

SYLVIA SERFATY

Sur l'équation de Ginzburg-Landau avec champ magnétique

Journées Équations aux dérivées partielles (1998), p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1998____A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'équation de Ginzburg-Landau avec champ magnétique

Sylvia Serfaty

Résumé

On étudie la fonctionnelle d'énergie de Ginzburg-Landau

$$J(u, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_A u|^2 + |h - h_{ex}|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (1 - |u|^2)^2,$$

qui modélise les supraconducteurs cylindriques soumis à un champ magnétique extérieur h_{ex} , dans l'asymptotique $\kappa \rightarrow \infty$. On trouve et on décrit des branches de solutions stables des équations associées. On a une estimation sur la valeur critique $H_{c_1}(\kappa)$ de h_{ex} correspondant à une "transition de phase" où des vortex (c.à.d. zéros de u) deviennent énergétiquement favorables. On obtient également dans le cas d'un disque, que pour $h_{ex} \leq H_{c_1}$ comme pour $h_{ex} \geq H_{c_1}$, il existe à la fois une solution sans vortex (unique), et des solutions à nombre de vortex arbitraires, chacune étant stable et minimisant l'énergie pour des domaines de champs précisés. En outre, les positions de leurs vortex tendent (lorsque $\kappa \rightarrow \infty$) à minimiser une fonction explicite simple, formant ainsi une sorte de réseau tel qu'on en observe physiquement.

1. Introduction.

Dans les années 50, Ginzburg et Landau ont proposé un modèle pour rendre compte du phénomène de supraconductivité. Dans ce modèle, l'énergie libre d'un supraconducteur soumis à un champ magnétique extérieur h_{ex} est donnée par

$$G(u, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\nabla}{\kappa} - iA \right) u \right|^2 + |\nabla \times A - h_{ex}|^2 + \frac{1}{2} (1 - |u|^2)^2.$$

Cette fonctionnelle, vue dans son aspect mathématique, a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années. On peut citer, entre autres, les travaux de B. Helffer, C. Bolley, J. Rubinstein, M. Schatzmann, H. Berestycki, A. Bonnet, J. Chapman, F.H. Lin, F. Bethuel et T. Rivière. Cependant, une description complète des solutions (au moins des états d'énergie minimale) en fonction du paramètre h_{ex} est encore loin d'être réalisée. Pour une présentation mathématique et physique du problème, on peut aussi se référer à [6].

1.1 Notations

Le supraconducteur est supposé être un cylindre vertical de section Ω , domaine régulier, borné et simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Le champ magnétique appliqué est également supposé vertical, uniforme et constant, d'intensité h_{ex} . Ce champ induit dans le supraconducteur un champ magnétique h donné par $h = \text{rot } A$, où A est le potentiel-vecteur associé, également vu comme une 1-forme.

La fonction complexe u , appelée "paramètre d'ordre" par les physiciens, est une pseudo fonction d'onde, qui décrit l'état local du supraconducteur. Là où $|u(x)| \simeq 1$, le matériau est dans sa "phase supraconductrice", tandis que, là où $|u(x)| \simeq 0$, il est dans sa "phase normale". Le phénomène de supraconductivité est expliqué au niveau microscopique par l'existence de "paires de Cooper" d'électrons supraconducteurs. Le module de $u(x)$ est alors la densité locale de paires de Cooper, tandis que sa phase détermine le courant supraconducteur.

La constante κ est le paramètre de Ginzburg-Landau, qui ne dépend que du matériau utilisé. Lorsque $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le supraconducteur est de type I, tandis que lorsque $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il est de type II. Les deux types de supraconducteurs ont des comportements très différents; ici on se limite au cas des supraconducteurs de type II qui ont un κ élevé.

En renormalisant les valeurs des champs, c'est-à-dire, changeant A en κA , h_{ex} en κh_{ex} , et G en $\kappa^2 G$, il est facile de voir que l'étude de G se ramène à celle de la fonctionnelle d'énergie

$$J(u, A) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_A u|^2 + |h - h_{ex}|^2 - h_{ex}^2 + \frac{\kappa^2}{2} (1 - |u|^2)^2, \quad (1.1)$$

avec la notation $\nabla_A = \nabla - iA$ pour la dérivation covariante.

Cette théorie entre dans le cadre des théories de jauge abéliennes (jauge $U(1)$). Ceci implique que l'énergie, et les quantités physiquement observables sont invariantes par les transformations de jauge

$$\begin{cases} u \mapsto e^{i\phi} u & \text{pour } \phi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}) \\ A \mapsto A + d\phi. \end{cases} \quad (1.2)$$

Afin de geler cette invariance, on impose la jauge dite de Coulomb

$$\begin{cases} \text{div } A = 0 & \text{dans } \Omega \\ A \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Comme Ω est supposé simplement connexe, cette condition entraîne qu'il existe $\xi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$A = \nabla^\perp \xi = -\xi_{x_2} dx_1 + \xi_{x_1} dx_2, \quad (1.4)$$

et donc $h = \Delta \xi$.

