JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHRISTOPHE CHEVERRY

Propagation d'oscillations près d'un point diffractif

Journées Équations aux dérivées partielles (1994), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1994____A3_0>

PROPAGATION D'OSCILLATIONS PRES D'UN POINT DIFFRACTIF

C . Cheverry

Institut de Recherche Mathematique de Rennes
Campus de Beaulieu. Av du Gl Leclerc
35 042 RENNES cedex

0 . Résumé

Soit M la variété à bord $[0,\infty[\times\mathbb{R}^n$ et m un point du bord de M. On regarde au voisinage de m un système mixte noté $(\mathcal{S})$ associé à un opérateur différentiel $P(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)$ strictement hyperbolique du second ordre. La condition initiale est choisie de type Dirichlet. La donnée au bord $\varepsilon\,U_0\big(z,\frac{\varphi_0(z)}{\varepsilon}\big)$ oscille avec une phase $\varphi_0(z)$ de classe C^2 et dont le gradient en m pointe dans la direction $\tilde\eta$ d'un point diffractif non dégénéré $(m;\tilde\eta)$ associé au symbole principal $p(x,z\,;\,\lambda,\eta)$.

A l'aide d'un opérateur de type Fourier-Airy, Melrose [3]-[4] construit au voisinage du point $(m;\tilde\eta)$ de $T^*(\partial M)$ une paramétrice microlocale pour le système $(\mathcal{S})$. Il devient alors possible d'analyser avec précision la propagation des singularités près de tels points diffractifs non dégénérés. Un résumé sur la question est présenté dans le chapitre 24 de Hörmander [2], chapitre dans lequel est aussi considéré le cas de points de type "glancing" plus généraux.

Le problème de la localisation du front d'onde C^∞ dans le cas semi-linéaire est un sujet d'actualité. Ce thème se trouve par exemple traité dans un article récent de Zworski [6] ainsi que dans les nombreuses références qui y sont citées. Notre but est d'aborder ce même problème semilinéaire (avec toutefois une nonlinéarité astreinte à une condition de souslinéarité) du point de vue des oscillations. Il s'agit en fait de décrire comment l'onde oscillante monophase $\varepsilon\,U_0\big(z,\frac{\varphi_0(z)}{\varepsilon}\big)$ se propage. Pour des points en lesquels $\nabla_z\varphi_0(z)$ pointe dans une direction hyperbolique, ce programme est mené à son terme dans la thèse de Chikhi [1].

On étend ici le champ d'investigation au cas de points de type diffractif non dégénéré, c'est à dire lorsque le vecteur $\nabla_z \varphi_0(m)$ vaut $\tilde{\eta}$. Cette hypothèse de polarisation $\left(\nabla_z \varphi_0(m) = \tilde{\eta} \right)$ laisse une grande liberté quant au choix de $\varphi_0(z)$. Il faut en fait être plus précis et distinguer selon le comportement de $\varphi_0(z)$ sur tout un voisinage de m. La fonction $\varphi_0(z)$ peut s'obtenir comme la restriction à la frontière ∂M d'une phase $\varphi(x,z)$ solution dans M de l'équation eiconale ou encore vérifier une condition de transversalité qui est explicitée en $(1.12)-(1.13)$. Ce qui nous interesse ici, c'est l'étude de la propagation des oscillations associées à une phase $\varphi_0(z)$ qui satisfait l'une ou l'autre de ces deux conditions distinctes.

1 . Exposé du problème étudié

Soit M la variété à bord $[0,\infty[\times\mathbb{R}^n$. On impose $n \geqslant 2$. Un point de M est repéré par ses coordonnées (x,z) avec x dans $\mathbb{R}^+$ et z dans $\mathbb{R}^n$. Soit $P(x,z\,;\partial_x,\nabla_z)$ un opérateur différentiel à coefficient C^∞, strictement hyperbolique, défini au voisinage du point $m=(0,\dots,0)$ de M et dont le symbole principal noté $p(x,z\,;\lambda,\eta)$ est homogène de degré deux en (λ,η). La frontière ∂M de M est choisie non caractéristique et de type timelike pour P. Cela implique l'existence d'un système de coordonnées locales dans lequel le symbole $p(x,z\,;\,\lambda,\eta)$ admet une réduction sous la forme suivante :

$$(1.1) \qquad p(x,z\,;\,\lambda,\eta) = \lambda^2 + q(x,z\,;\,\eta)$$

où $q(x,z\,;\,\eta)$ désigne une forme quadratique de signature $(n-1,1)$.

