Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Aussois, 19–23 juin 2024

Yannick Guedes Bonthonneau

Le lemme d'Egorov et $2/3$

J. É. D. P. (2024), Exposé n° II, 10 p.

<https://doi.org/10.5802/jedp.683>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Aussois, 19–23 juin 2024
RT AEDP (CNRS)

Le lemme d'Egorov et 2/3

Yannick Guedes Bonthonneau

Résumé

Reprenant l'argument classique pour un Lemme d'Egorov en temps long, il s'avère que le temps d'Ehrenfest prend la forme $(2/3)|\log h|/\lambda$, au lieu du temps $(1/2)|\log h|/\lambda$ communément admis.

2/3 Egorov Lemma

Abstract

The long time Egorov lemma concerns the Heisenberg propagation of observables. It is usually considered to be valid in the range $|t| \leq (1/2)|\log h|/\lambda$. After careful inspection of the proof, it turns out to hold in the larger range $|t| \leq (2/3)|\log h|/\lambda$. This applies to operators with no particular dynamical assumption or geometric structure.

Si U est un Opérateur Intégral de Fourier (OIF) unitaire et A un opérateur pseudo-différentiel (pseudo), il est maintenant bien connu que UAU^* est encore un pseudo, et que le symbole principal satisfait

$$\sigma(UAU^*) = \sigma(A) \circ \kappa,$$

où κ est le symplectomorphisme quantifié par U. Ce méta-résultat est appelé Lemme d'Egorov, en l'honneur de [4], et s'applique dans toutes les situations où on a donné un sens raisonnable aux objets mentionnés.

Dans cette note, nous nous intéresserons particulièrement au cas où $U = \exp(itP/h)$ est le propagateur de l'équation de Schrödinger associée à un opérateur P pseudo-différentiel semi-classique, elliptique, auto-adjoint. Plus précisément, nous étudierons ce qui se passe quand le temps devient grand.

À ce sujet, l'article le plus notable de la littérature est celui de Bouzouina et Robert [2]. Dans le cas d'opérateurs agissant sur $\mathbb{R}^n$, et sous des hypothèses assez standard sur l'opérateur P, ils montrent que pour un symbole $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$A_t = e^{itP/h} \operatorname{Op}_h^w(a) e^{-itP/h},$$

(Op_h^w est la quantification de Weyl usuelle) est encore un pseudo, dans des classes potentiellement exotiques, tant qu'il existe $\epsilon > 0$ satisfaisant

$$hf(t) = h^\epsilon.$$

La fonction du temps f dépend de la dynamique du flot hamiltonien φ_t du symbole principal de P. Considérons l'exposant de Lyapunov

$$\lambda = \limsup_t \frac{1}{|t|} \sup_{x \in \operatorname{supp}(a)} \log \|\mathrm{d}\varphi_t\|.$$

Dans un cas générique où $\lambda > 0$, il est possible de prendre

$$f(t) = e^{2\lambda|t|}.$$

Le temps limite prend alors la forme

$$T_E = \frac{1}{2}\frac{|\log h|}{\lambda},$$

communément appelé *Temps d'Ehrenfest.*

Nos investigations ont été motivées par la remarque suivante, trouvée à la sixième page de [2]. Supposons que l'opérateur P s'écrit sous la forme

$$P = \mathrm{Op}_h^w(p_0 + h^2 p_2 + \dots),$$

avec un développement complet en puissances paires de h, et où chacun des p_{2k} est indépendant de h. Alors la fonction de temps peut être améliorée en

$$f(t) = e^{3\lambda|t|/2}.$$

Le temps limite devient donc

$$T_E' = \frac{2}{3}\frac{|\log h|}{\lambda}.$$

Notre objectif ici est d'expliquer que cette remarque s'applique en fait en général, et même pour la propagation d'observables sur des variétés.

Un énoncé similaire à notre résultat apparaît dans le preprint récent (et indépendant) [5], mais d'une façon moins mise en évidence. Il existe d'autres résultats de propagation au delà du temps d'Ehrenfest habituel, mais à ma connaissance, seulement dans des cas très particuliers où le flot φ_t préserve une structure géométrique très riche. Par exemple dans l'article [3].

