

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAUL GODIN

Transformation de Kelvin et ondes non linéaires globales

Journées Équations aux dérivées partielles (1993), p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A4_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Transformation de Kelvin et ondes non linéaires globales

Paul GODIN
Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine C.P.214
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique

On considère le problème de Cauchy

$$\square z = \sum f^{ij}(z, z') \partial_{ij}^2 z + f(z, z') \text{ si } t > 0, x \in \mathbf{R}^N, \quad (1)$$

$$\partial_t^j z = z_j, j = 0, 1, \quad (2)$$

où $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ est la variable d'espace, t (aussi désignée par x_0) est la variable de temps, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ si $0 \leq i \leq N$, $z' = (\partial_t z, \partial_1 z, \dots, \partial_N z)$, $\square = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^N \partial_j^2$; $f^{ij} = f^{ji} \in C^\infty$ dans un voisinage de $(0, 0) \in \mathbf{R}^{N+2}$, $f^{ij}(0, 0) = \partial^\alpha f(0, 0) = 0$ si $|\alpha| \leq 1$. (1) est donc une perturbation quadratique de \square . On ne considèrera que des données initiales z_j "petites" (en des sens qui seront précisés par la suite).

Dans le cas où $z_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ et où des normes convenables de z_j sont $\leq \epsilon$ ($\epsilon > 0$ étant petit), on a de nombreux résultats sur la durée de vie des solutions de ce problème (cf. [2], [9], [10], [14], [8], [11], [1],...). En particulier (1), (2) possède une solution globale si ϵ est assez petit lorsque N est ≥ 5 (cf. [2] si N est impair, et [11] quelle que soit la parité de N). Si $N = 3$, il existe des contre-exemples (cf. par exemple [7]) qui montrent que (1), (2) n'a pas de solution globale en général même si les $z_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ sont de "taille" aussi petite que l'on veut. Néanmoins, si $N = 3$ et f^{ij}, f vérifient la condition nulle, (1), (2) possède une solution globale en temps si les données initiales sont suffisamment petites (cf. [9], [2]). La condition nulle, qui porte sur le développement de Taylor de f^{ij}, f en

(0,0), s'exprime ainsi :

$$f^{ij}(z, p) = c\eta^{ij}z + \Sigma c_k^{ij}p_k + \mathcal{O}(z^2 + |p|^2) \text{ si } (z, p) \rightarrow (0, 0),$$

où $c, c_k^{ij} \in \mathbf{R}$, $\eta^{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\eta^{00} = 1$, $\eta^{ii} = -1$ si $i > 0$, et $\Sigma c_k^{ij}p_i p_j p_k \equiv 0$ si $p_0^2 = \Sigma_1^3 p_k^2$; et

$$f(z, p) = \Sigma c^{ij}p_i p_j + \mathcal{O}(|z|^3 + |p|^3) \text{ si } (z, p) \rightarrow (0, 0),$$

où $c^{ij} \in \mathbf{R}$ et $\Sigma c^{ij}p_i p_j \equiv 0$ si $p_0^2 = \Sigma_1^3 p_k^2$.

La démonstration de [2] est basée sur une transformation du problème (1), (2), global en $t > 0$, en un problème sur un intervalle de temps borné. On utilise le principe suivant ([6]): si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont 2 variétés pseudo-riemanniennes hyperboliques de dimension n et si $\Phi : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ est une application conforme telle que $\Phi^*g_2 = \lambda g_1$, alors, en désignant par \square_j et K_j le d'Alembertien et la courbure scalaire de (M_j, g_j) , on a:

$$\left(\square_1 + \frac{n-2}{4(n-1)}K_1 \right) \left(\lambda^{\frac{n-2}{4}}(u \circ \Phi) \right) = \lambda^{\frac{n+2}{4}} \left(\left(\square_2 + \frac{n-2}{4(n-1)}K_2 \right) u \right) \circ \Phi \quad (3)$$

