LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

2. Année 1934-1935
Espace de Hilbert

René de Possel

Notion générale de mesure et d'intégrale

Séminaire de mathématiques (1934-1935), Exposé 2-A, 14 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1934-1935__2__A_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 12 novembre 1934
Exposé 2-A, p. 1 à 14

NOTION GÉNÉRALE DE MESURE ET D'INTÉGRALE

par **René de Possel**

I. Familles d'ensembles

On considérera[1][2] uniquement des ensembles qui sont des parties d'un ensemble[3] $\mathfrak{E}$ d'éléments de nature quelconque : nous appellerons quelquefois « points » ces éléments. $\mathfrak{E}$ sera nommé l'*ensemble fondamental.*

Famille $\boxed{\mathcal{I}}$. C'est une famille d'ensembles telle que l'intersection de deux ensembles de la famille appartient aussi à la famille et que, E et F étant deux ensembles de la famille tels que E est contenu dans F $(E \subseteq F)$,[4] l'ensemble $F - E$ est la *somme* d'un nombre fini d'ensembles de la famille (*somme* signifie que les ensembles sont disjoints ; pour des ensembles pouvant avoir des éléments communs, on dit *réunion* pour désigner l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à l'un d'entre eux).

Exemple de famille $\boxed{\mathcal{I}}$. Les intervalles à demi-ouverts de la droite : $a \leqslant x < b$; les intervalles de l'espace à n dimensions[5] : $a_i \leqslant x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Corps d'ensembles. C'est une famille $\boxed{\mathcal{I}}$ dans laquelle la somme d'un nombre fini d'ensembles de la famille lui appartient encore. Partant d'une famille $\boxed{\mathcal{I}}$, le plus petit corps qui la contient s'obtient en lui adjoignant les sommes d'un nombre fini d'ensembles de la famille.

Opérations σ et δ. Partons d'une famille $\mathcal{E}$ quelconque. Adjoignons-lui les ensembles 1/2
qui sont la réunion d'une infinité dénombrables d'ensembles de $\mathcal{E}$. Nous obtenons ainsi la famille $\mathcal{E}_\sigma$. Si nous adjoignons à $\mathcal{E}$ les ensembles qui sont l'intersection d'une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathcal{E}$ nous obtenons la famille $\mathcal{E}_\delta$. On définit ainsi $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$, $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$, $\mathcal{E}_{\sigma\delta\sigma}\ldots$[6]

σ-corps. C'est un corps d'ensemble $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{K}$ (ceci entraîne $\mathcal{K}_\delta = \mathcal{K}$). Si on part d'un corps $\mathcal{C}$ et qu'on forme $\mathcal{C}_\sigma$, $\mathcal{C}_\sigma$ n'est plus en général un corps. Pour obtenir le plus petit σ-corps contenant une famille $\boxed{\mathcal{J}}$ donnée, il faut effectuer Ω fois les opérations σ et δ, Ω désignant le premier nombre transfini de la deuxième classe.[7]

À remarquer qu'un σ-corps ne contient pas toujours le complémentaire d'un ensemble de ce σ-corps ; mais il le contient toujours lorsque l'ensemble fondamental $\mathfrak{E}$ appartient au σ-corps.

Exemple. Si on part des intervalles à demi-ouverts de la droite (ou de l'espace à n dimensions), le plus petit σ-corps contenant ces intervalles est constitué d'ensembles de Borel (nommé autrefois mesurables-B)[8]. À remarquer que le σ-corps ne coïncide pas avec le « système de Borel » de Hausdorff[9] qui est une famille $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{E}_\sigma =$
2/3 $\mathcal{E}_\delta = \mathcal{E}$.

Par exemple, la famille formée d'un *seul* ensemble non vide est un « système de Borel », mais non un σ-corps.

II. Fonction d'ensemble

Une fonction d'ensemble λ de *champ* $\mathcal{E}$, c'est à dire définie pour les ensembles de la famille $\mathcal{E}$ (et dont la valeur est un nombre réel fini ou bien $+\infty$ mais jamais $-\infty$) est dite *complètement additive* si $E_1, E_2, \ldots$ étant des ensembles disjoints de $\mathcal{E}$ dont la somme[10] $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ appartient à $\mathcal{E}$:

(1) $\lambda E_1 + \lambda E_2 + \cdots$ a une somme finie ou égale à $+\infty$ indépendante de l'ordre des termes (la série des termes négatifs converge).

(2) Cette somme est égale à λE.

Théorème. *Toute fonction d'ensemble complètement additive est la différence de deux fonctions complètement additives et jamais négatives.*

En conséquence on se limitera aux fonctions jamais négatives. Celles que nous considérerons jouiront en général de la propriété :

A_1.– Tout ensemble de $\mathcal{E}$ pour lequel $\lambda E = +\infty$ peut être recouvert par une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathcal{E}$ pour lesquels λ est fini.

3/4 **Mesure.** La fonction sera appelée *mesure* (1) si, en plus de A_1, elle vérifie aussi les deux propriétés :

A_2.– Le champ $\mathcal{E}$ est un σ-corps.

A_3.– Si $\lambda E = 0$, toute partie E' de E appartient à $\mathcal{E}$, et l'on a $\lambda E' = 0$.

1. Le sens adopté ici est un peu différent de celui de l'exposé oral.[11]

Fonction d'ensemble de Carathéodory. C'est une fonction d'ensemble χ dont le champ comprend toutes les parties de $\mathfrak{E}$, et qui vérifie les conditions suivantes[12] :

C_1.– Si F est contenu dans E, on a $\chi F \subseteq \chi E$.