Les états stationnaires du système sont les points critiques de J , qui sont les solutions des équations de Ginzburg-Landau

$$(G.L.) \begin{cases} -\nabla_A^2 u = \kappa^2 u (1 - |u|^2) \\ - * dh = (iu, d_A u). \end{cases}$$

Ici, $*$ désigne la transformation de Hodge pour les 1-formes. Les conditions de bord naturelles associées sont

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.2 Propriétés physiques des supraconducteurs de type-II

On n'indique ici que les principaux aspects de la physique des supraconducteurs qui sont importants dans cette étude. Pour plus de détails, on pourra se reporter aux nombreuses références physiques, telles que [8], [15] et [14].

Les matériaux supraconducteurs de type-II portés à basse température (au-dessous d'une température critique T_c) ont essentiellement deux propriétés physiques caractéristiques. La première est qu'ils ont alors une résistivité nulle (donc aucune perte d'énergie); ainsi on a pu y observer des courants permanents pendant des semaines entières. La seconde propriété, à laquelle on s'intéresse plus particulièrement ici, est leur comportement en présence d'un champ magnétique extérieur h_{ex} .

Pour les faibles valeurs de h_{ex} , le champ magnétique ne pénètre pas le supraconducteur qui est partout dans la phase supraconductrice. On dit que le supraconducteur repousse le champ magnétique par création d'un contre-champ induit par des courants supraconducteurs. Cet état est appelé l'état Meissner. u est environ égal à une constante de module 1, tandis que le champ magnétique induit satisfait l'équation

$$\begin{cases} -\Delta h + h = 0 & \text{dans } \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour les grandes valeurs de h_{ex} , au contraire, la supraconductivité est détruite, le supraconducteur est partout dans la phase normale et le champ magnétique induit est partout égal au champ extérieur. Pour des valeurs intermédiaires du champ appliqué, grossièrement entre deux valeurs critiques H_{c_1} et H_{c_2} , il existe un état intermédiaire, dit phase mixte. Cet état, propre aux supraconducteurs de type II, est caractérisé par la présence de vortex (ou tourbillons) qui sont des filaments verticaux de petit rayon ($\simeq \kappa^{-1}$) aux centres desquels le matériau est en phase normale, tandis qu'il reste en phase supraconductrice autour de ces régions. Chacun de ces vortex est entouré par un courant supraconducteur et porte un flux de champ magnétique quantifié. Mathématiquement, dans la section Ω , un vortex est un disque de rayon $\simeq \kappa^{-1}$ au centre duquel u s'annule. La charge topologique (ou degré) du vortex est le degré topologique de l'application à valeurs $S^1, \frac{u}{|u|}$, définie sur un petit cercle autour du zéro. Elle est en général égale à un. Le champ magnétique est maximal dans les vortex. Plus précisément, appelant a_i les centres des vortex, le champ induit vérifie approximativement l'équation

$$\begin{cases} -\Delta h + h = 2\pi \sum_i \delta_{a_i} & \text{dans } \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

équation introduite par London sur des bases phénoménologiques, et que l'on peut dériver formellement des équations de Ginzburg-Landau. Plus le champ appliqué

est grand, et plus les vortex sont nombreux. Cependant, ils se repoussent les uns les autres. La combinaison de ces deux effets régit leur nombre et leurs positions. Lorsqu'ils sont nombreux, ils tendent à s'organiser en réseaux triangulaires (appelés réseaux d'Abrikosov)

Le but de ce travail était d'étudier les configurations à vortex, et d'analyser la transition de phase autour de H_{c_1} , c'est-à-dire décrire le comportement des solutions minimales autour de H_{c_1} , en prenant $\varepsilon = \frac{1}{\kappa}$ comme paramètre, dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$. La valeur de H_{c_1} est définie à l'aide d'un argument énergétique: c'est la valeur de h_{ex} pour laquelle l'énergie de la solution Meissner devient égale à celle d'une solution à un vortex, c'est-à-dire la valeur du champ pour laquelle la présence de vortex devient énergétiquement favorable.

1.3 Lien avec l'étude de Bethuel-Brezis-Hélein

Dans [4], F. Bethuel, H. Brezis, and F. Hélein ont étudié une énergie simplifiée (qui a suscité beaucoup de travaux)

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2, \quad (1.7)$$

correspondant à annuler A , et supprimer les champs magnétiques. Il faut alors un mécanisme supplémentaire pour créer des vortex. Dans ce but, ils ont imposé une condition de Dirichlet au bord $u = g$ sur $\partial\Omega$, où g est une application à valeurs S^1 de degré $d > 0$.

À cause du terme de pénalisation $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2$, et de $\varepsilon \rightarrow 0$, $|u|$ doit tendre vers 1 presque partout. Mais, à cause de son degré au bord $d > 0$, u doit s'annuler d fois (avec multiplicité) dans Ω . Ainsi, ils ont forcé artificiellement la présence de vortex. Ils ont obtenu une description très précise de ces vortex, de leur emplacement, et des limites des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. L'élément le plus important pour notre étude est le fait que l'énergie minimale $F(u_\varepsilon)$ diverge en $\pi d |\text{Log } \varepsilon|$, qu'il y a d vortex de degré un, et que chacun d'entre eux coûte approximativement $\pi |\text{Log } \varepsilon|$. Dans notre travail, qui traite du véritable modèle physique, la principale différence est que les vortex sont dus au champ magnétique extérieur et non à la condition de bord. Cependant, comme on l'explique dans la suite, la fonctionnelle F apparaît très naturellement dans une décomposition de J , ce qui nous a conduit à faire grand usage de l'analyse développée dans [4], et poursuivie dans [2].