Le travail qui a mené à cette note s'est nourri de nombreuses discussions avec d'estimés collègues. Je pense tout particulièrement à Gabriel Rivière de l'Université de Nantes. Il devrait en apparaître une version plus détaillée autre part. Les arguments sont élémentaires (au moins pour un lecteur versé dans l'analyse microlocale). Nous recommandons [8] au lecteur désirant s'informer.

1. Opérateurs exotiques

Afin de manipuler des phénomènes de propagation en grand temps, il est nécessaire d'introduire des classes de symboles exotiques. Celles qui nous concernent ici sont les suivantes. Si $0 \leq \delta < 1$, notons S_δ la classe des fonctions[1] $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles qu'il existe des constantes C_α satisfaisant pour $0 < h \leq h_0$,

$$|\partial^\alpha a| \leq C_\alpha h^{-\delta|\alpha|}.$$

Nous demandons que le support des fonctions a_h soit inclu dans un compact K qui ne dépend pas de h.

Nous aurons aussi besoin des classes de symboles usuelles S^m, consistant des fonctions lisses $b \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ satisfaisant des estimées de la forme

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}.$$

Ceci comprend bien sûr les symboles des opérateurs différentiels (au moins localement en x). Nous utiliserons la quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^n$ qui est donnée par la formule

$$\mathrm{Op}_h^w(a) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} a\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)\mathrm{d}\xi.$$

(identifiant un opérateur A avec son noyau $A(x,y)$). Quand nous écrirons qu'un opérateur est $\mathcal{O}(h^\infty)$, nous voudrons dire que cet opérateur est de noyau lisse, et que ce noyau est $\mathcal{O}(h^\infty)$

[1] Le lecteur remarquera que la dépendance de a en h est implicite, suivant l'usage. À vrai dire, la meilleure façon de procéder est peut-être la suivante. Les symboles sont en fait des fonctions qui dépendent de $(x, \xi, h, \tilde{h})$, satisfaisant des estimées de la forme

$$|\partial^\alpha a| \leq C_\alpha \tilde{h}^{-|\alpha|}.$$

Le paramètre $\tilde{h}$ qui est a priori indépendant de h est alors contraint de satisfaire $0 < h^\delta < \tilde{h}$. De cette façon, les développements asymptotiques sous la forme

$$a \sim \sum_{k\geq 0} h^k a_k(x,\xi,\tilde{h})$$

sont bien définis de façon unique. Dans la suite, la dépendance en h et $\tilde{h}$ sera implicite, et je compterai sur le lecteur pour déterminer le bon choix de paramètre semi-classique auxiliaire $\tilde{h}$.

dans la topologie C^∞. Nous aurons besoin du lemme (qui contient presque toute l'analyse de nos arguments)

Lemme 1. *Soient $a \in S_\delta$ et $b \in S^m$. Alors*

$$[\operatorname{Op}_h^w(a), \operatorname{Op}_h^w(b)] = \frac{h}{i} \operatorname{Op}(c) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

avec $c \in S_\delta$ satisfaisant

$$c \sim \{a, b\} + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k(a).$$

Ici, les L_k sont des opérateurs différentiels d'ordre $2k+1$ (dépendant[2] de b).

Rappelons que le crochet de Poisson est donné par

$$\{a, b\} = \partial_\xi a \partial_x b - \partial_x a \partial_\xi b.$$

Démonstration. Composer et commuter avec des opérateurs de la forme $(-\Delta + 1)^p$ ($p \in \mathbb{N}$), permet de se ramener au cas où $m \leq 0$, et de montrer qu'il suffit d'obtenir des estimées dans L^∞. La proposition B.2 de [6] s'applique alors. □

Bien sûr pour composer deux opérateurs à symboles exotiques, il faut introduire une restriction plus forte sur les valeurs de δ. Plus précisément, si $\delta + \mu < 1$ et $\delta \geq \mu$, alors pour $a \in S_\delta$, $b \in S_\mu$,

$$\operatorname{Op}_h^w(a) \operatorname{Op}_h^w(b) = \operatorname{Op}_h^w(c) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

avec $c \in S_\delta$ admettant un développement asymptotique à toute puissance de h.