si $u \in C^\infty(M_2)$. Soit alors S^N munie de sa métrique canonique m_{S^N} . Sur $\mathbf{R}_T \times S^N$, on considère la métrique $dT^2 - m_{S^N}$. Dans [2], on considère une application conforme $\Phi : (\mathbf{R}^{N+1}, \eta) \rightarrow (\mathbf{R} \times S^N, dT^2 - m_{S^N})$, où η est la métrique de Minkowski, telle que $0 \leq T < \pi$ sur $\Phi([0, +\infty[\times \mathbf{R}^N)$. Si on transforme (1), (2) en utilisant Φ et la formule (3), on est ramené à un problème sur un intervalle de temps borné, problème qui possède une solution si les données initiales sont suffisamment petites. La transformation Φ utilisée dans [2] n'est pas adaptée à l'étude des ondes dans la description desquelles interviennent des surfaces caractéristiques: on peut en effet construire des surfaces caractéristiques de \square lisses et globales en $t > 0$ dans (\mathbf{R}^{N+1}, η) dont l'image par Φ est la restriction à $\Phi([0, +\infty[\times \mathbf{R}^N)$ de surfaces caractéristiques du d'Alembertien de $\mathbf{R} \times S^N$ qui ne sont pas lisses partout. Il sera plus commode de prendre pour Φ l'inversion conforme $J : (t, x) \mapsto (T, X)$ où $T = \frac{t}{|x|^2 - t^2}$, $X = \frac{x}{|x|^2 - t^2}$. J échange C_+ et C_- , où $C_\pm = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{N+1}, |x| < |t|, t \geq 0\}$. Si $\Phi = J$ et $W(T, X) = \frac{z(t, x)}{(T^2 - |X|^2)^{\frac{N-1}{2}}}$, (3) donne

$$\square_z = (T^2 - |X|^2)^{\frac{N+3}{2}} \square_{TX} W,$$

où $\square_{TX} = \partial_T^2 - \Sigma \partial_X^2$. La transformation $(t, x, z) \mapsto (T, X, W)$ apparaît dans [13] et y est appelée transformation de Kelvin. (1) devient $\square_{TX} W = \Sigma g^{ij}(T, X, W, DW) D_{ij}^2 W +$

$g(T, X, W, DW)$, où $g^{ij}(T, X, 0, 0) \equiv 0 \equiv \partial_{W, DW}^\alpha g(T, X, 0, 0)$ pour $|\alpha| \leq 1$. Si N est impair ≥ 5 ou si $N = 3$ et la condition nulle est satisfaite, g^{ij} , g admettent des prolongements C^∞ définis pour tout $(T, X) \in \mathbf{R}^{2N+2}$. Si $t_0 > M$, $J(\{(t, x) \in \mathbf{R}^{N+1}, t \geq t_0, |x| \leq t - t_0 + M\}) = \{(T, X) \in \mathbf{R}^{N+1}, |X| + T < 0, T \geq t_0(|X|^2 - T^2), |X| - T \leq (M - t_0)^{-1}\}$, et donc la transformation de Kelvin transforme (1), (2) en un problème en temps fini si on remplace t par $t - t_0$ avec $t_0 > M$, où M est tel que $z_j = 0$ si $|x| \geq M$. Cette remarque peut être exploitée pour obtenir des résultats d'existence globale d'ondes soniques et d'oscillations que l'on va décrire maintenant.

I. Ondes soniques ([3]).

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}_x^N$ un ouvert borné à frontière C^∞ , situé localement d'un seul côté de $\partial\Omega$. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $\psi < 0$ dans Ω , $\psi > 0$ dans $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$, $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ et $d\psi \neq 0$ en tout point de $\partial\Omega$. On fait les hypothèses suivantes sur les fonctions z_j de (2):

$$z_j \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \Omega) \cap C_0^{1-j}(\mathbf{R}^N), z_j = 0 \text{ si } |x| \geq M; \quad (4)$$

$$|\partial^\alpha z_j| \leq C_\alpha \epsilon \text{ hors de } \partial\Omega \text{ (où } \epsilon \text{ est un petit paramètre);} \quad (5)$$

$$\text{des conditions de compatibilité convenables sont satisfaites sur } \partial\Omega. \quad (6)$$

