L_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 20 mai 1935
Exposé 2-L, p. 1 à 7

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE DE F.RIESZ SUR LES GROUPES À UN PARAMÈTRE D'OPÉRATEURS UNITAIRES DANS L'ESPACE DE HILBERT

par **Henri Cartan**

Le mémoire en question[1][2] est intitulé « Über Sätze von Stone und Bochner » (Acta de Szeged, VI, 1933, p.184-198) et se compose de deux parties (I.– Théorème de Bochner généralisé II.– théorème de Stone) précédées par une introduction.

Introduction

On considère un groupe continu à un paramètre t d'opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert (Voir dans l'exposé C de Delsarte, la définition d'un opérateur unitaire). U_t désignant l'opérateur, on aura

$$U_s U_t = U_{s+t}, \qquad U_0 = 1 \text{ (opérateur identique)}$$

U_T est par hypothèse une fonction *faiblement continue* de t, c'est à dire que $(U_t f, g)$ est une fonction continue de t, quels que soient f et g.

Le *théorème de Stone* (Proceedings Nat.Acad., 16, 1930 p.172-175) affirme que U_t admet une représentation spectrale de la forme

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda \tag{1}$$

les E_λ constituant une décomposition spectrale de l'unité, indépendante de t. D'une façon précise (Cf. l'exposé F de Chevalley) les E_λ sont des opérateurs de projection formant une suite non décroissante ($E_\lambda \leqslant E_\mu$ si $\lambda \leqslant \mu$), continue à gauche, avec 1/2

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = 1$$

La notation (1) signifie que l'on a, quels que soient f et g,

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d(E_\lambda f, g) \tag{2}$$

et en particulier

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d(E_\lambda f, f) \tag{3}$$

En d'autres termes, le théorème de Stone affirme que tout groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires est engendré par une transformation infinitésimale qui se met sous la forme d'un opérateur hypermaximal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \, dE_\lambda \qquad \text{(Cf. l'exposé F).}$$

Pour démontrer le théorème de Stone, il faut, connaissant U_t, déterminer E_λ. Ce problème présente l'aspect particulier suivant : dans (3), f étant supposé fixé, le premier nombre est une fonction continue connue $p(t)$; au second membre, $(E_\lambda f, f)$ est une fonction continue V_λ, bornée, non décroissante, continue à gauche, avec la condition supplémentaire : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} V(\lambda) = 0$.

D'où le problème : À quelles conditions une fonction continue $p(t)$ (à valeurs com-
2/3 plexes) admet-elle une représentation de Fourier-Stieltjes

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, dV(\lambda) \tag{4}$$

$V(\lambda)$ satisfaisant aux conditions énoncées plus haut ?

D'ailleurs $dV(\lambda)$ désigne une mesure de Radon, partout non négative, de masse totale finie ; inversement, une telle mesure de Radon définit $V(\lambda)$ de façon unique.

La réponse est donnée par le *théorème de Bochner* (Vorlesungen über Fouriersche Integrale, p.74-76 ; Leipzig 1932) : il faut et il suffit que $p(t)$ soit de *type positif* c'est à dire que l'on ait :

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\rho_\mu \overline{\rho}_\nu = 0 \tag{5}$$

quels que soient $t_1, \dots, t_m$ réels en nombre quelconque, et quels que soient $\rho_1, \dots, \rho_m$ complexes. Cette condition entraîne en particulier :

1) $p(-t) = \overline{p(t)}$

2) $p(0) \geqslant 0$, $p(t) \leqslant p(0)$, donc $|p(t)|$ borné.

But du mémoire de F.RIESZ : appliquer la technique des séries de Fourier, d'abord à la démonstration du théorème de Bochner (sous l'hypothèse $p(t)$ *mesurable*, hypothèse plus large que la continuité ; on détermine alors $V(\lambda)$ et l'on montre que (4) a lieu *presque partout* pour t), puis à la démonstration du théorème de Stone *déduit*
3/4 *de celui de Bochner* (on ne suppose donc pas la continuité de U_t, mais seulement la mesurabilité de $(U_t f, f)$; on définit E_λ, et on montre d'abord que (2) a lieu presque partout ; puis on montre que (2) a lieu partout, d'où suit la *continuité* de U_t).

Théorème de BOCHNER

Indiquons seulement le plan de la démonstration. La condition de Bochner est évidemment nécessaire. Il faut montrer qu'elle est suffisante.