Pour clore cette section, rappelons que, quand $\delta \geq 1/2$, les opérateurs dont le symbole est dans S_δ ne sont pas des opérateurs très sympathiques. En effet la meilleure borne connue, due à Boulkhemair [1] donne

Lemme 2. *Soit $a \in S_\delta$, avec $1/2 \leq \delta$. Alors pour $\epsilon > 0$,*

$$\| \operatorname{Op}_h^w(a) \|_{L^2} \leq C (h^{1-2\delta})^{n+\epsilon}.$$

2. Egorov Formel

La méthode la plus classique pour démontrer un lemme d'Egorov consiste à d'abord construire une solution formelle, puis à trouver des conditions pour que cette solution formelle puisse être resommée et fournir une bonne approximation de la vraie solution. Nous considérons dans cette partie seulement la partie formelle de l'argument. Ceci correspond d'une certaine façon à une étude précisée des formules (12), (13) et (14) dans [2]. Soit donc $p_0 \in S^m$ un symbole réel, et soit

$$\mathcal{L}a = \{a, p_0\} - \sum_{k \geq 1} h^k L_k a,$$

un opérateur agissant sur les séries formelles de fonctions à support compact de $\mathbb{R}^{2n}$. Les L_k sont supposés être des opérateurs différentiels. Considérons le problème d'évolution

$$\partial_t a_t + \mathcal{L} a_t = 0, \quad a_0 = a. \tag{$*$}$$

Partant d'une fonction a, cherchons la solution sous la forme

$$a_t = \sum_{k \geq 0} h^k a_t^k.$$

L'équation vérifiée par a_t^0 est

$$\partial_t a_t^0 + \{a_t^0, p_0\} = 0. \tag{2.1}$$

Notons donc φ_t le flot hamiltonien généré par p_0, dont le champ de vecteurs est

$$H = \partial_\xi p_0 \partial_x - \partial_x p_0 \partial_\xi.$$

L'équation (2.1) devient

$$(\partial_t - H) a_t^0 = 0,$$

[2]Si b ne dépend pas de h, les L_{2k+1} non plus.

puis

$$a_t^0 = a \circ \varphi_t.$$

Plus généralement nous obtenons

Lemme 3. *La solution de* $(*)$ *s'écrit*

$$a_t^k = \sum \int \Big[[(\varphi_{-t_1})^* L_{j_1}] \dots [(\varphi_{-t_\ell})^* L_{j_\ell}] a \Big] \circ \varphi_t.$$

La somme porte sur toutes les suites finies $j_1, \dots, j_\ell$ *d'entiers strictement positifs telles que* $j_1 + \dots + j_\ell = k$. *L'intégrale porte sur les* $0 \leq t_\ell \leq \dots \leq t_1 \leq t$.

Dans la suite, nous noterons ceci

$$a_t^k = [Q_k(t) a] \circ \varphi_t.$$

Démonstration. Il s'agit de poser

$$b_t^k = a_t^k \circ \varphi_{-t},$$

et d'observer que ceci vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t b_t^k &= (\partial_t + \{a_t^k, p_0\}) \circ \varphi_{-t} \\ &= \sum_{j=1}^k (L_j a_t^{k-j}) \circ \varphi_{-t} \\ &= \sum_{j=1}^k [(\varphi_t)_* L_j] b_t^{k-j}. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$, il vient par récurrence

$$b_t^k = \sum \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{\ell-1}} \mathrm{d}t_\ell [(\varphi_{t_1})_* L_{j_1}] \dots [(\varphi_{t_\ell})_* L_{j_\ell}] b^0.$$

(la somme courant sur toutes les suites finies $j_1, \dots, j_\ell$ telles que $j_m > 0$ et $j_1 + \dots + j_\ell = k$). Il suffit alors de revenir à a_t^k. □

Considérons désormais le cas où L_k est un opérateur différentiel d'ordre m_k, donné par

$$m_k = 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Dans ce cas, Q_k est un opérateur différentiel d'ordre

$$m'_k = \max \left\{ 2 \left(\left\lfloor \frac{j_1}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{j_\ell}{2} \right\rfloor \right) + \ell \;\middle|\; j_1 + \dots + j_\ell = k, \; j_m > 0 \right\}.$$

Lemme 4.

$$m'_k = \begin{cases} 3\ell & si\ k = 2\ell \\ 3\ell + 1 & si\ k = 2\ell + 1. \end{cases}$$

La remarque de la sixième page de [2] correspond en somme au cas où seuls les L_{2k} ne sont pas nuls.