On convient de noter $\psi(x,z)$ une fonction choisie de manière à ce que la famille à un paramètre $\mathrm{H}_t = \{(x,z)\,;\,\psi(x,z)=t\}$ définisse un feuilletage de M par des hypersurfaces de type spacelike pour l'opérateur P.

A $T>0$ et $X>0$ fixés, on associe $\Omega_{T,X}$ l'ouvert délimité par H^0, H_T, ∂M et $\{(x,z)\,;\,x=X\}$. On note $u_\varepsilon(x,z)$ la solution dans $\Omega_{T,X}$ du problème mixte de type Cauchy-Dirichlet suivant :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} P(x\ ,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\,u_\varepsilon(x,z) = \\ \qquad\qquad f\big(x,z\,;\,u_\varepsilon(x,z),\nabla_{x,z}\,u_\varepsilon(x,z)\big) \quad \text{dans} \quad \Omega_{T,X}\,. \\ \\ u_\varepsilon(0,z) = u_\varepsilon^0(z) \quad \text{dans} \quad \partial\Omega_{T,X}\cap\partial M\,. \\ u_{\varepsilon|\{(x,z)\,;\,\psi(x,z)\leqslant -T\}} = 0\,. \end{cases}$$

La fonction $f(x,z\,;\,p,q)$ varie de manière C^∞ avec ses arguments x , z , p et q choisis respectivement dans $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. On se munit aussi d'hypothèses de sous-linéarité pour f :

$$(1.3)\qquad \sup_{(x,z)\,\in\,\bar{\Omega}_{T,X}\ ,\ (p,q)\,\in\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \big|(D_{(p,q)}\,f)(x,z\,;\,p,q)\big| \leqslant M < \infty\,.$$

$$(1.4)\qquad f(x,z\,;\,0,0) \in L^2(\Omega_{T,X})\,.$$

La donnée au bord $u^0_\varepsilon(z)$ se présente sous la forme d'une perturbation oscillante de petite amplitude d'un état de base $u_0(z)$ choisi dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, ce que l'on convient de noter :

$$(1.5)\qquad u^0_\varepsilon(z) \sim u_0(z) + \varepsilon\, U_0\big(z, \tfrac{\varphi_0(z)}{\varepsilon}\big)\,.$$

On précise les hypothèses concernant la phase $\varphi_0(z)$. A cette fin, on se fixe une direction particulière symbolisée par un vecteur $\tilde{\eta}$ non nul de $\mathbb{R}^n$ choisi de manière à ce que le point $(m;\tilde{\eta})$ de $T^*(\partial M)$ soit de type diffractif non dégénéré. Cette hypothèse signifie que les trois conditions suivantes sont requises :

$$(1.6)\qquad q(m\,;\,\tilde{\eta}) = 0\,.$$

$$(1.7)\qquad \partial_x\, q(m\,;\,\tilde{\eta}) = q'_x < 0\,.$$

$$(1.8)\qquad \nabla_\eta\, q(m\,;\,\tilde{\eta}) = (\alpha,\beta) \neq 0 \quad \text{où} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\,.$$

Soit V un voisinage conique dans $\mathrm{T}^*(\partial\mathrm{M})$ du point $(m;\tilde{\eta})$. D'après (1.8), on peut choisir V suffisamment petit de manière à ce que son intersection D_V avec l'ensemble $D = \{\,(z,\eta)\,;\,q(0,z\,;\,\eta) = 0\,\}$ se présente sous la forme d'une hypersurface régulière de $\mathrm{T}^*(\partial\mathrm{M})$ constituée de points qui sont tous de type diffractif. Soit $\mathrm{pr}(V)$ la projection de V sur $\partial\mathrm{M}$ et G_V le graphe du gradient de $\varphi_0(z)$ au dessus de $\mathrm{pr}(V)$:

$$(1.9)\qquad G_V = \big\{\,\big(z, \nabla_z\,\varphi_0(z)\big)\,;\, z \in \mathrm{pr}(V)\,\big\}\,.$$