C_2.– Si E désigne la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles[13] E_i, on a : $\chi E \subseteq \chi E_1 + \chi E_2 + \cdots$. En restreignant convenablement le champ de définition d'une fonction de Carathéodory, on peut en déduire une mesure. Voici comment :

Considérons la famille $\mathcal{M}$ des ensembles E tels que, pour tout ensemble A de $\mathfrak{E}$, $\chi A = \chi(A \cdot E) + \chi(A \cdot \complement E)$ $\complement E$ désignant le complémentaire de E).[14] $\mathcal{M}$ est un σ-corps, et la fonction qui a pour champ $\mathcal{M}$ et qui y est égale à χ est complètement additive et vérifie $A_{2,3}$; elle ne vérifie pas, en général, A_1. Pour obtenir une mesure, il faut encore restreindre le champ $\mathcal{M}$.

Nommons *mesurable*-χ les ensembles de $\mathcal{M}$ pour lesquels χ est fini et les ensembles de $\mathcal{M}$ qui peuvent être recouverts par une infinité dénombrables d'ensembles de $\mathcal{M}$ 4/5
pour lesquels χ est fini. Cette fois la fonction $\underline{\chi|}$ qui a pour champ les ensembles mesurables-σ et qui y est égale à χ est bien une *mesure.* Il n'existe d'ailleurs pas de mesure prolongeant $\underline{\chi|}$ et ayant même valeur que χ.

Théorème de prolongement. Étant donné une fonction χ vérifiant A_1, dont le champ $\mathcal{E}$ est une famille $\boxed{\mathcal{T}}$, il existe des mesures qui prolongent χ : parmi elles, il en existe une μ dont toutes les autres sont des prolongements. Le champ $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}$ comprend, en particulier, le plus petit σ-corps contenant $\mathcal{E}$. Tout ensemble de $\mathcal{K}$ peut s'obtenir en retranchant d'un ensemble de $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ un ensemble de $\mathcal{K}$ pour lequel μ est nul. On voit donc quel est le gain obtenu par le prolongement.[15]

Pour obtenir μ, on opère de la façon suivante : Pour tout ensemble E, s'il n'existe pas de système d'une infinité dénombrable d'ensembles E_i de $\mathcal{E}$ recouvrant E, on pose $\chi E = +\infty$. S'il existe de tels systèmes, on pose $\chi E =$ borne inf. des $\sum\limits_i \chi E_i$. χ est alors une fonction de Carathéodory, et il suffit de poser $\mu = \underline{\chi|}$. En particulier, si on applique le procédé à une mesure μ on obtient une fonction de Carathéodory χ telle que $\underline{\chi|} = \mu$.

Dans tous les cas la fonction χ obtenue n'est pas quelconque : pour tout ensemble A pour lequel χA est fini et pour tout nombre positif ε, il existe un ensemble E 5/6
mesurable-μ, contenant A, et tel que $\chi E < \chi A + \varepsilon$. On dit alors que la fonction de Carathéodory χ est *regulière.*

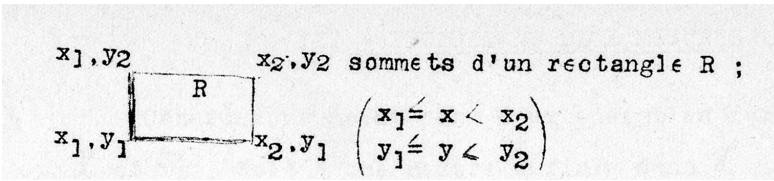
Il y a donc une correspondance biunivoque entre les mesures et les fonctions de Carathéodory régulières.

Étant donnée une fonction de Carathéodory χ *non régulière*, on peut en déduire une fonction régulière $\overline{\chi}$ en appliquant à $\underline{\chi|}$ le procédé du théorème de prolongement. χ et $\overline{\chi}$ ne diffèrent que pour les ensembles *non mesurables*-χ.

Exemples de mesures. Considérons dans l'espace à n dimensions, une mesure μ dont le champ contienne les ensembles ouverts, qui ne soit pas le prolongement d'une autre mesure jouissant de la même propriété, et qui soit finie pour tout ensemble borné. C'est une *mesure de Radon.*

Il existe une correspondance biunivoque entre ces mesures et les fonctions monotones de n variables continues à gauche par exemple (avec définition convenable du mot *monotone*). Plaçons-nous dans le cas du plan :

(1) Supposons la mesure μ donnée. Prenons par exemple x et y positifs ; posons $f(x_0, y_0) = \mu I(x_0, y_0)$, $I(x_0, y_0)$ désignant l'intervalle à demi-ouvert ($0 \leqslant x <$
6/7 x_0, $0 \leqslant y < y_0$). Si on prend les valeurs de $f(x, y)$ aux quatre sommets d'un



rectangle R, on a $\mu R = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) \geqslant 0$. C'est en ce sens que la fonction f est *monotone.*[16]

Si h tend vers 0 par valeurs positives, $f(x, y) - f(x, y - h)$ tend vers zéro ; donc f est continue à gauche par rapport à chacune des variables.