Démonstration. Pour une suite finie $j = (j_1, \dots, j_\ell)$ d'entier strictement positifs de somme k, notons

$$S(j) = 2 \left(\left\lfloor \frac{j_1}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{j_\ell}{2} \right\rfloor \right) + \ell.$$

Observons d'abord que si deux termes de la suite, mettons $j_{\ell-1}$ et j_ℓ, sont impairs, alors pour la suite j' obtenue en posant $j'_m = j_m$, $m = 1 \dots \ell - 2$, et $j'_{\ell-1} = j_{\ell-1} + j_\ell$,

$$S(j') = S(j) + 1.$$

Ainsi, pour calculer ce maximum nous pouvons supposer que au plus un des j_m est impair. Ensuite, nous observons que l'opération consistant à remplacer un $j_m \geq 3$ par $(j_m - 2, 2)$ augmente $S(j)$ de 1. Nous pouvons donc supposer que chacun des j_m est inférieur ou égal à 2. Il reste à observer que

$$S(\underbrace{2, \dots, 2}_{\ell}) = 3\ell, \quad S(\underbrace{2, \dots, 2}_{\ell}, 1) = 3\ell + 1.$$ □

3. Invariance par difféomorphismes

Pour construire l'algèbre des pseudos sur une variété, il faut essentiellement montrer leur invariance par changement de variable. Si ψ est un difféomorphisme, posons

$$\Psi(x,\xi) = (\psi(x), \mathrm{d}_x\psi^{-\top}\xi).$$

Prouvons

Lemme 5. *Soit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme qui correspond avec l'identité hors d'un compact, et qui est isotope à l'identité dans cette classe. Pour $0 \leq \delta < 2/3$ et $a \in S_\delta$,*

$$\psi^* \operatorname{Op}_h^w(a) = \operatorname{Op}_h^w(b) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

avec $b \in S_\delta$ obéissant à un développement asymptotique

$$b \circ \Psi^{-1} \sim a + \sum_{k\geq 1} h^k M_k a.$$

Ici M_k est un opérateur différentiel d'ordre m'_k défini précédemment. Si de plus ψ préserve le volume, seules les puissances paires de h apparaissent dans le développement.

Nous noterons $a \circ \Psi = \psi^* a$. Il sera utile dans la suite de la note de se rappeler du fait classique suivant. Si ψ est un difféomorphisme affine de $\mathbb{R}^n$ préservant le volume, alors l'action de ψ sur Op_h^w est exacte, au sens où

$$\psi^* \operatorname{Op}_h^w(a) = \operatorname{Op}_h^w(\psi^* a).$$

Démonstration. Comme ψ est isotope à l'identité, écrivons $\psi = \psi_1$, de sorte que ψ_t soit un difféomorphisme à support compact pour chaque $t \in [0,1]$, dépendant de façon lisse de t, et $\psi_0 = \mathbb{1}$. Posons ensuite

$$X_t(\psi_t^{-1}(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Cherchons maintenant à étudier

$$\psi_t^* \operatorname{Op}_h^w(a).$$

Considérant ψ_t et ψ_t^{-1} comme des opérateurs de composition et X_t comme un opérateur différentiel, pour un opérateur A, l'algèbre offre

$$(\psi_t)^* A = \psi_t \circ A \circ \psi_t^{-1},$$

d'une part, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t)^{-1} = (\psi_t)^{-1} \circ X_t$$

d'autre part. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[(\psi_t)^{-1} \circ A \circ \psi_t\Big] = (\psi_t)^{-1} \circ [X_t, A] \circ \psi_t.$$

Ce préliminaire étant établi, posons

$$A_t = (\psi_t)^* \operatorname{Op}_h^w(a).$$

L'équation vérifiée par A_t est

$$\partial_t A_t + [X_t, A_t] = 0.$$

Interprétons X_t comme l'opérateur $(i/h)P$, avec $P = \operatorname{Op}_h^w(\xi(X_t) + \mathcal{O}(h))$. Les méthodes de la section précédente s'appliquent (avec le caveat que maintenant l'opérateur $\mathcal{L}$ dépend du temps, mais cela ne change pas grand chose à part le détail des formules dans le lemme 3). La seule chose qu'il faut vraiment vérifier ici est la forme annoncée du flot du symbole principal. Ce symbole est donné par