On convient aussi de noter $Q(z)$ la valeur du symbole $q(0,z\,;\,\eta)$ sur G_V :

$$(1.10)\qquad Q(z) = q\big(0,z\,;\,\nabla_z\,\varphi_0(z)\big)\,.$$

La variété G_V admet une interprétation géométrique. Elle représente l'ensemble des positions microlocales sollicitées dans $\mathrm{T}^*(\partial\mathrm{M})$ par l'onde oscillante $\varepsilon\, U_0\big(z, \frac{\varphi_0(z)}{\varepsilon}\big)$. On s'intéresse à la propagation d'une onde oscillante dont la phase $\varphi_0(z)$ de classe C^1 est supposée polarisée en m dans la direction $\tilde{\eta}$. En d'autres termes, le point $(m;\tilde{\eta})$ se trouve situé dans l'intersection $D_V \cap G_V$:

$$(1.11)\qquad \nabla_z\,\varphi_0(m) = \tilde{\eta}\,.$$

La réponse donnée par le système $(\mathcal{S})$ à la présence de l'oscillation dépend de la position de G_V relativement à D_V au voisinage du point d'intersection $(m;\tilde{\eta})$. Il importe par conséquent de préciser cette position avec soin. Essentiellement deux hypothèses semblent recevables. La première notée $(\mathcal{H}_1)$ regroupe les deux conditions (1.12) et (1.13) suivantes :

$\mapsto$ Au point $(m;\tilde{\eta})$, G_V est transverse à D_V, soit encore :

(1.12) $\qquad T_{(m;\tilde{\eta})}\, D_V + T_{(m;\tilde{\eta})}\, G_V = T_{(m;\tilde{\eta})}\, \mathrm{T}^*(\partial \mathrm{M})$.

$\mapsto$ Le crochet de Poisson en les variables $(z;\eta)$ des deux fonctions $Q(z)$ et $q(0,z\,;\,\eta)$ est non nul :

(1.13) $\qquad \{\,Q\,;\,q\,\} = -<\nabla_z\, Q\,;\,\nabla_\eta\, q> \neq 0$.

Les relations (1.12) et (1.13) sont équivalentes à l'existence d'un système de coordonnées dans lequel on a (1.14) et (1.15) :

(1.14) $\qquad Q(z) = z_1$.

(1.15) $\qquad \alpha \neq 0$.

La seconde hypothèse retenue est notée $(\mathcal{H}_2)$. Elle permet par exemple de traiter le cas de la réflexion d'une onde plane sur un cylindre. Elle est composée des deux conditions (1.16) et (1.17) suivantes :

$\mapsto$ $-Q(z)$ s'exprime comme le carré d'une fonction $L(z)$ de classe C^∞, nulle en m mais à gradient non nul en m. En particulier l'ensemble G_V reste confiné dans la zone formée par les points hyperboliques de $T^*(\partial \mathrm{M})$ et admet avec D_V un contact qui se présente sous la forme d'une variété de dimension $(n-1)$:

(1.16) $\qquad Q(z) = -L(z)^2 \quad , \quad L(0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_z\, L(0) \neq 0$.

$\mapsto$ Au point $(m;\tilde{\eta})$, le crochet de Poisson en les variables $\big((x,z)\,;\,(\lambda,\eta)\big)$ des deux fonctions $-L(z)+\lambda$ et $q(x,z\,;\,\eta)$ est nul :

(1.17) $\qquad \{\,-L(z)+\lambda\,;\,q(x,z\,;\,\eta)\,\} = q'_x + <\nabla_z\, L\,;\,\nabla_\eta\, q> = 0$.

Les relations (1.16) et (1.17) sont équivalentes à l'existence d'un système de coordonnées dans lequel on a (1.18) et (1.19) :

(1.18) $\qquad Q(z) = -z_1^2$.

(1.19) $\qquad \alpha + q'_x = 0$.

Compte tenu de (1.14) et (1.18), on voit clairement que les deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont distinctes. Toutefois, dans la mesure où on s'interesse uniquement à la propagation d'oscillations portées par la région hyperbolique (on suppose dans la suite que le support du profil $U_0(z,\theta)$ est contenu dans $\{\,(z,\theta)\,;\,z_1 \leqslant 0\,\}$) le traitement de ces deux cas de figure, une fois l'équation eiconale résolue, est identique et dépend en fait du développement asymptotique obtenu en (2.5).