(2) Inversement partons d'une fonction $f(x, y)$ vérifiant ces deux conditions. Posons pour le rectangle R

$$\lambda R = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1).$$

λR est une fonction complètement additive et définie pour la famille $\boxed{\mathcal{I}}$ des intervalles à demi-ouverts ; le théorème de prolongement la prolonge par une mesure qui vérifie les propriétés voulues et montre qu'elle est unique.

En particulier, si on prend xy pour fonction monotone, on tombe sur la mesure de Lebesgue dans le plan. Sur la droite, f devient une fonction monotone ordinaire continue à gauche et μE est la variation de cette fonction sur l'ensemble E. Le champ
7/8 de μ varie avec μ mais contient toujours les ensembles de Borel.

III. Produit de deux mesures

Considérons maintenant deux ensembles fondamentaux[17] $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$. Soit λ une mesure définie dans $\mathcal{H}$ et μ une mesure définie dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{X}$ le champ de λ, $\mathcal{Y}$ le champ de μ. Nous allons définir une mesure dans l'ensemble fondamental $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, *produit*[18] des deux autres (ou ensemble des couples (x, y) où x est un élément de $\mathcal{X}$, y un élément de $\mathcal{Y}$). Pour les ensembles $X \times Y$ où X appartient à $\mathcal{X}$, Y à $\mathcal{Y}$, posons $\eta(X \times Y) = \lambda X \cdot \mu Y$ avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$. η est une fonction complètement additive, dont le champ est une famille $\boxed{\mathfrak{J}}$, et qui vérifie A_1. En prolongeant η par le théorème fondamental, on obtient une mesure ν qu'on nomme le produit de λ et μ et qu'on note $\lambda \times \mu$. Toute mesure qui prolonge η prolonge aussi ν.

La seule difficulté de la démonstration est de prouver que η est complètement additive. Il suffit de montrer que si $\sum_i X_i \times Y_i$ recouvre $X \times Y$, alors

$$\sum_i \eta(X_i \times Y_i) \geqslant \eta(X \times Y) = \lambda X \cdot \mu Y.$$

Le lemme de Borel-Lebesgue n'est plus applicable puisque les ensembles sont quelconques sans notion de voisinage. On le remplace par un autre lemme d'un caractère tout différent (Voir C.R. Octobre 1933, note de MM.de Possel et Chevalley).

Inversement, ν étant définie dans $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$, λ et μ sont déterminées à un facteur 8/9
constant près.

On définit de même le produit de n mesures définies sur n ensembles fondamentaux. Ce produit est associatif :

$$\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = (\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_p) \times (\lambda_{p+1} \times \cdots \times \lambda_n),$$

à condition de considérer le groupement $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ comme identique au couple des groupements $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$.

IV. Intégrale

Donnons-nous une fonction de point $f(p)$ définie dans un ensemble fondamental $\mathfrak{E}$, prenant des valeurs non négatives (et éventuellement $+\infty$), et une mesure μ définie dans $\mathfrak{E}$. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des nombres réels > 0 et m la mesure de Lebesgue définie dans $\mathfrak{A}$. Considérons la mesure $\nu = \mu \times m$ qui est définie dans $\mathfrak{E} \times \mathfrak{A}$. Soit G_f l'ensemble des éléments (p, a) de $\mathfrak{E} \times \mathfrak{A}$ tels que p et a satisfassent à $0 < a < f(p)$. C'est l'*ensemble des ordonnées de* $f(p)$.

Si G_f appartient au champ de ν, on dit que f est *mesurable*-μ et on pose :

$$\nu G_f = \text{ intégrale de } f(p) \text{ par rapport à } \mu \ = \int f(p)\, d\mu.$$

Si $f(p)$ est nulle sauf sur un ensemble où μ est nulle, on a $\int f(P)\, d\mu = 0$; si $f \leqslant g$, $\nu G_f \leqslant \nu G_g$, d'où

$$\int f(p)\, d\mu \leqslant \int g(p)\, d\mu.$$

Si $f_1(p), \ldots, f_n(p), \ldots$ forment une suite non décroissante, leur limite $f(p)$ (finie 9/10
ou non) satisfait à :

$$\lim_{n=\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

(ceci résulte de l'additivité complète de ν).

Si f est mesurable-μ les ensembles $E(f > \alpha)$ et $E(f \geqslant \alpha)$ appartiennent au champ de μ. ($E(f \geqslant \alpha)$ par exemple, désigne l'ensemble des points p où $f(p) \geqslant \alpha$). Il n'en est pas toujours de même de $E(f < \alpha)$. Par exemple, pour $f \equiv 0$, et $\mathfrak{E}$ n'appartenant pas au champ de μ.

Inversement, si pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ formant une suite partout dense dans $\mathfrak{A}$, les $E(f \geqslant \alpha_n)$ appartiennent au champ de μ, alors f est mesurable-μ.

Sommes de Lebesgue. Divisons $\mathfrak{A}$ au moyen d'une échelle $0, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i, \dots$ d'écart inférieur à un nombre positif ε : $0 < \ell_i - \ell_{i-1} < \varepsilon$. Posons $E_i = E(\ell_{i-1} < f(p) \leqslant \ell_i)$, G_i = ensemble des points (p, a) de G_f tels que p soit un élément de E_i, d'où :

$$G_f = G_1 + G_2 + \cdots \quad \text{et} \quad \nu G_f = \sum_i \nu G_i$$

I_i intervalle $0 < a < \ell_i$, d'où

$$E_i \times I_{i-1} \leqslant G_i \leqslant E_i \times I_i \quad \text{et} \quad \ell_{i-1}\mu E_i \leqslant \nu G_i \leqslant \ell_i \mu E_i.$$

On en conclut :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell_{i-1}\mu E_i \leqslant \int f(p)\, d\mu \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \ell_i \mu E_i$$

En supposant μ fini pour l'ensemble $E(f(p) > 0)$ la différence entre les deux sommes est au plus égale à $\varepsilon\mu E(f(p) > 0)$ et tend vers zéro avec ε.