$$p_0(t) = -\xi(X_t).$$

Le flot correspondant est

$$\dot{x} = -X_t, \quad \dot{\xi} = \xi(\mathrm{d}X_t).$$

Il est clair que $x_t = \psi_t(x_0)$, et que l'évolution de ξ est linéaire. Comme ce flot est hamiltonien, il doit prendre la forme

$$\varphi_t(x,\xi) = (\psi_t(x), \mathrm{d}_x\psi_t^{-\top}\xi).$$

La section précédente nous fournit donc une série formelle

$$\sum_{k\geq 0} h^k a_t^k,$$

qui résout le problème au niveau des séries formelle. Maintenant grâce au lemme de Borel nous obtenons une fonction a_t qui est bien à support compact uniformément contrôlé en h, dans S_δ, et qui satisfait quand $h \to 0$

$$a_t \sim \sum_{k\geq 0} h^k a_t^k.$$

Nous en déduisons que

$$\partial_t \operatorname{Op}_h^w(a_t) + [X_t, \operatorname{Op}_h^w(a_t)] = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Le formule de Duhamel prédit que

$$\psi^* \operatorname{Op}_h^w(a) = \int_0^1 (\psi_t)^* \Big[\partial_t \operatorname{Op}_h^w(a_t) + [X_t, \operatorname{Op}_h^w(a_t)]\Big] \mathrm{d}t.$$

L'estimée annoncée dans le Lemme est maintenant très proche. Pour en terminer la preuve, il faut utiliser le fait que les ψ_t étant à support uniformément compact, et uniformément lisses, ils préservent uniformément les opérateurs régularisants.

Dans le cas où ψ préserve le volume, alors ψ agit de façon unitaire sur L^2. Au lieu de tirer en arrière par ψ_t, c'est à dire conjuguer par ψ_t vu comme opérateur de composition, considérons plutôt les opérateurs unitaires

$$U(t)f = (f \circ \psi_t)|\mathrm{d}_x \psi_t|^2. \tag{3.1}$$

En $t = 0$ ou $t = 1$, ceci coïncide avec la composition par ψ_t. Les relations

$$\partial_t U(t)^{-1} = U(t)^{-1} \circ \left(X_t + \frac{1}{2}\operatorname{div}(X_t)\right),$$

et

$$X_t + \frac{1}{2}\operatorname{div}(X_t) = \frac{i}{h}\operatorname{Op}_h^w(\xi(X_t))$$

montrent que l'argument ci-dessus s'adapte, mais en supprimant les puissances impaires de h à chaque étape du calcul. $\square$

Ainsi, les pseudos de symbole dans S_δ avec $0 \leq \delta < 2/3$ quantifiés en Weyl sont des objets bien définis sur les variétés[3]. Notons par Ψ l'algèbre usuelle des pseudos de symbole dans S^m, pour un certain m.

Lemme 6. *Soit M une variété compacte. L'ensemble Ψ_δ des opérateurs sur M dont le noyau est lisse $\mathcal{O}(h^\infty)$ hors de la diagonale, et tels que le noyau près de la diagonale s'écrit dans une carte comme $\operatorname{Op}_h^w(a) + \mathcal{O}(h^\infty)$, avec $a \in S_\delta$ est un Ψ-bimodule. Il est muni d'un symbole principal, qui dépend d'un choix de forme volume μ sur M,*

$$\sigma_\mu : \Psi_\delta \longrightarrow S_\delta(T^*M)/h^{2-3\delta}S_\delta(T^*M).$$

Ce symbole satisfait (pour $P \in \Psi_\delta$, $Q \in \Psi$)

$$\sigma_{f\mu}(P) = \sigma_\mu(P) + \frac{h}{2i}\{\log f, \sigma_\mu(P)\},$$
$$\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q) + \frac{h}{2i}\{\sigma(P), \sigma(Q)\}.$$

Démonstration. D'après l'argument de Moser [7], nous pouvons choisir l'atlas $\mathscr{A}$ maximal de M composé de cartes isochores, qui envoient $\mathrm{d}\mu$ sur le volume standard $\mathrm{d}x$. D'après le lemme précédent, ceci permet de définir un symbole principal comme annoncé. La formule de produit est conséquence de la formule de produit pour la quantification de Weyl.