2 . Les équations de l'optique géométrique

La démarche consiste à rechercher formellement la solution exacte $u_\varepsilon(x,z)$ sous la forme de la somme :

$$(2.1)\qquad m_\varepsilon(x,z) = u(x,z) + \varepsilon\, U\big(x, z, \tfrac{\varphi(x,z)}{\varepsilon}\big)\,.$$

En reportant dans (1.2) l'expression $m_\varepsilon(x,z)$ ainsi constituée, on obtient différentes quantités que l'on ordonne suivant les puissances croissantes en ε. Le terme d'ordre ε^{-1} donne l'équation eiconale qui régit la phase $\varphi(x,z)$:

$$(2.2)\qquad \begin{cases} P\big(x,z\,;\,\nabla_{x,z}\,\varphi(x,z)\big) = \\ \qquad \partial_x\,\varphi(x,z)^2 + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x,z)\ \partial_{z_i}\varphi(x,z)\ \partial_{z_j}\varphi(x,z) = 0\,. \\ \varphi(0,z) = \varphi_0(z) \quad \text{si} \quad z_1 \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Un tel système est traditionnellement complété par une condition qui fixe la valeur de la dérivée $\partial_x\,\varphi(0,z)$ comme étant une solution particulière du polynôme de second degré en λ :

$$(2.3)\qquad p\big(0,z\,;\,\lambda, \nabla_z\,\varphi(0,z)\big) = \lambda^2 + Q(z) = 0\,.$$

Dans le cas présent, (2.3) admet en m la valeur $\lambda = 0$ comme racine double de sorte qu'en m on doit necessairement imposer $\partial_x\,\varphi(m) = 0$. Du coup la condition de transversalité usuellement requise :

$$(2.4)\qquad < \nabla_{\lambda,\eta}\, p\big(m\,;\,\partial_x\,\varphi(m), \nabla_z\,\varphi(m)\big)\,,\,(1,0,\ldots,0) > \neq 0$$

n'est pas satisfaite.

Au voisinage de m et pour $z_1 < 0$, l'équation (2.3) admet d'après (1.14) ou (1.18) deux solutions réelles distinctes, de signes opposés. A chacune de ces deux solutions correspond un flot hamiltonien. Les deux flots ainsi obtenus sont triés selon leur projection sur M. La projection de l'un d'entre eux conduit à la formation d'un pli tandis que la projection de l'autre notée $Z(s,y)$, définie pour $s \leqslant 0$ et $y_1 \leqslant 0$, donne lieu à un difféomorphisme local. A ce deuxième flot est associée une solution de classe C^1 du problème de Cauchy (2.2), obtenue en imposant à $\varphi(x,z)$ une valeur constante sur $\{\,Z(s,y)\,;$ où s varie et y est fixé$\,\}$. La fonction $\varphi(x,z)$ ainsi obtenue présente par contre une singularié au niveau de ses dérivées secondes en m. En particulier, on peut établir que la quantité $P(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\varphi\,\big(Z(s,y)\big)$ admet en $(0,\ldots,0)$ un développement asymptotique (qui est le même sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$) dont le terme principal s'écrit :

$$(2.5)\qquad p\,(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\,\varphi\,\big(Z(s,y)\big) = \frac{-1}{2\,s + \gamma\,y_1}$$

avec $s < 0$, $y_1 < 0$ et $\gamma > 0$.

Le terme d'ordre ε^0 s'écrit comme un système intégro-différentiel qui couple l'état de base $u(x,z)$ et le profil $U(x,z,\theta)$:

$$(2.6)\quad \begin{cases} P(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\; u(x,z) = \\ \qquad\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(x,z\,;\,u,\nabla_{x,z}\,u + \nabla_{x,z}\,\varphi\;\; W(x,z,\theta')\big)\; d\theta'\,. \\ u(0,z) = u_0(z)\,. \\ u_{|\{(x,z)\,;\,\psi(x,z)\leqslant -T} = 0\,. \end{cases}$$

$$(2.7)\quad \begin{cases} \text{Si } (x,z) \text{ se trouve situé dans } \{Z(s,y)\,;\,y_1\leqslant 0\,,\,s\leqslant 0\} : \\ \frac{dW}{ds}\big(Z(s,y),\theta\big) = P(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\varphi\big(Z(s,y)\big)\;\; W\big(Z(s,y),\theta\big) \\ \quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(Z\,;\,u\circ Z\,,\,\nabla_{x,z}\,u\circ Z + \nabla_{x,z}\,\varphi\circ Z\;\; W(Z,\theta')\big)\; d\theta' \\ \quad - f\big(Z\,;\,u\circ Z\,,\,\nabla_{x,z}\,u\circ Z + \nabla_{x,z}\,\varphi\circ Z\;\; W(Z,\theta)\big)\,. \\ W(0,y,\theta) = \partial_\theta\, U_0(y,\theta) = W_0(y,\theta)\,. \\ \\ \text{Sinon on impose : } \;\; W(x,z,\theta) \equiv 0\,. \end{cases}$$

Le contrôle donné en $(1.3)-(1.4)$ pour le degré de nonlinéarité accordé à la fonction f et les estimations d'énergie dont on dispose pour les problèmes linéaires associés à (2.6) et (2.7) permettent de faire converger un schéma de type Picard. On peut énoncer :

Lemme.