1.– Détermination de $V(\lambda)$ à partir de $p(t)$ mesurable et de type positif. Riesz définit, à partir de $p(t)$ fixée une fois pour toutes, une fonctionnelle linéaire $A(h)$ (Voir la définition de $A(h)$ dix lignes plus bas), définie pour toutes les fonctions $h(t)$ « *du type h* », c'est à dire réelles, continues, et ayant par morceaux une dérivée continue. Cette fonctionnelle est réelle et bornée, elle a une valeur non négative quand $h(t)$ est non négative. Elle peut donc, d'après un théorème classique de Riesz, être considérée comme l'intégrale de $h(t)$ par rapport à une mesure de Radon, partout non négative et de masse totale finie, cette mesure de Radon caractérisant la fonctionnelle $A(h)$, et par suite la fonction $p(t)$. 4/5

D'où la fonction $V(\lambda)$ telle que

$$A(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, dV(\lambda). \tag{6}$$

Indiquons seulement comment on définit $A(h)$. On pose :

$$A(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) h^{\times}(-t)\, dt \tag{7}$$

$h^{\times}$ désignant la transformée de Fourier de $h(t)$, c'est à dire

$$h^{\times}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} h(\lambda)\, d\lambda \tag{8}$$

L'intégrale (7) existe parce que $p(t)$ est mesurable et bornée. Le fait que la fonctionnelle $A(h)$ est bornée (on a, d'une façon précise, $|A(h)| \leqslant p(0)$ si $|h(t)| \leqslant 1$), et qu'elle est non négative si $h(t)$ est non négative, résulte essentiellement du fait que :

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-s) h^{\times}(t) \overline{h^{\times}(s)}\, dt\, ds$$

est $\geqslant 0$, conséquence du fait que $p(t)$ est de *type positif* (Pour le détail des démonstrations, consulter le mémoire de F.Riesz).

2.– $V(\lambda)$ **étant ainsi définie,** il reste à montrer que :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dV(\lambda)$$

qui est bornée et continue, est égale, presque partout, à $p(t)$, ce qui relève de la 5/6
technique des séries de Fourier. On montre d'abord que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t) h^{\times}(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) h^{\times}(-t)\, dt \tag{9}$$

quelle que soit $h(t)$ réelles, puis complexes ; ensuite on prend une fonction $h(t)$ particulière, telle que

$$h^{\times}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2}{n}\,\frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t+u)}{(t+u)^2} \qquad (u > 0, n \text{ entier})$$

et, dans (9), on fait croître n indéfiniment, u restant fixe ; le premier membre tend vers $\frac{\pi}{2}q(u)$, le second vers $\frac{\pi}{2}p(u)$ pour presque toutes les valeurs de u.

C.Q.F.D.

Complément. Pour la suite, il est bon de rappeler comment on trouve $V(\lambda)$ à partir de la fonctionnelle $A(h)$. On a $(\lambda_1 \leqslant \lambda_2)$

$$V(\lambda_2 - 0) - V(\lambda_1 + 0) = \lim_{n\to\infty} A(h_n)$$

les $h_n(t)$ étant une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant h_n(t) \leqslant 1 & \text{quel que soit } t \\ h_n(t) = 0 & \text{pour } t \leqslant \lambda_1 \text{ et pour } t \geqslant \lambda_2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = 1 & \text{pour } \lambda_1 < t < \lambda_2 \end{cases}$$

6/7 En particulier, si on convient que $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} V(\lambda) = 0$ et que $V(\lambda)$ est continue à gauche, on a

$$V(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) h_n^{\times}(-t)\,dt \tag{9'}$$

avec

$$\begin{cases} 0 \leqslant h_n(t) \leqslant 1 & \\ h_n(t) = 0 & \text{pour } t \geqslant \lambda \\ \lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = 1 & \text{pour } t < \lambda \end{cases}$$

Théorème de STONE

Voici le plan de la démonstration :

1) on vérifie que $(U_t f, f) = p(t)$ est bien de type positif quel que soit f ; il lui correspond une fonction $V(\lambda; f)$ définie, à partir de $p(t)$, par la relation (9), qui s'écrit ici

$$V(\lambda; f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, f) h_n^{\times}(-t)\,dt$$

2) on pose, plus généralement :

$$V(\lambda; f, g) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, g) h_n^{\times}(-t)\,dt \tag{10}$$

c'est une fonctionnelle biblièaire bornée ; elle est donc de la forme

$$(E_\lambda f, g)$$

E_λ étant un opérateur linéaire borné ; et on a 7/8

(11) $$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dV(\lambda; f, g)$$

pour *presque toutes* les valeurs de t. (On peut faire en sorte que les valeurs exceptionnelles de t ne dépendent pas de f et g, parce que l'espace de Hilbert est séparable).