2. Énoncé des principaux résultats.

La principale difficulté technique, comparé à [4], est qu'on ne dispose pas d'une borne a priori sur le nombre de vortex dans les solutions minimisantes, ni sur leurs degrés. C'est pourquoi on se limite aux configurations pour lesquelles il y a une borne sur le nombre de vortex. Plus précisément, fixant $\mathcal{M} > 0$, on étudie et on minimise J sur le domaine ouvert

$$D = \left\{ (u, A) \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) / F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 - |u|^2)^2 < \mathcal{M} |\text{Log } \varepsilon| \right\}.$$

Grâce à l'analyse de [4], on sait que ce domaine correspond, schématiquement, aux configurations qui ont moins de $\frac{M}{\pi}$ vortex. De plus, si \mathcal{M} est assez grand, pour $h_{ex} \leq H_{c_1}$ les solutions que l'on trouve sont également des minima globaux. Ceci est assez délicat à prouver rigoureusement, mais nous disposons à présent d'une preuve de ce fait dans un travail en préparation avec E. Sandier ([13]). Les autres solutions données par le théorème 1 sont aussi très vraisemblablement des minima globaux, pour les domaines de champs indiqués.

On a à présent besoin de quelques résultats et définitions préliminaires. Mathématiquement, les vortex de taille $\delta > 0$ d'une fonction u sont, lorsqu'ils sont bien définis, des points a_i affectés des degrés d_i , tels que u ait un zéro dans $B(a_i, \delta)$, $|u| \geq \frac{3}{4}$ dans $\Omega \setminus \cup_i B(a_i, \delta)$, et $d_i = \deg(u, \partial B(a_i, \delta))$. Ainsi, une configuration "sans vortex" est n'importe quel (u, A) tel que $|u| \geq \frac{3}{4}$ sur Ω . En général, dans notre étude, δ est de l'ordre de ε ou de ε^μ , avec $0 < \mu < 1$.

Lorsqu'on cherche l'énergie minimale sur les configurations sans vortex, on aboutit à l'équation de London (1.5) sur le champ magnétique. Comme $h = \Delta \xi$ (cf. (I.4)), on introduit donc naturellement ξ_0 , solution unique de

$$\begin{cases} -\Delta^2 \xi_0 + \Delta \xi_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta \xi_0 = 1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

ξ_0 est une fonction C^∞ et négative sur Ω . On définit alors $J_0 = J(1, h_{ex} \nabla^\perp \xi_0)$. On peut démontrer que J_0 est l'énergie minimale parmi les configurations sans vortex, à un $o(1)$ près.

Dans la suite, C désigne toujours une constante strictement positive, dont la valeur peut changer suivant les énoncés. Le premier théorème décrit la bifurcation autour de H_{c_1} , et l'apparition de vortex dans les solutions minimisantes.

Théorème 1 (voir [10]) 1. *Cas général: Il existe $k_2^\varepsilon = O_\varepsilon(1)$ et $k_1 = \frac{1}{2 \max |\xi_0|}$, tels que*

$$H_{c_1} = k_1 |\text{Log } \varepsilon| + k_2^\varepsilon,$$

et ε_0 tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait les résultats suivants: -si $h_{ex} \leq H_{c_1}$, une solution de (G.L.) minimisante dans D existe, et vérifie $\frac{3}{4} \leq |u| \leq 1$; -si $H_{c_1} \leq h_{ex} \leq H_{c_1} + O_\varepsilon(1)$, une solution de (G.L.) minimisante dans D existe, elle a un nombre borné strictement positif de vortex a_i^ε de degré un, tels que $\text{dist}(a_i^\varepsilon, \Lambda) \rightarrow 0$ où

$$\Lambda = \{x \in \Omega / |\xi_0(x)| = \max |\xi_0|\},$$

et $\exists C > 0$, tel que $\text{dist}(a_i^\varepsilon, a_j^\varepsilon) \geq C$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire que les a_i tendent vers des points distincts $\in \Lambda$.

2. *Cas $\Omega = B(0, R)$ (dans ce cas $\Lambda = \{0\}$): Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, (u, A) minimisant J dans \bar{D} est solution de (G.L.) et, si $h_{ex} = k_1(|\text{Log } \varepsilon| + \delta_0 |\text{Log } |\text{Log } \varepsilon||) + O_\varepsilon(1)$, $1 \leq n-1 < \delta_0 < n < \frac{M}{\pi}$ ($n \in \mathbb{N}$), u a n vortex a_i^ε de degré un tels que $|a_i^\varepsilon| \leq \frac{C}{\sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}}$, $\forall i$. En outre, si $n \geq 2$, $|a_i^\varepsilon - a_j^\varepsilon| \geq \frac{C}{\sqrt{|\text{Log } \varepsilon|}}$, $\forall i \neq j$.*

j , et si l'on pose $\tilde{a}_i = a_i^\varepsilon (k_1 |\text{Log } \varepsilon|)^{\frac{1}{2}}$, la configuration des \tilde{a}_i converge vers un minimiseur de w lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, où w est défini par:

$$w(x_1, \dots, x_n) = -\pi \sum_{i \neq j} \text{Log } |x_i - x_j| + \pi \xi_0''(0) \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Ce théorème établit tout d'abord que $H_{c_1} \simeq k_1 \frac{\text{Log } \kappa}{\kappa}$ (en supprimant notre renormalisation), avec un $k_1 > \frac{1}{2}$, ce qui est parfaitement en accord avec les prédictions théoriques des physiciens. En outre, il montre qu'à $h_{ex} = H_{c_1}$, les vortex deviennent énergétiquement favorables, et apparaissent dans les solutions près de l'ensemble Λ (qui ne dépend que du domaine Ω). Dans le cas d'un disque ou d'un domaine convexe, on peut montrer que Λ est réduit à un seul point; alors, un seul vortex apparaît à H_{c_1} . Dans le cas plus simple du disque, si l'on appelle H_n la valeur de h_{ex} pour laquelle il devient favorable d'avoir un n -ème vortex, on a

$$H_n \simeq k_1 (|\text{Log } \varepsilon| + (n-1) |\text{Log } |\text{Log } \varepsilon||).$$

En outre, on a une caractérisation des endroits où ces vortex apparaissent. Leurs distances au centre, ainsi que leurs distances mutuelles sont en $\frac{C}{\sqrt{h_{ex}}}$, et leurs positions sont régies par l'énergie renormalisée w . Ceci est dû à une compétition entre la répulsion coulombienne entre vortex mise en évidence dans [4], et l'effet de confinement dû au champ magnétique extérieur et à ξ_0 (qui agit comme un potentiel). Signalons que la minimisation de w a été étudiée dans [9]. Il semble que les configurations minimales soient des polygones réguliers ou des "étoiles" régulières centrés à l'origine pour les petites valeurs de n ($n \leq 10$), et forment des sortes de réseaux concentrés autour du centre pour les valeurs de n supérieures. Ceci serait d'autant plus intéressant que de telles configurations ont été observées par les physiciens dans les superfluides (qui obéissent à un modèle tout à fait similaire). Pour des images, on peut se référer à [15] et à la figure 1. Selon nous, cela constitue la naissance du réseau d'Abrikosov.

La question naturelle qui se pose alors est de savoir si ces branches de solutions à n vortex peuvent se prolonger pour des valeurs inférieures et supérieures de h_{ex} . Une réponse affirmative est donnée dans [11]. Le premier théorème concerne plus particulièrement les solutions Meissner (=sans vortex).

Théorème 2 (voir [11]) *Il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $h_{ex} \leq C\varepsilon^{-\alpha}$, une solution de (G.L.), stable, sans vortex, et minimisante parmi les configurations sans vortex, existe et est unique.*

Le second résultat concerne les solutions à n vortex ($n \in \mathbb{N}^*$).

Théorème 3 (voir [11]) *Supposons que $\Omega = B(0, R)$ et que h_{ex} est n'importe quelle fonction de ε tendant vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, avec $h_{ex} \leq C\varepsilon^{-\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($\pi n < \mathcal{M}$), (G.L.) admet une solution stable (u, A) ayant exactement n vortex de degré un $a_i^\varepsilon \in B\left(0, \frac{C}{\sqrt{h_{ex}}}\right)$. Si $n \geq 2$ et $\tilde{a}_i = a_i^\varepsilon \sqrt{h_{ex}}$, on a $|\tilde{a}_i - \tilde{a}_j| \geq C > 0, \forall i \neq j$, et la configuration des \tilde{a}_i converge vers un minimiseur de w .*

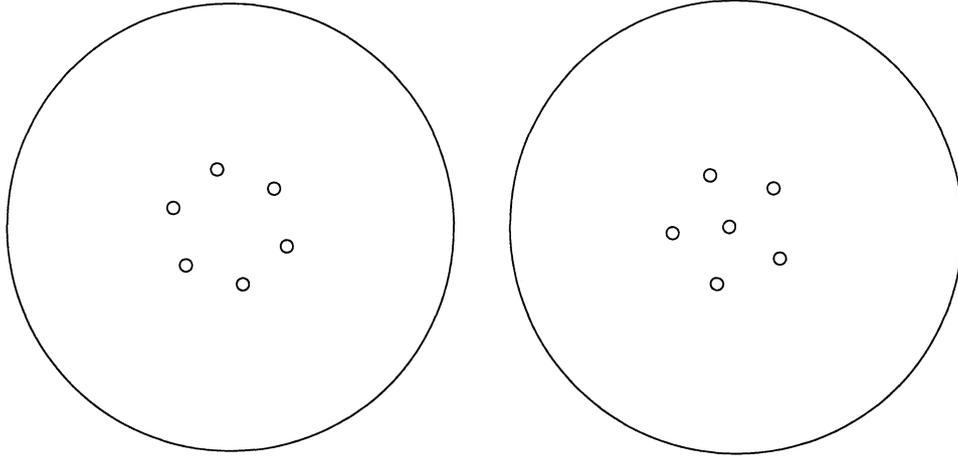


FIG. 1: Quelques configurations observées

Ainsi, nos branches de solutions, bien qu'elles cessent d'être minimisantes dans D , **existent** (avec unicité pour la solution Meissner), et sont **stables** pour un grand domaine de h_{ex} : de $h_{ex} \rightarrow +\infty$ à $h_{ex} \leq C\varepsilon^{-\alpha}$, et pour un nombre de vortex **arbitraire**.