Pour $T>0$ et $X>0$ choisis suffisamment petits, le système nonlinéaire couplé $(2.6)-(2.7)$ admet une unique solution dans l'espace $H^1(\Omega_{T,X})\times L^2(\Omega_{T,X}\times\mathbb{T})$. Cette solution notée $\big(u(x,z),W(x,z,\theta)\big)$ satisfait de plus l'estimation suivante :

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &\|\big(u(x,z),W(x,z,\theta)\big)\|_{H^1(\Omega_{T,X})\times L^2(\Omega_{T,X}\times\mathbb{T})} \\ &\leqslant \|f(x,z;0,0)\|_{L^2(dx\,dz)} + C\;\;\|\big(u_0(z),W_0(z,\theta)\big)\|_{H^1(dz)\times L^2(dz\,d\theta)}\,. \end{aligned}$$

Le choix de la polarisation (1.11) donne aux équations de transport (2.6)–(2.7) un caractère spécifique (les équations linéaires sont défocalisantes) qui provient de l'intervention dans (2.7) du terme singulier $P(x,z\,;\,\partial_x,\nabla_z)\,\varphi$. La présence de cette expression se traduit par une amélioration de la régularité du profil $W(x,z,\theta)$. En effet, pour une donnée au bord $W_0(z,\theta)$ choisie dans $L^2\big((\partial\Omega_{T,X}\cap \mathrm{M})\times\mathbb{T}\big)$, la fonction $W(x,z,\theta)$ solution de (2.7) vit dans un espace L^2 à poids avec un poids qui s'annule sur l'hypersurface $\mathcal{S}_0 = \{\,Z(s,y)\,;\,y_1=0\,\}$. Ce gain est lié à la présence d'une zone de transition entre la région hyperbolique et la région elliptique.

3 . Justification de l'asymptotique.

On commence par décrire l'asymptotique $(\mathcal{H}_1)$ c'est à dire par préciser le sens donné au symbole $\sim$ qui intervient en (1.5). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u(x)$ dans $H^1(\Omega)$. On se donne une fonction phase de classe C^1 sur Ω qui satisfait :

(3.1) $\qquad \nabla_x \varphi(x)$ est non nul pour presque tout x dans Ω.

Soit $\{u_\varepsilon(x)\}_\varepsilon$ une suite d'éléments de $H^1(\Omega)$. Soit aussi $U(x,\theta)$ une fonction dans $L^2(\Omega \times \mathbb{T})$, périodique en θ, de moyenne nulle en θ et dont la dérivée en θ vit dans $L^2(\Omega \times \mathbb{T})$. On introduit alors la définition :

Définition.

On dit que : $u_\varepsilon(x) \overset{H^1(\Omega)}{\sim} u(x) + \varepsilon\, U\big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$ *lorsqu'il existe une suite de polynômes trigonométriques* $U_l(x,\theta)$ *de moyenne nulle en* θ *et à coefficients dans* $L^2(\Omega)$ *ainsi que deux suites de nombres réels strictement positifs* $\{\varepsilon_l\}_l$ *et* $\{\delta_l\}_l$ *avec* δ_l *qui converge vers zero lorsque* l *tend vers l'infini telles que :*

(i) $\qquad \| (\partial_\theta U - \partial_\theta U_l)(x,\theta) \|_{L^2(\Omega\times\mathbb{T})} \leqslant \delta_l$.

(ii) $\qquad \forall\, \varepsilon \in\,]0,\varepsilon_l]$,

$\longrightarrow \qquad \| (u_\varepsilon - u)(x) \|_{L^2(\Omega_{T,X})} \leqslant \delta_l$.

$\longrightarrow \qquad \| \nabla_x u_\varepsilon(x) - \nabla_x u(x) - \nabla_x \varphi(x)\ \partial_\theta U_l\big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \delta_l$.