Si f et g sont mesurables-μ on montre que fg, $f + g$ le sont aussi et quue

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

10/11 Si E appartient au champ de μ et si f est mesurable-μ, $\varphi_E \cdot f$ est aussi mesurable-μ et on introduit la notation :

$$\int_E f\, d\mu = \int (\varphi_E \cdot f)\, d\mu.$$

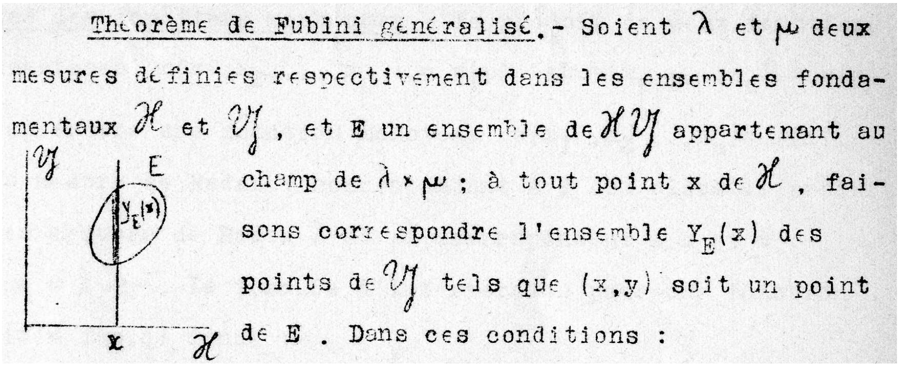
(On désigne par φ_E la fonction caractéristique de l'ensemble E, égale à 1 en tout point de E et nulle en tout point n'appartenant pas à E).

Dans la cas où $\mathfrak{E}$ est l'espace à n dimensions et où μ est une mesure de Radon correspondant à la fonction monotone $w(x_1, \dots, x_n) = w(p)$, l'*intégrale prise par rapport à la fonction monotone* w est par définition l'intégrale prise par rapport à μ :

$$\int F(p)\, dw(p) = \int f(p)\, d\mu$$

Intégrales multiples.

Théorème de Fubini généralisé. Soient λ et μ deux mesures définies respectivement dans les ensembles fondamentaux $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et E un ensemble de $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ appartenant au champ de $\lambda \times \mu$; à tout point x de $\mathfrak{X}$, faisons correspondre l'ensemble $Y_E(x)$ des points de $\mathfrak{Y}$ tels que (x, y) soit un point de E. Dans ces conditions :


Théorème de Fubini généralisé. - Soient λ et μ deux mesures définies respectivement dans les ensembles fondamentaux $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, et E un ensemble de $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ appartenant au champ de $\lambda \times \mu$; à tout point x de $\mathcal{X}$, faisons correspondre l'ensemble $Y_E(x)$ des points de $\mathcal{Y}$ tels que (x,y) soit un point de E. Dans ces conditions :

(1) l'ensemble $Y_E(x)$ appartient au champ de μ, sauf peut-être pour un ensemble Ξ de points x tel que $\lambda\Xi = 0$

(2) On a

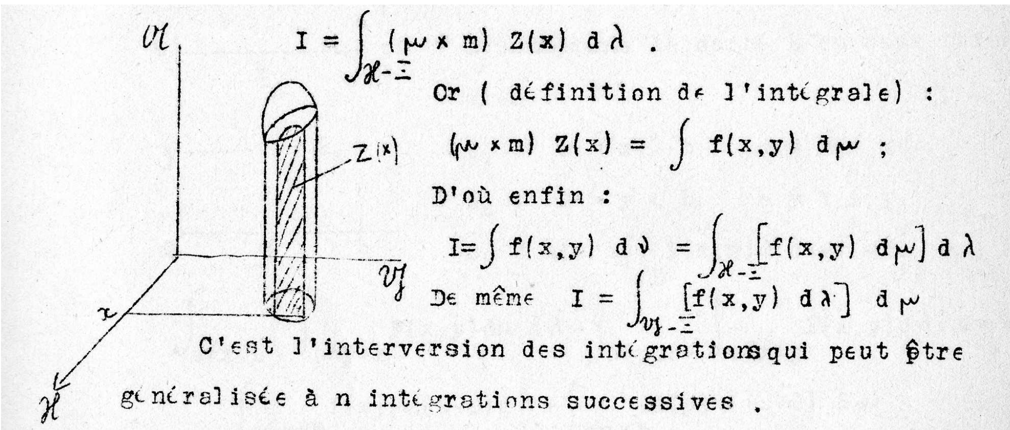
$$(\lambda \times \mu)E = \int_{\mathcal{X}-\Xi} \mu[Y_E(x)]\, d\lambda$$

Intégrales successives. Si $\nu = \lambda \times \mu$, on a

$$I = \int f(x,y)\, d\nu = [(\lambda \times \mu) \times m]G_f = [\lambda \times (\mu \times m)]G_F$$

d'où, d'après le théorème précédent, et en désignant par $Z(x)$ l'ensemble des ordonnées 11/12
de la fonction $f(x,y)$ en prenant y pour variable

$$I = \sum_{\mathcal{X}-\Xi} (\mu \times m) Z(x)\, d\lambda.$$


$I = \int_{\mathcal{X}-\Xi} (\mu \times m)\ Z(x)\ d\lambda$.