La valeur de h_{ex} au-dessous de laquelle toute solution à vortex est instable est habituellement appelée champ de superfroid (subcooling) H_{sc} , et la valeur de h_{ex} au-dessus de laquelle la solution Meissner cesse d'être stable est appelée champ de superchauffe (superheating) H_{sh} . On obtient ainsi que $H_{sh} \geq C\varepsilon^{-\alpha}$ (en fait $H_{sh} \simeq \frac{C}{\varepsilon}$, voir [3]). On obtient aussi que $H_{sc} = O(1)$, ce qui avait déjà été prouvé par Q. Du et F.H. Lin dans [7]. De plus, on a des informations précises sur ces branches de solutions: les vortex sont de degré un, leurs distances caractéristiques au centre ainsi que leurs distances mutuelles sont toujours en $\frac{C}{\sqrt{h_{ex}}}$, et leurs positions sont toujours régies par la fonction w . La figure 2 est une esquisse de ces branches de solutions, où $J + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h_{ex}^2$ est représenté à la place de J .

Les supraconducteurs suivent donc un cycle d'hystérésis: si l'on part d'un état Meissner et que l'on augmente h_{ex} , des vortex apparaissent non pas à H_{c1} mais à $h_{ex} \simeq H_{sh} \simeq \frac{C}{\varepsilon}$ (car la solution Meissner est stable jusque là); tandis que, si l'on part d'un état à vortex et que l'on diminue h_{ex} , les vortex ne disparaissent qu'à $h_{ex} \simeq H_{sc} = O(1)$ (car les branches de solutions à vortex sont stables jusque là).

Le dernier problème était de tenter d'étudier ce qui se passe dans le premier cas évoqué. Pour $h_{ex} \leq H_{sh}$, la solution Meissner étant stable, il y a une barrière d'énergie à franchir entre elle et les solutions à vortex. On souhaitait évaluer (de façon heuristique) la hauteur de cette barrière en fonction de h_{ex} . On l'a fait en calculant $\phi(r) = \inf J$, l' \inf étant pris sur toutes les configurations qui ont exactement un vortex de degré un à une distance r du bord, pour $h_{ex} \leq C\varepsilon^{-\alpha}$.

Théorème 4 (voir [11]) *La hauteur de la barrière est $\pi|\text{Log } \varepsilon| - \pi \text{Log } h_{ex} + O(1)$. ϕ atteint son maximum en $r_{max} \leq \frac{C}{h_{ex}}$.*

Ici, il est intéressant de constater que la hauteur de la barrière décroît lorsque h_{ex} croît, de sorte que, pour une valeur inférieure à H_{sh} , cette barrière devient très petite.