[3] Quand $\delta \leq 1/2$, c'est un fait présenté dans de nombreuses références, mais je ne connais pas de référence pour $1/2 < \delta < 2/3$. Par ailleurs il est sûrement possible de traiter aussi le cas limite $\delta = 2/3$.

Il reste à comprendre la dépendance de σ_μ en μ. Fixons $P \in \Psi_\delta$. Considérons $\mu' = f\mu$ une autre forme volume, et $\mathscr{A}'$ l'atlas maximal correspondant. Pour chaque élément (U, κ) de cet atlas, au lieu de considérer $\kappa_* P$, nous pouvons aussi considérer $T_\kappa^{-1} P T_\kappa$, où

$$T_\kappa u = \left| \frac{\kappa^* \mathrm{d}x}{\mathrm{d}\mu} \right|^{1/2} u \circ \kappa = f^{1/2} \; u \circ \kappa.$$

Reprenant l'argument de la deuxième partie de la preuve ci-dessus, nous observons que dans ce cas,

$$T_\kappa^{-1} P T_\kappa = \mathrm{Op}_h^w(\kappa_* \sigma_\mu(P) + \mathcal{O}(h^{2-3\delta})) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Mais par ailleurs,

$$\begin{aligned} T_\kappa^{-1} P T_\kappa &= \kappa_*(f^{-1/2} P f^{1/2}) \\ &= \mathrm{Op}_h^w(\kappa_* \sigma_{f\mu}(f^{-1/2} P f^{1/2}) + \mathcal{O}(h^{2-3\delta})) + \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sigma_\mu(P) = \sigma_{f\mu}(f^{-1/2} P f^{1/2}). \qquad \square$$

4. Quantification sur les variétés

Pour démontrer un lemme d'Egorov avec cette méthode de preuve, il nous faut choisir une procédure de quantification. Or pour le moment nous avons seulement montré que les pseudos dont le symbole est exotique sont bien définis. Pour construire une quantification, nous fonctionnerons à l'économie ici.

Choisissons donc (M, μ) une variété compacte munie d'une forme volume lisse, ainsi que d'un atlas fini de cartes isochores (U_κ, κ), et d'une partition quadratique de l'unité subordonnée à cet atlas

$$\chi_\kappa, \chi'_\kappa \in C^\infty(U_\kappa), \;\; \chi_\kappa \chi'_\kappa = \chi_\kappa,$$
$$\sum \chi_\kappa^2 = 1.$$

Posons alors pour $a \in S_\delta(T^*M)$ $(0 \leq \delta < 2/3)$ ou pour $a \in S^m(T^*M)$,

$$\mathrm{Op}(a) = \sum_\kappa \chi_\kappa \kappa^* \, \mathrm{Op}_h^w(\kappa_*(\chi'_\kappa a)) \chi_\kappa.$$

Comme nous l'avons vu dans les arguments précédents, l'objet crucial est une estimation fine des commutateurs.

Lemme 7. *Sous les hypothèses précédentes, si $a \in S_\delta$ et $b \in S^m$,*

$$[\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)] = \frac{h}{i} \mathrm{Op}(c) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où

$$c \sim \{a, b\} + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k a,$$

où L_k est différentiel d'ordre au plus $3k$. De plus

$$\sigma_\mu(\mathrm{Op}(a)) = a \mod h^{2-3\delta} S_\delta(T^*M).$$

(remarque : dans ce qui suit, L_k désigne un opérateur différentiel d'ordre au plus $3k$ qui peut changer d'une ligne à l'autre).

Démonstration. Prenons $\psi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ une carte isochore (pas forcément dans l'atlas que nous avons choisi). Considérons alors

$$A = \psi_* \, \mathrm{Op}(a), \;\; B = \psi_* \, \mathrm{Op}(b).$$

Développons

$$A = \sum_\kappa \chi_\kappa \circ \psi^{-1} \; (\kappa \circ \psi^{-1})^* \, \mathrm{Op}_h^w(\kappa_*(\chi'_\kappa a)) \; \chi_\kappa \circ \psi^{-1}.$$

Le difféomorphisme $\psi_\kappa = \kappa \circ \psi^{-1}$ est seulement défini dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et isochore. Quitte à réduire le domaine de ψ, supposons que cet ouvert est très petit, et que ψ_κ y est très bien approximé par une application affine. Nous pouvons alors étendre ψ_κ en un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$, qui est égal à un difféomorphisme affine préservant le volume hors d'un compact, et isotope à celui-ci dans cette classe. Au lieu d'utiliser ψ_κ^* globalement, nous pouvons ajouter une conjugaison avec des poids jacobiens, pour préserver les puissances paires de h. Ceci permet d'étendre la définition de A en un pseudo sur $\mathbb{R}^n$.