Or (définition de l'intégrale) :

$(\mu \times m)\ Z(x) = \int f(x,y)\ d\mu$;

D'où enfin :

$I = \int f(x,y)\ d\nu = \int_{\mathcal{X}-\Xi} [f(x,y)\ d\mu]\ d\lambda$

De même $I = \int_{\mathcal{Y}-\Xi} [f(x,y)\ d\lambda]\ d\mu$

C'est l'interversion des intégrations qui peut être généralisée à n intégrations successives .

Or (définition de l'intégrale) :

$$(\mu \times m)Z(x) = \int f(x,y)\, d\mu;$$

D'où enfin :

$$I = \int f(x,y)\,d\nu = \int_{\mathcal{X}-\Xi} [f(x,y)\,d\mu]\,d\lambda$$

De même

$$I = \int_{\mathcal{Y}-\Xi} [f(x,y)\,d\lambda]\,d\mu$$

C'est l'interversion des intégrations qui peut être généralisée à n intégrations successives.

Cas des fonctions monotones. Le produit de deux fonctions monotones $u(x_1, x_2, \ldots, x_p) = u(p)$ et $v(x_{p+1}, \ldots, x_n) = v(q)$ est encore une fonction monotone $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w(r)$. La mesure de Radon ν correspondant à f est alors le produit des mesures de Radon λ et μ correspondant à u et v : $\nu = \lambda \times \mu$. La formule d'interversion pour une fonction $f(r) = f(p,q)$ donne :

$$\int f(r)\,dw(r) = \int_{\mathcal{P}-\Pi} \left[\int f(p,q)\,dv(q)\right] du(p)$$

Intégration par parties. Soient λ et μ deux fonctions monotones de la droite définies pour $a \leqslant t < b$ et $f(t)$ une fonction mesurable-λ et mesurable-μ. Considérons le carré
12/13 E ($a \leqslant x < b$, $a \leqslant y < b$) et la fonction $F(x,y)$ définie par :

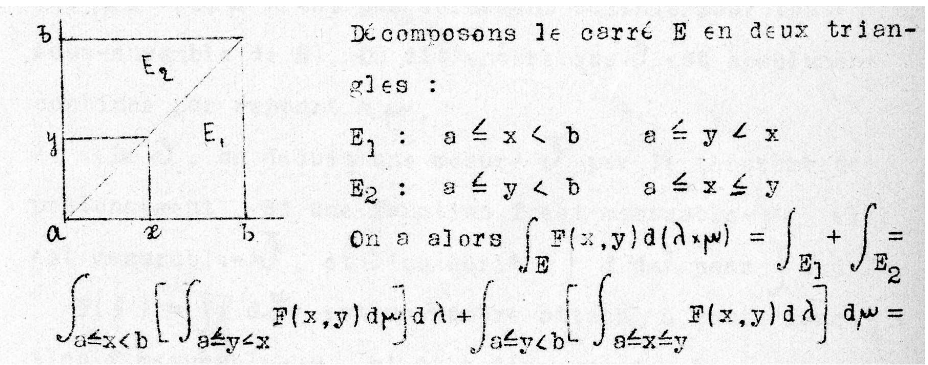
$$F(x,y) = f(x) \text{ si } x \geqslant y, \qquad F(x,y) = f(y) \text{ si } x \leqslant y.$$

Supposons ce qui ne restreint pas la généralité :

$$\lambda(a-0) = \mu(a-0) = 0$$

Décomposons le carré E en deux triangles :

$$E_1 : \quad a \leqslant x < b \qquad a \leqslant y < x$$
$$E_2 : \quad a \leqslant y < b \qquad a \leqslant x \leqslant y$$



Décomposons le carré E en deux triangles :

E_1 : $a \leq x < b$ $\quad a \leq y < x$

E_2 : $a \leq y < b$ $\quad a \leq x \leq y$

On a alors $\int_E F(x,y)\,d(\lambda\times\mu) = \int_{E_1} + \int_{E_2} =$

$$\int_{a\leq x<b}\left[\int_{a\leq y<x} F(x,y)\,d\mu\right] d\lambda + \int_{a\leq y<b}\left[\int_{a\leq x\leq y} F(x,y)\,d\lambda\right] d\mu =$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_E F(x,y)\,d(\lambda\times\mu) &= \int_{E_1} + \int_{E_2} \\
&= \int_{a\leqslant x<b}\left[\int_{a\leqslant y<x} F(x,y)\,d\mu\right] d\lambda + \int_{a\leqslant y<b}\left[\int_{a\leqslant x\leqslant y} F(x,y)\,d\lambda\right] d\mu \\
&= \int_{a\leqslant x<b} f(x)\mu(x-0)\,d\lambda + \int_{a\leqslant y<b} f(y)\lambda(x+0)\,d\mu
\end{aligned}$$

Or on démontre que :

$$\int_E F(x,y)\,d(\lambda\times\mu) = \int_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)\,d\,[\lambda(t)\cdot\mu(t)]$$

d'où la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\int_{a\leqslant t<b} f(t)d\,[\lambda(t)\cdot\mu(t)] = \int_{a\leqslant t<b} f(t)\mu(t-0)\,d\lambda + \int_{a\leqslant t<b} f(t)\lambda(t+0)\,d\mu.$$

V.– Fonctionnelles linéaires

On dit qu'une fonction d'ensemble [ϑ][19] complètement additive *a pour base-*μ lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

B$_1$.– Elle est [dé]finie pour tout ensemble mesurable-μ. 13/14

B$_2$.– Si $E=0$, $\vartheta E=0$.