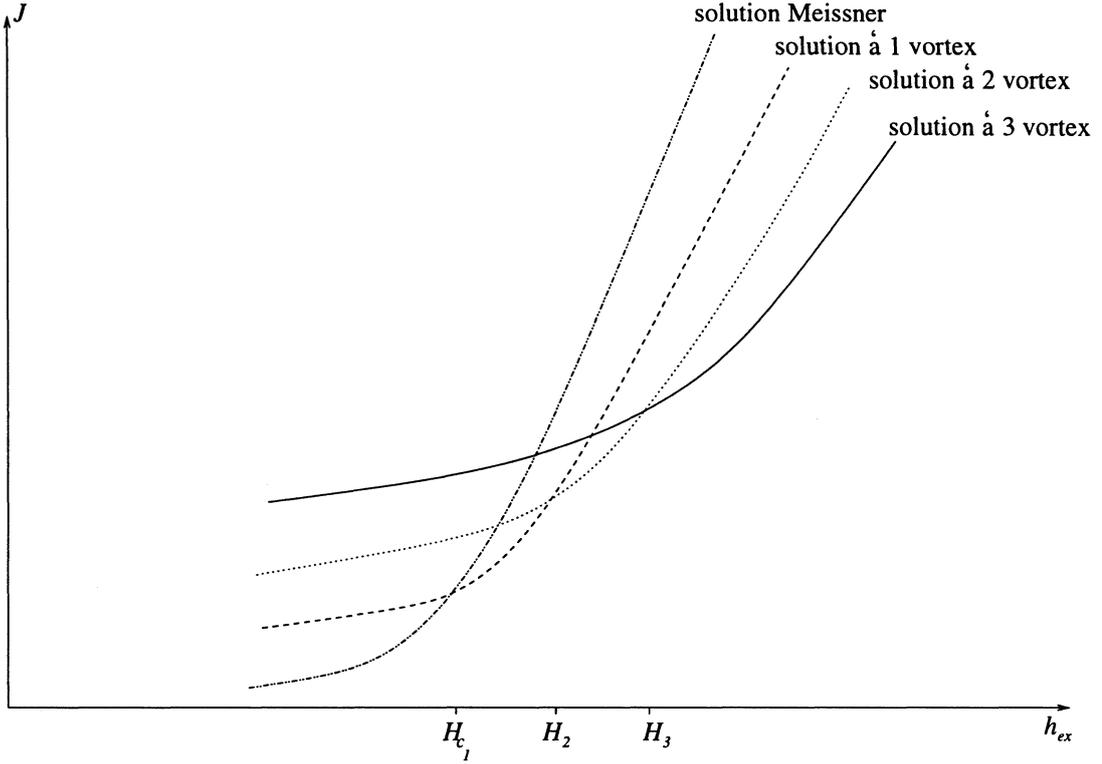


FIG. 2: Les branches de solutions

Alors, la solution Meissner peut devenir physiquement instable, par effet tunnel, ou agitation thermique. En outre, grâce au théorème du col, on sait qu'il existe une solution lemme du col de (G.L.) entre la solution stable sans vortex, et la solution à un vortex. On peut ainsi conjecturer à l'aide de ce théorème 4, que cette solution a un vortex à distance $r_{max} \leq \frac{C}{h_{ex}}$ du bord. La figure 3 décrit schématiquement la forme de ϕ pour des valeurs croissantes de h_{ex} .

Mentionnons un dernier résultat: on obtient dans [10] la convergence (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) de la famille de solutions donnée par le théorème 1, pour $h_{ex} = H_{c1}$, vers la solution de l'équation de London (1.6) pour le champ magnétique.

3. Résumé des preuves.

3.1 Théorème 1

-*Étape 1*: On considère (\tilde{u}, \tilde{A}) qui réalise le minimum de J dans \overline{D} , où on rappelle que

$$D = \{(u, A) / F(u) \leq \mathcal{M} |\text{Log } \varepsilon|\}.$$

Il est facile de voir que ce minimum est atteint, mais difficile de montrer qu'il donne une solution de (G.L.).

-*Étape 2*: On change (\tilde{u}, \tilde{A}) en $(u, A) \in \overline{D}$ tel que $|u| \leq 1$ (ceci diminue environ l'énergie), et qui soit minimisant relativement à A . Ainsi,

$$J(u, A) \leq J(\tilde{u}, \tilde{A}) + o_\varepsilon(1), \tag{3.1}$$

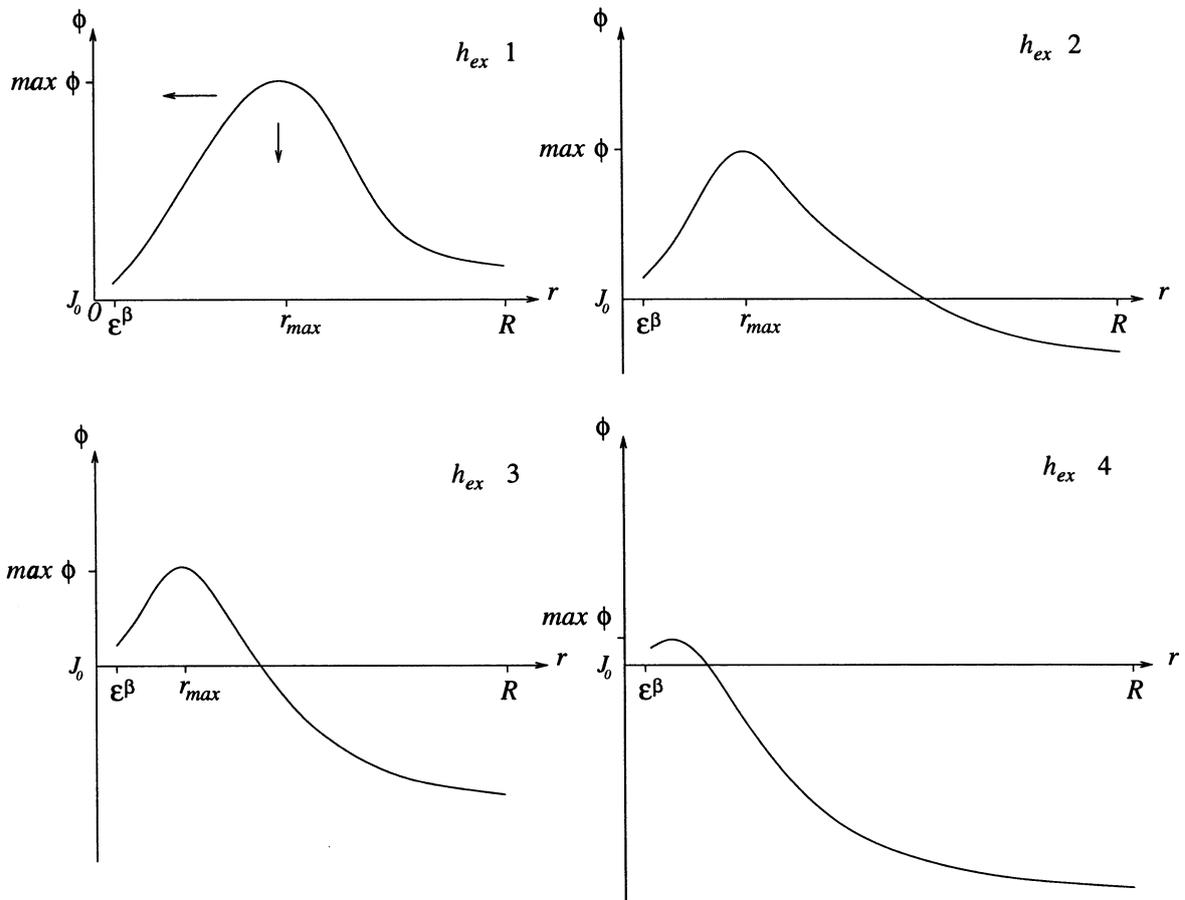


FIG. 3: *Forme de ϕ*

et la seconde équation de Ginzburg-Landau sur le champ magnétique est vérifiée. On a donc des estimées et de la régularité sur A .