Alors, il suit des résultats de [12] que pour t petit, (1), (2) possède une solution unique $z \in C^1$ (onde sonique sortante) qui a la structure suivante: $z \in C^\infty$ jusqu'au bord de toute composante connexe du complémentaire de Σ , où $\Sigma = \Psi^{-1}(0)$ est la surface caractéristique (du linéarisé de (2) en z) passant par $\{0\} \times \partial\Omega$ et satisfaisant $\partial_t \Psi < 0$. On fait également l'hypothèse de stricte convexité

$$\partial\Omega \text{ est connexe et } \psi(a) = \Sigma \partial_j \psi(a) v_j = 0 \Rightarrow \Sigma \partial_{j_k}^2 \psi(a) v_j v_k > 0 \text{ si } v \in \mathbf{R}^N. \quad (7)$$

Sous ces hypothèses, la transformation de Kelvin permet de montrer le résultat suivant (en plaçant les données initiales en $t = t_0$, t_0 assez grand).

Théorème 1([3]). *Supposons que $N \geq 3$ est impair et que la condition nulle est réalisée si $N = 3$. Sous les hypothèses précédentes, (1), (2) possède, pour ϵ suffisamment petit, une unique solution globale z qui est une onde sonique sortante C^∞ par morceaux, associée*

à Σ , et Σ est elle-même C^∞ et globale dans le futur. De plus, avec des constantes C, \tilde{C}_α indépendantes de ϵ , on a:

$$|\partial^\alpha z(t, x)| \leq \tilde{C}_\alpha \epsilon (1 + t + |x|)^{-\frac{N-1}{2}} (1 + |t - |x||)^{-\frac{N-1}{2}} \text{ hors de } \Sigma, -M \leq t - |x| \leq C \text{ sur } \Sigma.$$

Si $N = 3$, la condition nulle est importante pour ce résultat; et si $N > 3$ et Ω n'est pas strictement convexe, ce résultat est également en défaut. On a en effet le

Théorème 2 ([3]). *Supposons que Ω est convexe et qu'en $a \in \partial\Omega$, il y a au plus 2 courbures principales strictement > 0 dans la direction de $-|\psi'(a)|^{-1}\psi'(a)$. Supposons que $f^{00}(z, p) < 1$ et que $\Sigma \frac{\partial f^{ij}}{\partial p^k}(0, 0) q_i q_j q_k \neq 0$ si $q = (-|\psi'(a)|, \partial_1 \psi(a), \dots, \partial_N \psi(a))$. Alors on peut trouver des données initiales z_j compatibles vérifiant les hypothèses précédentes avec ϵ fixé aussi petit que l'on veut, et qui ont la propriété suivante: il existe $T < \infty$ tel que si z est une onde sonique sortante solution de (1), (2), associée à la surface caractéristique Σ , alors Σ est lisse jusqu'au temps T mais $\sum_{|\alpha| \leq 2} \sup_{t < T, (t, x) \notin \Sigma} |\partial^\alpha z(t, x)| = +\infty$.*

II. Oscillations ([4]).

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ qui a la propriété suivante: il existe $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$ tels que pour tout $\lambda \in [a, b]$, $\{x \in \mathbf{R}^N, \psi(x) < \lambda\}$ est un ouvert convexe à bord C^∞ strictement convexe. Soit B_1 un borné fixe $\subset \psi^{-1}]a, b[$ et soit B_2 un borné fixe quelconque. Soit φ solution de $\varphi_t + |\varphi_x| = 0$, $\varphi|_{t=0} = \psi$. A l'aide d'une transformation de Kelvin, on peut montrer le résultat suivant (voir [5] pour un résultat analogue, local en temps, pour des systèmes symétriques hyperboliques de 1er ordre).

Théorème 3 ([4]). *On suppose toujours que N est impair ≥ 3 , et que la condition nulle est vérifiée si $N = 3$. Soit $\mu \in \mathbf{N}$, $\mu \geq 2$. On se donne $\zeta_j(x, \theta) \in C_0^\infty(\bar{B}_1 \times [0, 2\pi])$, $2 \leq j \leq \mu$, périodiques et de période 2π en θ , telles que $\int_0^{2\pi} \zeta_j(x, \theta) d\theta = 0$. Si $N \geq 5$, on suppose que $|\frac{\partial \zeta_2}{\partial \theta}|$ est assez petit. On se donne aussi $\omega_j^k \in C_0^\infty(\bar{B}_2)$, $1 \leq j \leq \mu$, $k = 0, 1$. Alors il existe des fonctions $z_j(t, x, \theta)$, $1 \leq j \leq \mu$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, avec z_1 indépendante de θ , telles que:*

$$(1) \partial_\theta z_j|_{t=0} = \zeta_j \text{ si } 2 \leq j \leq \mu, \partial_t^k \int_0^{2\pi} z_j(t, x, \theta) d\theta|_{t=0} = \omega_j^k \text{ si } k = 0, 1 \text{ et } 1 \leq j \leq \mu;$$