Les choix ainsi fait ne sont pas significatif, car ils ne feront in fine que modifier l'expression des restes régularisant. Appliquons la même gymnastique à B.

Le lemme 5 et la remarque qui le suit nous assurent que

$$A = \mathrm{Op}_h^w(a') + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où $a' \in S_\delta$ admet un développement asymptotique sous la forme

$$\psi_* \left[a + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k a \right].$$

Les L_k sont différentiels d'ordre $3k$. Nous avons utilisé ici le fait que les χ_κ forment une partition quadratique de l'unité. Posons

$$Da = a + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k a$$

Cet opérateur est inversible sur les séries formelles en h à coefficients dans S_δ (car il est triangulaire supérieur). De plus son inverse prend encore la même forme. Ainsi, il est clair que

$$[\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)] = \mathrm{Op}(c) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

avec c qui satisfait un développement asymptotique. Il s'agit désormais de déterminer les propriétés annoncées de ce développement asymptotique. Il vient au niveau des développements asymptotiques

$$c \sim D^{-1} \left[\{Da, Db\} + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_{2k+1} Da \right].$$

Ici, les L_{2k+1} sont différentiels d'ordre $2k+1 \leq 3k$. Ainsi

$$D^{-1} \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_{2k+1} D$$

est un opérateur sur les séries formelles, où le coefficient de h^{2k} est différentiel d'ordre au plus $3k$. Pour l'autre terme il faut être plus prudent. Utilisant que le commutateur d'opérateurs différentiels d'ordre p, q est d'ordre $p + q - 1$, nous trouvons que

$$\{Da, Db\} = D\{a, Db\} + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k a,$$

Ainsi

$$c = \{a, b\} + \sum_{k \geq 1} h^{2k} L_k a,$$

C'était l'estimée annoncée. □

5. Egorov en temps long

Nous en venons enfin à notre problème initial. Soit P un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint elliptique d'ordre $m > 0$, de symbole principal $p_0 \geq 0$. Soit φ_t le flot hamiltonien associé à p_0. Comme P est elliptique, on peut définir des espaces de Sobolev associés à P par

$$\|u\|_{H^s} = \|(P + C)^{s/m} u\|_{L^2}.$$

(ici $C > 0$ est choisie assez grande pour que $P + C$ soit inversible. D'après l'inégalité de Gårding, n'importe quel $C > 0$ fonctionne, si h est assez petit). Ces normes sont équivalentes au normes de Sobolev usuelles, mais elles ont l'avantages d'être invariantes sous l'action du groupe de Schrödinger $e^{itP/h}$. Choisissant Op la quantification décrite dans la section précédente, posons

$$P = \mathrm{Op}(p) + \mathcal{O}(h^\infty), \quad p = p_0 + hp_1 + \dots.$$

(Ici il est sous entendu que les p_k ne dépendent pas de h. Si p n'admet pas un tel développement, le flot φ_t dépend lui même de h ; ceci n'est pas en principe un problème, mais il faudrait bien demander que toutes les estimées soient satisfaites uniformément en h).

Soit maintenant une fenêtre d'énergie compacte $I = [E_0, E_1] \subset \mathbb{R}$, de sorte que $K = p_0^{-1} I$ soit non vide, et $dp_0 \neq 0$ sur K. En particulier, K est une union de niveaux d'énergie $\{p_0 = cst\}$ lisses et compacts. Posons

$$\lambda = \limsup_{|t| \to \infty} \frac{1}{|t|} \log \sup_{z \in K} \|d_z \varphi_t\| < \infty.$$