3) Il reste alors à montrer que :

α) L'opérateur E_λ est hermitien

β) La relation (11) a lieu pour *toutes* les valeurs de t sans exception

γ) On a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = 1$

δ) On a $E_{\lambda_1}E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2}E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$ si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$

Remarque. Les conditions α), γ), δ) expriment que les E_λ sont des opérateurs de projection et forment un spectre ; la continuité à gauche et la propriété

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = 0$$

résultent de la définition de $V(\lambda; f)$.

Indications sur le développement.

1.– $(U_t f, f)$ est de type positif. En effet, en posant

$$(U_t f, f) = p(t)$$

on a, en vertu de la propriété de *groupe* 8/9

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\rho_\mu\overline{\rho}_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{m}\rho_\mu U_{t_\mu} f, \sum_{\nu=1}^{m}\rho_\nu U_{t_\nu} f\right) \geqslant 0$$

2.– Propriétés de $V(\lambda; f, g)$. On a $V(\lambda; f, f) = V(\lambda; f)$, et

$$V(\lambda; f+\mu g) = V(\lambda; f) + \mu V(\lambda; g, f) + \overline{\mu} V(\lambda; f, g) + \mu\overline{\mu} V(\lambda; g)$$

Or on a presque partout (Cf. 2ème partie du théorème de Bochner)

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dV(\lambda; f);$$

en remplaçant f par $f+\mu g$ et égalant les coefficients de $\overline{\mu}$ on obtient la relation (11).

On montre que $V(\lambda; f, g)$ est une fonctionnelle bornée en faisant voir que

$$|V(\lambda; f, g)|^2 \leqslant (f, f)\cdot(g, g);$$

pour cela, il suffit de vérifier

$$V(\lambda; f) \leqslant (f, f)$$

ce qui résulte de

$$V(\lambda) \leqslant p(0).$$

(On a vu plus haut que $|A(h)| \leqslant p(0)$ si $|h(t)| \leqslant 1$)

3.– Propriétés de α, β, γ, δ.

9/10 α) En permutant f et g dans (10), on voit que E est hermitien.

β) et δ) résultent d'une propriété générale : *l'opérateur*

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\lambda)\, dE(\lambda)$$

où $k(\lambda)$ désigne une fonction (réelle ou complexe) du type h, *a une propriété multiplicative : si $k = k_1 k_2$, alors $K = K_1 K_2$* (conséquence du fait que les U_t forment un *groupe.*)

On obtient β en prenant $k(\lambda) = e^{i\lambda t}$, les opérateurs correspondants

$$Q_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda \tag{12}$$

forment un groupe, et comme $Q_t = U_t$ presque partout, on a $Q_t = U_t$ pour *toutes les valeurs de t.*

γ) On a $Q_0 = U_0 = 1$; d'où, d'après (12)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_\lambda \qquad \text{c'est à dire } \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = 1$$

δ) En prenant

$$k_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_1 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_1 \end{cases} \qquad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_2 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_2 \end{cases}$$

on trouve

$$K_1 = E_{\lambda_1} \qquad K_2 = E_{\lambda_2}, \qquad \text{d'où } E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \text{ si } \lambda_1 \leqslant \lambda_2$$

[3]

Notes

1. L'article auquel est consacré ce dernier exposé de la deuxième année du séminaire est [Rie33]. Le théorème de Stone vient de [Sto30].

2. Si ceci est le tout premier exposé qu'Henri Cartan donné au séminaire Julia, il est certain qu'il assista à ce séminaire dès le début : un de ses cahiers [(1)] contient des notes qu'il prit au cours des exposés 1-A, 1-B, 1-C, puis 2-A, 2-B, 2-C, 2-D, 2-E, et enfin 2-H.
3. **Des archives de Bourbaki.** Ce jour-là, le 20 mai 1935, Élie Cartan était invité à la réunion du « Traité d'analyse ». Il participa à une discussion sur les équations aux dérivées partielles. Il est à peu près certain qu'il assista ensuite à l'exposé du séminaire donné par son fils. D'autant plus qu'il « sécha » la séance de l'Académie des sciences, comme nous l'apprennent les listes d'émargement (aux archives de l'Académie des sciences).

Références

[Rie33] F. Riesz – « Über Sätze von Stone und Bochner. », *Acta Litt. Sci. Szeged* **6** (1933), p. 184–198.

[Sto30] M. Stone – « Linear transformations in Hilbert space. III : Operational methods and group theory. », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **16** (1930), p. 172–175.

1. Fonds Henri Cartan, bibliothèque de l'IRMA.