B$_3$.– ϑE est finie toutes les fois que μE est finie. (Si $\mu E=0$, ϑ n'est pas forcément définie pour tout sous-ensemble de E). On dit encore que ϑ est absolument continue par rapport à μ.

De ϑ, on déduit une mesure $\overline{\vartheta}$ par le théorème de prolongement. Si une fonction f est mesurable-μ, elle est mesurable-$\overline{\vartheta}$, et l'on écrit $\int f\,d\vartheta$ pour $\int f\,d\overline{\vartheta}$

$F(f)=\int f\,d\vartheta$ est un nombre attaché à toute fonction f mesurable-μ, c'est à dire une fonctionnelle. Elle possède les cinq propriétés suivantes :

F$_1$: F est un nombre, nul, positif ou égal à $+\infty$.

F$_2$: Si f et g sont mesurables-μ, $F(f+g)=F(f)+F(g)$.

F$_3$: Si $f_n(p)$ mesurable tend en croissant vers $f(p)$ (qui est toujours mesurable-μ), $\lim\limits_{n=\infty} F(f_n)=F(f)$

(De F$_2$ et F$_3$ on déduit immédiatement que $F(kf)=kF(f)$.)[20]

F$_4$: Si $\mu E=0$, $F(\varphi_E)=0$

F$_5$: Si μE est finie, $F(\varphi_E)$ est finie.

Toute fonctionnelle définie pour les fonctions mesurables-μ et vérifiant $\mathrm{F}_{1\dots5}$ est appelée *fonctionnelle linéaire de base μ*.

Inversement, partons d'une fonctionnelle linéaire de $F(f)$ de base μ. Pour $f = \varphi_E$,
14/15 elle constitue une fonction d'ensemble complètement additive de base-μ, soit ϑ. On démontre, en approchant f au moyen de fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, que $\int f\, d\vartheta = F(f)$. D'où le *théorème* : Toute fonctionnelle linéaire de base-μ est une intégrale par rapport à une fonction d'ensemble complètement additive de base-μ. On peut dire encore qu'il y a correspondance biunivoque entre les fonctions d'ensembles de base μ et les fonctionnelles linéaires de base μ.

On a aussi $F(f) = \left[\overline{\vartheta} \times m\right] G_f$. Donc, les fonctionnelles linéaires sont un cas particulier des fonctions d'ensembles complètement additives dans l'ensemble fondamental $\mathfrak{E} \times \mathfrak{A}$ tandis que les fonctions d'ensemble complètement additives dans $\mathfrak{E}$ sont un cas particulier des fonctionnelles linéaires.

Intégrale indéfinie. Limitons-nous à partir de maintenant au cas où l'on peut recouvrir l'ensemble fondamental par une infinité dénombrable d'ensembles appartenant au champ de μ et de mesures finies. Soit ψ une fonction mesurable-μ telle que, pour μE finie, $\int_E \psi(p)\, d\mu$ soit finie ; on a :

$$\vartheta E = \int_E \psi(p)\, d\mu = \int \psi\varphi_E\, d\mu = \int \psi\, d\mu_E \quad (\text{avec } \mu_E A = \mu(A \cdot E)).$$

μ_E est une fonction complètement additive de base-μ. ϑE se nomme l'*intégrale indéfinie* de la fonction ψ. C'est une fonction complètement additive de base μ. ϑ ne
15/16 change pas si on modifie ψ sur un ensemble de mesure-μ nulle.

Inversement, soit ϑE une fonction complètement additive de base μ, il existe une fonction ψ telle que $\vartheta E = \int_E \psi\, d\mu$ (Nikodym). Cette fonction ψ peut se nommer une *quasi-dérivée* de ϑ par rapport à μ, et se noter $\dfrac{d\vartheta}{d\mu}$. Deux quasi-dérivées de ϑ, ψ_1 et ψ_2, ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle, mais cet ensemble de mesure nulle est quelconque.

Pour obtenir $\psi(p)$ à partir de ϑ, on recherche un ensemble E_α contenu dans $\mathfrak{E}$ tel que, pour toute partie E' de E_α, on ait $\dfrac{\vartheta E'}{\mu E'} > \alpha$ et pour tout ensemble E'' contenu dans $\mathfrak{E}$ et sans point commun avec E_α, $\dfrac{\vartheta E''}{\mu E''} \leqslant \alpha$. On en déduit un partage de $\mathfrak{E}$ en ensembles $\overline{E}_\alpha$ pour lesquels $\psi(p) = \lambda$.

Il y a donc correspondance biunivoque entre les fonctions ψ définies à un ensemble de mesure-μ nulle près, et les fonctions d'ensembles complètement additives de base μ.

D'après les théorèmes ci-dessus, toute fonctionnelle linéaire peut se mettre sous la forme :

$$\int f\, d\vartheta = \int f\, d\left(\int_E \psi\, d\mu\right) = \int f\psi\, d\mu$$

(formule du changement de variable généralisée).