-*Étape 3*: La difficulté est alors que, comme (u, A) n'est pas a priori solution de (G.L.), on ne dispose d'aucune estimation de régularité sur u , et ses vortex ne sont pas bien définis. En revanche, pour les solutions de (G.L.), on a la borne $|\nabla u| \leq \frac{C}{\varepsilon}$, qui est suffisante pour permettre de définir des vortex de u , de la même façon que dans [4]. Pour remédier à ce problème, on effectue une régularisation de la fonction u , de la même manière que dans [2], en la changeant en u^γ qui réalise

$$\inf_{v \in H^1(\Omega, \mathbb{C})} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (1 - |v|^2)^2 + \int_{\Omega} \frac{|v - u|^2}{2\varepsilon^{2\gamma}}, \quad (0 < \gamma < 1). \quad (3.2)$$

Comme elle est solution d'une certaine EDP, u^γ a des vortex bien définis (a_i, d_i) de taille $\rho \simeq \varepsilon^\mu$. De plus, elle est très proche de u , car c'est une régularisée parabolique de u à l'échelle ε^γ . Par conséquent, son comportement vis-à-vis de J est pratiquement le même que celui de u . Cependant, cette régularisation est la cause de beaucoup des difficultés techniques qui se présentent dans les preuves, et de la limitation à $h_{ex} \leq C\varepsilon^{-\alpha}$.

-*Étape 4*: On prouve, en développant les carrés, que J se décompose en deux parties:

$$J(u, A) = F(u) + V(\xi) + o_\varepsilon(1),$$

où ξ est tel que $A = \nabla^\perp \xi$, $F(u)$ est la fonctionnelle étudiée dans [4] et donnée par (I.7), et

$$V(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \xi|^2 + |\Delta \xi|^2 - h_{ex} \int_{\Omega} \Delta \xi + 2\pi \sum_i d_i \xi(a_i).$$

Cette décomposition est intéressante parce que F ne dépend que de u , tandis que V ne dépend que de ξ et des (a_i, d_i) , vortex de u^γ .

-*Étape 5*: On décompose ξ en $\xi = h_{ex} \xi_0 + \zeta$. Alors, vu la définition de ξ_0 (cf. (II.1)),

$$J(u, A) = J_0 + F(u) + 2\pi h_{ex} \sum_i d_i \xi_0(a_i) + \tilde{V}(\zeta) + o(1), \quad (3.3)$$

où

$$\tilde{V}(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 + |\Delta \zeta|^2 + 2\pi \sum_i d_i \zeta(a_i).$$

Le minimum de \tilde{V} (les a_i étant donnés) reste borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donc \tilde{V} n'a pas d'importance pour la suite, puisqu'on cherche des estimations à $O(1)$ près.

-*Étape 6*: En suivant une méthode très proche de celle de [4], on obtient que

$$F(u) \geq \pi \sum_i d_i^2 |\text{Log } \rho| + \pi \sum_i |d_i| \left| \text{Log } \frac{\varepsilon}{\rho} \right| + O(1), \quad (3.4)$$

ce qui signifie que chaque vortex "coûte" à peu près $\pi |d_i| |\text{Log } \varepsilon|$ à "fabriquer". Comme (u, A) est presque minimal dans \overline{D} , en le comparant à une configuration sans vortex

$$J(u, A) \leq J_0 + o(1).$$

Ainsi, avec (III.3),

$$F(u) + 2\pi h_{ex} \sum_i d_i \xi_0(a_i) \leq O(1). \quad (3.5)$$

Comme ξ_0 est négatif, chaque vortex fait gagner par effet magnétique une énergie $2\pi h_{ex} d_i \xi_0(a_i)$, si $d_i \geq 0$; tandis qu'il coûte environ $\pi d_i |\text{Log } \varepsilon|$ à fabriquer. L'équilibre est donc atteint, et les vortex deviennent favorables si $\xi_0(a_i) = \min \xi_0$, c'est-à-dire $a_i \in \Lambda$, et

$$h_{ex} = \frac{|\text{Log } \varepsilon|}{2 \max |\xi_0|} + O(1) = H_{c_1}. \quad (3.6)$$

Les vortex de degré $|d_i| \geq 2$ sont trop coûteux à cause du terme d_i^2 dans la minoration (III.4) de F . On obtient donc que tous les d_i sont égaux à un.

-*Étape 7*: Il est alors facile de construire une configuration qui a exactement ces caractéristiques pour $h_{ex} \geq H_{c_1}$, c'est-à-dire un vortex de degré un sur Λ . En l'utilisant comme application de comparaison, on obtient que le (u, A) minimal a exactement les mêmes caractéristiques.

-*Étape 8*: On montre que $\min_{\partial D} J > \min_{\mathring{D}} J$, et donc $(\tilde{u}, \tilde{A}) \in \mathring{D}$, et c'est une solution stable de (G.L.), en tant que minimum local. Ainsi, ses vortex sont bien définis. Les calculs précédents restent valables pour eux, et ils vérifient les propriétés annoncées.