(2) la fonction $z^\epsilon(t, x) \equiv \sum_{j=1}^{\mu} \epsilon^j z_j(t, x, \frac{\varphi}{\epsilon})$ vérifie, pour ϵ suffisamment petit:

$$\square z^\epsilon - \Sigma f^{ij}(z^\epsilon, (z^\epsilon)') \partial_{ij}^2 z^\epsilon - f(z^\epsilon, (z^\epsilon)') = \epsilon^\mu g_\epsilon,$$

où $|\partial_{tx}^\alpha g_\epsilon| \leq C_\alpha \epsilon^{-(|\alpha|-1)^+} (1+t+|x|)^{-\frac{N+3}{2}} (1+|t-|x||)^{-\frac{N+3}{2}}$, et $|\partial_{tx}^\alpha \partial_{tx}^\nu z_\epsilon| \leq C_\alpha \epsilon^{1-|\alpha|} (1+t+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} (1+|t-|x||)^{-\frac{N-1}{2}}$ si $|\nu| \leq 1$.

D'autre part, une tranformation de Kelvin et les résultats de [5] permettent de montrer le théorème suivant.

Théorème 4 ([4]). *Sous les hypothèses précédentes, si $\mu > \frac{N}{2} + 1$ et si ϵ est suffisamment petit, (1) possède une solution globale z telle que $\partial_t^j(z - z^\epsilon)|_{t=0} = 0$ si $j \leq 1$, et telle que*

$$|\partial_{tx}^\alpha \partial_{tx}^\nu (z^\epsilon - z)| \leq C_\alpha \epsilon^{\mu-1-[(N+1)/2]-|\alpha|} (1+t+|x|)^{-\frac{N-1}{2}} (1+|t-|x||)^{-\frac{N-1}{2}}$$

si $|\nu| \leq 1$, $|\alpha| \leq \mu - [\frac{N+1}{2}] - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.ALINHAC, *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasilinéaires en dimension deux*. I, prépublication 92-77 de l'Université de Paris-Sud, 1992; II, prépublication 93-23 de l'Université Paris-Sud, 1993.
- [2] D.CHRISTODOULOU, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), 267-282.
- [3] P.GODIN, *Global sound waves for quasilinear second order wave equations*, preprint.
- [4] P.GODIN, article en cours de rédaction.
- [5] O.GUES, *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires*, Asymptotic Analysis 6 (1993), 241-269.
- [6] S.HELGASON, *Wave equations on homogeneous spaces*, Springer Lecture Notes in Math. 1077 (1984), 254-287.

- [7] F.JOHN, *Non-existence of global solutions of $\square u = \frac{\partial}{\partial t} F(u_t)$ in two and three space dimensions*, Supplemento al Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; Série II, 8 (1985), 229-249.
- [8] L.HÖRMANDER, *The lifespan of classical solutions of non-linear hyperbolic equations*, Springer Lecture Notes in Math. 1256 (1987), 214-280.
- [9] S.KLAINERMAN, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 321-332.
- [10] S.KLAINERMAN, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lect. Appl. Math. 23, vol.I (1986), 293-326.
- [11] T.T.LI et Y.M.CHEN, *Initial value problems for nonlinear wave equations*, Comm. Part. Diff. Eq. 13 (1988), 383-422.
- [12] G.METIVIER, *Ondes soniques*, J. Math. Pures Appl. 70 (1991), 197-268.
- [13] K.MORAWETZ, *Energy decay for star-shaped obstacles*, dans P.D.LAX et R.PHILLIPS, *Scattering theory*, Academic Press (1967).
- [14] J.SHATAH, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eq. 46 (1982), 409-425.