Théorème de dérivation. Plaçons-nous par exemple dans le cas d'une mesure-μ de la droite, considérons une suite d'intervalles δ_n de centre p et tendant vers zéro. 16/17
Dans ces conditions, $\dfrac{\vartheta\delta_n}{\mu\delta_n}$ tend vers $\psi(p)$ sauf peut-être pour un ensemble de points p de mesure-μ nulle. En particulier, si $\vartheta = \mu_E$, $\dfrac{\mu_E\delta_n}{\mu\delta_n}$ tend vers *un* en un point de l'ensemble et vers *zéro* en un point n'appartenant pas à l'ensemble, sauf peut-être pour un ensemble de mesure-μ nulle. (On exprime ce fait en disant que la densité d'un ensemble est égale à 1 presque partout pour les points de l'ensemble, à zéro presque partout pour un point n'appartenant pas à l'ensemble).

VI. Intégrale de Hellinger-Radon

Soit ϑ une fonction complètement additive de base-μ ; considérons

$$I = \int_E \left(\frac{d\vartheta}{d\mu}\right)^{p+1} d\mu \quad (p > 1).$$

Divisons E en ensembles e_i tels que $\mu e_i < \varepsilon$; la somme $\sum \dfrac{(\vartheta e_i)^{p+1}}{(\mu e_i)^p}$ a pour limite I lorsque ε tend vers zéro ; on démontre d'abord que cette limite existe, puis qu'elle est une fonction complètement additive de base-μ et que sa dérivée est $\left(\dfrac{d\vartheta}{d\mu}\right)^{p+1}$ (en considérant l'ensemble des points où $\dfrac{d\vartheta}{d\mu}$ est compris entre deux valeurs voisines). On en conclut que la limite est l'intégrale I ci-dessus. C'est l'intégrale de *Hellinger-Radon.*

On démontre de même que $\displaystyle\int F(p)\left(\frac{d\vartheta}{d\mu}\right)^{p+1} d\mu$ est la limite de la somme :
$\displaystyle\sum_i f(p_i)\frac{(\vartheta e_i)^{p+1}}{(\mu e_i)^p}$. 17/18

Plus généralement, $F(p, u_1, \dots, u_n)$ désigant une fonction homogène et de degré 1 par rapport à $u_1, \dots, u_n$, et $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ des fonctions de base μ, on peut étudier dans quels cas $\displaystyle\sum_i F[p_i, \vartheta_1(e_i), \dots, \vartheta_n(e_i)]$ tend vers l'intégrale

$$\int F\left[p_i, \frac{d\vartheta_1}{d\mu}, \frac{d\vartheta_2}{d\mu}, \dots, \frac{d\vartheta_n}{d\mu}\right] d\mu$$

VII. Généralisations

Si $f(p)$ n'est pas toujours supérieure ou égale à zéro, on considère $f = \overset{+}{f} - \overset{-}{f}$ et la plupart des résultats s'appliquent encore ; cependant, il ne faut pas que $\int \overset{-}{f}$ soit infinie, car alors

$$\int f\,d\mu = \int \overset{+}{f}\;d\mu - \int \overset{-}{f}\;d\mu$$

n'aurait plus de sens.

Si $\int \overset{+}{f}\;d\mu$ et $\int \overset{-}{f}\;d\mu$ sont bornées, ce qui équivaut à supposer $\int |f|\;d\mu$ bornée, on dit que f est *sommable.*

Citons le théorème sur les suites d'intégrales : si les fonctions f_n mesurables-μ tendent vers f et si les $|f_n|$ sont inférieures à F sommable, $\int f_n\,d\mu$ tend vers $\int f\,d\mu$.

On considère aussi le cas où la mesure μ peut prendre des valeurs négatives (diffé-
18/19 rence de deux mesures dont l'une est bornée). Par exemple, $\int f(x)\,d\lambda(x)$ où $\lambda(x)$ est une fonction à variation bornée, différence de deux fonctions monotones λ_1 et λ_2 est, par définition :

$$\int f(x)\,d\lambda(x) = \int f(x)\,d\lambda_1(x) - \int f(x)\,d\lambda_2(x).$$

Bilbliographie.

(1) Radon.– Sitsungsberichte... Wien -1913

(2) Hahn.– Annali di Pisa -1932

(3) de Possel.– C.R. Juillet et Octobre 1933[21]

(4) de Possel.– Livre à paraître[22] chez Hermann dans la collection des « Actualités scientifiques » et dédié à la mémoire de J.Herbrand.

Voir pour plus de renseignements historiques et bibliographiques les ouvrages de Lebesgue-La Vallée - Poussin - Carathéodory.

Notes

1. Pour cet exposé, il existe un *errata*, qui a été relié, dans le volume de l'IHP, à la fin de l'exposé suivant. Nous avons corrigé d'après cet *errata*, parfois en le signalant dans une note.
2. Les articles et/ou ouvrages cités dans cette rédaction sont les articles de Radon [Rad13] et de Hahn [Hah33], ainsi que les notes aux *Comptes rendus* récentes [DP33] (du 31 juillet) et [CdP33] (du 23 octobre) de de Possel lui-même (la seconde est co-signée par Chevalley). L'*errata* ajoutera la référence au livre [Sak33] de Stanisław Saks. Les références « vagues » de la fin de la bibliographie sont aux livres de Lebesgue [Leb28] et de de la Vallée Poussin (sans doute [dlVP16]), ainsi qu'à celui [Car27] de Carathéodory.
3. C'est par une indication au typographe dans le « tapuscrit » de la note [DP33] (consulté aux archives de l'Académie des sciences) que nous avons appris que le caractère suivant était un E gothique.
4. Le symbole représenté ici par $\subseteq$ est obtenu par un $E = F$ (tapé) avec un $\subset$ ajouté à la main au-dessus du signe $=$.
5. **Des archives de Bourbaki.** Le rapport de Chevalley sur l'intégration conservé avec la compte rendu de la réunion « Traité d'analyse » du 25 février donne les rectangles comme exemple de famille $\boxed{\mathfrak{J}}$.