Cette définition présente l'avantage de regrouper les hypothèses minimales à vérifier pour décrire une asymptotique $H^1(\Omega)$ avec un profil peu régulier. Les points (i) et (ii) sont énoncés sous une forme faible et admettent en fait une formulation plus naturelle que l'on précise maintenant. Une troncature et une régularisation des coefficients $a^l_\alpha(x)$ du polynôme trigonométrique $U_l(x,\theta)$ permettent, tout en conservant les estimations (i) et (ii), de se ramener au cas d'un profil $U_l(x,\theta)$ dans l'espace $L^2(\Omega \times \mathbb{T})$ mais avec cette fois-ci la régularité C^∞ et un support dont la projection sur Ω est un compact inclu dans l'intérieur de Ω. Dès lors la condition (ii) s'interprête en disant que le développement $u(x) + \varepsilon\, U_l\big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$ est en fait une bonne approximation dans $H^1(\Omega)$ de la suite $\{u_\varepsilon(x)\}_\varepsilon$. Quitte en effet à changer de suite $\{\varepsilon_l\}_l$, on peut toujours supposer :

$(ii)'$ $\qquad \forall\, \varepsilon \in\,]0,\varepsilon_l]$,

$\longrightarrow \qquad \| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon\, U_l\big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big) \|_{H^1(\Omega)} \leqslant 2\,\delta_l$

ce qui traduit en termes plus clairs le résultat de convergence exprimé par la condition (ii).

Soit maintenant $U_0(z,\theta)$ une fonction dans $L^2(\partial\Omega_{T,X} \times \mathbb{T})$ dont le support est contenu dans $\{(z,\theta)\,;\, z_1 \leqslant 0\}$, périodique en θ, de moyenne nulle en θ et avec la propriété supplémentaire de régularité suivante :

$W_0(z,\theta) = \partial_\theta U_0(z,\theta) \in L^2(\partial\Omega_{T,X} \times \mathbb{T})$.

On suppose que la donnée au bord satisfait :

$$u_\varepsilon^0(z) \overset{H^1(\Omega)}{\sim} u_0(z) + \varepsilon\, U_0\big(z, \tfrac{\varphi_0(z)}{\varepsilon}\big). \tag{3.2}$$

On note $U(x,z,\theta)$ pour :

$$U(x,z,\theta) = \int_0^\theta W(x,z,t)\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta'} W(x,z,t)\, dt\, d\theta'. \tag{3.3}$$

On peut alors énoncer :

THEOREME.

$$u_\varepsilon(x,z) \overset{H^1(\Omega_{T,X})}{\sim} u(x,z) + \varepsilon\, U\big(x,z,\tfrac{\varphi(x,z)}{\varepsilon}\big). \tag{3.4}$$

Preuve.

La preuve utilise les estimations d'énergie classiques telles qu'elles sont décrites dans [2] page 418. L'idée repose sur deux principes. D'une part pour tout paramètre μ strictement positif fixé, on peut justifier l'asymptotique en ε dans la région $\{Z(s,y)\,;\, y_1 \leqslant -\mu\,;\, s \leqslant 0\}$. D'autre part, dans la région complémentaire $\{Z(s,y)\,;\, -\mu \leqslant y_1 \leqslant 0\}$, on peut estimer uniformément en ε à l'aide d'un $o(\mu)$ la norme H^1 de la solution exacte $u_\varepsilon(x,z)$ et du modèle $u(x,z) + \varepsilon\, U\big(x,z,\frac{\varphi(x,z)}{\varepsilon}\big)$. En d'autres termes, le fait qu'il n'y ait pas d'accumulation d'énergie (lorsque ε tend vers zero) au voisinage de la surface $\{Z(s,y)\,;\, y_1 = 0\}$ permet de pousser une asymptotique dont on sait qu'elle est justifiée dans la zone hyperbolique jusqu'à la zone des points de type "glancing".

BILIOGRAPHIE

[1] J. Chikhi. *Réflexion d'ondes striées ou oscillantes pour des systèmes hyperboliques à deux vitesses.* Thèse d'université. Rennes. (1990).

[2] L.Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III.* Springer Verlag. (1983–1985).

[3] R.B.Melrose. *Local Fourier-Airy integral operators*, Duke Mathematical Journal. 42 (1975), 583–604.

[4] R.B.Melrose. *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke Mathematical Journal. 42 (1975), 605–635.

[5] M. Zworski. *Semilinear diffraction of conormal waves.* Seminaire EDP. Ecole polytechnique. Palaiseau. octobre. (1992).