-*Étape 9*: Pour la seconde partie du théorème 1, on a besoin d'améliorer la minoration de F en

$$F(u) \geq \pi \sum_i |d_i| |\text{Log } \varepsilon| + W(a_1, \dots, a_l) + O(1),$$

où W est une énergie renormalisée très similaire à celle de [4]. Sa partie principale est

$$-\pi \sum_{i \neq j} \text{Log } |a_i - a_j|.$$

Cela signifie que les vortex se repoussent. C'est pourquoi ils ne peuvent pas tendre vers les mêmes points de Λ , pour $h_{ex} = H_{c_1}$. Lorsque $h_{ex} \geq H_{c_1}$, il y a une compétition entre cette répulsion et le terme $2\pi h_{ex} \sum_i d_i \xi_0(a_i)$. En minimisant la somme de ces deux termes, on aboutit au fait que $|a_i| \leq \frac{C}{\sqrt{h_{ex}}}$, que l'équilibre est atteint pour n vortex lorsque $h_{ex} = H_n$, et que w est minimisé. On montre que l'expression de l'énergie minimale est alors, pour $h_{ex} = H_n$,

$$J(u, A) = J_0 + \pi n \left(|\text{Log } \varepsilon| - \frac{h_{ex}}{k_1} \right) + \frac{\pi}{2} (n^2 - n) \text{Log } h_{ex} + \inf w + Q_n + o(1), \quad (3.7)$$

où Q_n est une constante qui ne dépend que de n .

3.2 Théorème 3

L'idée de la preuve est, essentiellement, de remplacer le domaine D par

$$U = \left\{ (u, A) / \pi n |\text{Log } \varepsilon| \leq F(u) \leq \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) |\text{Log } \varepsilon| \right\}.$$

U peut être vu comme le domaine des configurations qui ont n vortex. On construit sans difficulté une configuration-test qui a n vortex à distance $\frac{C}{\sqrt{h_{ex}}}$ du centre, et une énergie donnée par l'expression (III.7). La principale difficulté est de prouver que $\min_{\bar{U}} J$ est atteint. Ceci s'effectue en considérant une suite minimisante, définissant "ses" vortex (comme les vortex des fonctions régularisées), et utilisant le fait que la convergence faible H^1 préserve les vortex. Ainsi, la fonction limite u doit encore avoir n vortex et donc appartenir à \bar{U} . Puis, comme pour le théorème 1, on prouve que cette configuration minimisante ne peut pas appartenir à ∂U (car le terme $\frac{1}{2}\pi |\text{Log } \varepsilon|$ serait en excès dans l'énergie), et c'est donc une solution localement minimisante à n vortex.

La même méthode s'applique également à la preuve de l'existence de la solution sans vortex dans le théorème 2, tandis que l'idée de la preuve de l'unicité est un argument de convexité.

Références

- [1] A. Abrikosov, On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Type, *Soviet Phys. JETP* 5, (1957), 1174-1182.
- [2] L. Almeida and F. Bethuel, Topological Methods for the Ginzburg-Landau Equations, *J. Math. Pures Appl.*, 77, (1998), 1-49.
- [3] H. Berestycki, A. Bonnet and J. Chapman, A Semi-Elliptic System Arising in the Theory of Type-II Superconductivity, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1, n° 3, (1994), 1-21.
- [4] F. Bethuel, H. Brezis and F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, (1994).
- [5] F. Bethuel and T. Rivière, Vortices for a Variational Problem Related to Superconductivity, *Annales IHP, Analyse non linéaire*, 12, (1995), 243-303.
- [6] F. Bethuel et T. Rivière, Vorticité dans les modèles de Ginzburg-Landau pour la supraconductivité, *Séminaire E.D.P de l'École Polytechnique*, exposé XVI, (1994).
- [7] F.H. Lin and Q. Du, Ginzburg-Landau Vortices: Dynamics, Pinning, and Hysteresis, *Siam J. Math. Anal.*, 28, (1997), 1265-1293.
- [8] P.G. DeGennes, *Superconductivity of Metal and Alloys*, Benjamin, New York and Amsterdam, 1966.

- [9] S. Gueron and I. Shafrir, On a Discrete Variational Problem Involving Interacting Particles, preprint.
- [10] S. Serfaty, Local Minimizers for the Ginzburg-Landau Energy near Critical Magnetic Field, prépublication Université de Paris-Sud, 97.
- [11] S. Serfaty, Stable Configurations in Superconductivity: Uniqueness, Multiplicity and Vortex-Nucleation, prépublication Université de Paris-Sud, 98.
- [12] S. Serfaty, Solutions stables de l'équation de Ginzburg-Landau en présence de champ magnétique, *Note aux C.R.A.S., tome 326 n°8, série I*, (1998), 955.
- [13] E. Sandier et S. Serfaty, en préparation.
- [14] D. Saint-James, G. Sarma and E.J. Thomas, *Type-II Superconductivity*, Pergamon Press, (1969).
- [15] D. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity, 2d edition*, Adam Hilger Ltd., Bristol, 1986.

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET EDP, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, 91405 ORSAY, FRANCE.
`serfaty@clipper.ens.fr`