6. La note [DP33] renvoie à l'édition [Hau27] de 1927 du livre de Hausdorff pour ces notations (voir les pages 82 (et pas 51) et suivantes). L'utilisation des σ, δ dans ce contexte est sans doute à attribuer à René Baire.
7. Les notations $\aleph$ étaient pourtant déjà dans le livre [Hau27] que de Possel utilisait.
8. et aujourd'hui boréliens
9. C'est toujours au livre [Hau27, p. 82] qu'il est fait référence ici.
10. La somme est la réunion de ces parties disjointes, comme il a été dit au début de l'exposé. Voir aussi les notes de l'exposé 2-H, sur ces notations ensemblistes.
11. Donc la rédaction finale est postérieure à l'exposé oral.
12. La référence pour ceci que donnait de Possel dans la note [DP33] est l'édition de 1927 [Car27] du livre de Carathéodory (pages 138 sqq). Rappelons que de Possel a passé une partie de l'année de 1932 avec Carathéodory (avec une bourse Rockefeller) qui, les remerciements de sa thèse le montrent, l'a guidé pour sa thèse. Pour tous les renseignements sur les thèses contenus dans ce livre, voir [Lel09].
13. L'*errata* demande de remplacer $+$ par $\dot{+}$, explicitant la différence entre les deux notations pour la réunion et la réunion disjointe.
14. Et le point l'intersection.
15. Le théorème de prolongement est le résultat principal de la note [DP33] du 31 juillet 1933.
16. L'inégalité $\geqslant 0$ avait été oubliée et est corrigée dans l'*errata*.
17. **Des archives de Bourbaki.** Le rapport de Chevalley sur l'intégration conservé avec le compte rendu de la réunion « Traité d'analyse » du 25 février 1935 mentionne simplement :

4°) Produit de deux mesures : lemme de Possel

La dernière phrase de la note [DP33] annonçait en effet que le « théorème de prolongement » permettait de définir le produit de deux mesures.
18. Ici, la notation $\times$ désigne bien le produit cartésien. Dans les exposés de l'année précédente, elle désignait le produit tensoriel. Voir les notes de l'exposé 1-D.
19. Le nom de la fonction ici est ajouté grâce à l'*errata*.
20. Dans les deux items suivants, apparaît φ_E, notation pour la fonction caractéristique de la partie E.
21. La deuxième est signée de Claude Chevalley et René de Possel. Le « manuscrit » conservé aux archives de l'Académie des sciences est manuscrit (en effet) et, semble-t-il, de la main de de Possel.
22. Ce livre n'est, semble-t-il, jamais paru.

Des archives du séminaire...

Compte-rendu de la séance du 12 Novembre 1934

1. La séance est ouverte à 16h.30.Public très nombreux. M.Julia transmet quelques avis d'ordre pratique et donne la parole à M.de Possel.

2. De 16h.40 à 16h.50 (2) de Possel fait un exposé sur l'intégration.

3. M.Julia remercie très vivement au nom de tous de Possel de son exposé et signale la part très personnelle de de Possel dans ces recherches ; il indique la méthode de travail du séminaire. On fait quelques remarques. De Possel donne la bibliographie qui lui est réclamée : voir surtout le fascicule qu'il va faire paraître chez Hermann.

2. Certainement 17h.50.

4. On décide de maintenir une cotisation élevée (60 à 80 frs) et de faire envoyer à tous les exposés. Thé ; conversations nombreuses et animées. La séance est levée à 18h.30 [3].

Références

[Car27] C. Carathéodory – *Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl.*, Leipzig, B. G. Teubner , 1927.

[CdP33] C. Chevalley & R. de Possel – « Un théorème sur les fonctions d'ensemble complètement additives », *C. R. Acad. Sci., Paris* **197** (1933), p. 885–887.

[dlVP16] C. de la Vallée Poussin – *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1916.

[DP33] R. De Possel – « Théorie de la mesure. Sur le prolongement d'une fonction additive d'ensemble. », *C. R. Acad. Sci., Paris* **197** (1933), p. 385–387.

[Hah33] H. Hahn – « Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, II. Ser.* **2** (1933), p. 429–452.

[Hau27] F. Hausdorff – *Mengenlehre*, de Gruyter, Leipzig, 1927.

[Leb28] H. Lebesgue – *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2 éd.*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[Lel09] J. Leloup – « L'entre-deux guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France », Thèse, Paris, 2009.

[Rad13] J. Radon – « Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. », *Wien. Ber.* **122** (1913), p. 1295–1438.

[Sak33] S. Saks – *Théorie de l'intégrale. Avec une note de Stefan Banach.*, Monogr. Mat. 2. Warszawa : Subw. Fund. Kult. Narod., VII, 290 S. , 1933.

3. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.