Il est bien connu que $\lambda \leq C\|d^2 p_0\|_{L^\infty(K)}$, et

Lemme 8. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe des constantes $C_k \geq 0$ telles que pour chaque $a \in C^\infty(K)$,*

$$\|a \circ \varphi_t\|_{C^k(K)} \leq C_k e^{k(\lambda+\epsilon)|t|}.$$

Nous obtenons alors

Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes, pour $a \in C_c^\infty(\mathring{K})$, dans le régime*

$$|t| \leq \left(\frac{2}{3} - \epsilon\right) \frac{|\log h|}{\lambda},$$

il existe une famille $a_t \in C_c^\infty(\mathring{K})$ admettant un développement asymptotique

$$a_t = \left[a + \sum_{k \geq 1} h^k Q_k(t) a \right] \circ \varphi_t.$$

ici les $Q_k(t)$ sont d'ordre m_k'. Plus précisément[4]

$$a_t = a \circ \varphi_t + h \left\{ \int_0^t p_1 \circ \varphi_\tau \, \mathrm{d}\tau, a \circ \varphi_t \right\} + \dots.$$

Enfin,

$$e^{itP/h} \operatorname{Op}(a) e^{-itP/h} = \operatorname{Op}(a_t) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Démonstration. Le développement formel de a_t satisfait

$$\partial_t a_t + \mathcal{L} a_t = 0,$$

avec ici

$$\mathcal{L} = \{a_t, p_0\} - \sum_{k \geq 0} h^k M_k a_t,$$

où M_1 est d'ordre 1, puis M_{2k}, M_{2k+1} sont d'ordre au plus $3k$ quand $k \geq 1$. Plus précisément,

$$M_1 a = \{p_1, a\}.$$

Le Lemme 3 s'applique pour trouver que

$$a_t = \sum b_t^k \circ \varphi_t,$$

avec

$$b_t^k = \sum \int [\varphi_{-t_1}^* M_{j_1}] \dots [\varphi_{-t_\ell}^* M_{j_\ell}] a,$$

Ceci est un opérateur différentiel appliqué à a et des arguments similaires à ceux déjà employés montrent qu'il est d'ordre m_k'.

Comme

$$\varphi_{-t}^* M_1 a = \{p_1 \circ \varphi_{-t_1}, a\},$$

le début du développement est donné par

$$a_t = a \circ \varphi_t + h \left\{ \int_0^t p_1 \circ \varphi_\tau \, \mathrm{d}\tau, a \circ \varphi_t \right\} + \dots$$

[4] Ceci ne semble pas correspondre avec le signe de (13) dans [2]. En fait leur convention de signe pour $\{,\}$ est différente (formule (5)), mais elle n'est pas cohérente avec leur formule (4).

Utilisant l'estimée rappelée sur les dérivées du flot φ_t, nous trouvons pour chaque $\epsilon > 0$ des constantes $C_{k,m} > 0$

$$\|a_t^k\|_{C^m} \leq C_{k,m} e^{(m+m'_k)(\lambda+\epsilon)|t|}.$$

Utilisant le lemme de Borel, puis la méthode de Duhamel, et le fait que la régularité peut être mesurée avec les normes de Sobolev adaptées à P, la conclusion suit des lignes habituelles. □

Références

[1] A. Boulkhemair, « L^2 estimates for Weyl quantization », *J. Funct. Anal.* **165** (1999), nº 1, p. 173-204.

[2] A. Bouzouina & D. Robert, « Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables », *Duke Math. J.* **111** (2002), nº 2, p. 223-252.

[3] S. Dyatlov & L. Jin, « Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support », *Acta Math.* **220** (2018), nº 2, p. 297-339.

[4] J. V. Egorov, « Über kanonische Transformationen von Pseudodifferentialoperatoren », *Usp. Mat. Nauk* **24** (1969), nº 5(149), p. 235-236.

[5] J. Galkowski, Z. Huang & M. Zworski, « Classical-Quantum correspondence in Lindblad evolution », 2024, `https://arxiv.org/abs/2403.09345`.

[6] L. Hörmander, « Pseudo-differential operators of type 1,1 », *Commun. Partial Differ. Equations* **13** (1988), nº 9, p. 1085-1111.

[7] J. Moser, « On the volume elements on a manifold », *Trans. Am. Math. Soc.* **120** (1965), p. 286-294.

[8] M. Zworski, *Semiclassical analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 138, American Mathematical Society, 2012.

Yannick Guedes Bonthonneau
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications
Université Sorbonne Paris Nord, CNRS
93430 Villetaneuse
France
`bonthonneau@math.univ-paris13.fr`