JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FERRUCCIO COLOMBINI

Quelques remarques sur le problème de Cauchy pour des équations faiblement hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A13_0>

Quelques remarques sur le problème de Cauchy pour des équations faiblement hyperboliques

FERRUCCIO COLOMBINI

§1 Introduction

Dans cet exposé* on s'intéresse au problème de Cauchy dans les classes de Gevrey pour des équations faiblement hyperboliques avec racines de multiplicité variable. En particulier on considère la question de la forte hyperbolicité Gevrey: on se donne un opérateur hyperbolique P homogène d'ordre m, et on se démande dans quelles classes de Gevrey le problème de Cauchy est bien posé quels que soient les termes d'ordre inferieur qu'on ajoute à P. (On dira qu'une fonction $f \in C^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$, est dans la classe de Gevrey $\mathcal{E}^s$, pour $s \geq 1$, si $\forall K$ compact dans Ω il existe deux constantes A, B telles que $|D^\alpha f(x)| \leq BA^{|\alpha|}(\alpha!)^s \;\; \forall x \in K, \;\forall \alpha \in \mathbf{N}^n$).

Il y a beaucoup de résultats sur ce sujet; en particulier Bronštein a montré (voir [1]) que si r est la plus grande multiplicité des racines caractéristiques de l'opérateur P alors le problème de Cauchy est bien posé dans $\mathcal{E}^s$ pour $s < \dfrac{r}{r-1}$; ce résultat est en général optimal, comme il est montré par l'opérateur très simple ∂_t^r auquel il suffit d'ajouter le terme ∂_x^{r-1} pour avoir que le problème de Cauchy (par rapport à la surface des données initiales $S = \{t = 0\}$) n'est pas bien posé dans $\mathcal{E}^s$ si $s > \dfrac{r}{r-1}$.

On peut d'autre part espérer d'obtenir des résultats meilleurs (c'est à dire des espaces $\mathcal{E}^s$ avec s plus grand où le problème est bien posé) en regardant comment les racines dégénèrent. Dans cette direction on a le suivant résultat de Ivrii (voir [7], et aussi [8] pour une autre démonstration):

THÉORÈME. *Soit P l'opérateur donné par*

$$P = \partial_t^2 + a_1(t)\partial_t\partial_x + a_2(t)\partial_x^2$$

et soient $\tau_1(t), \tau_2(t)$ les deux racines caractéristiques. Supposons que pour $t \geq 0$ $\tau_2(t) - \tau_1(t) \sim t^k$ (c'est à dire $(\tau_2(t) - \tau_1(t))t^{-k}$ a une limite finie, non zéro, pour t qui tend vers zéro). Soit M un opérateur d'ordre 1. Alors le problème de Cauchy pour $P + M$ par rapport à $\{t = 0\}$ est bien posé dans $\mathcal{E}^s$ si $1 \leq s < \dfrac{2k}{k-1}$, et il n'est pas bien posé en général pour $s \geq \dfrac{2k}{k-1}$.

Un exemple d'opérateur come ci-dessus est le suivant

$$P = \partial_t^2 - t^{2k}\partial_x^2.$$

*Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec Nicola Orrù (voir [5] pour des énoncés plus complets et pour les démonstrations détaillées).

Nous présentons ici une généralisation de ce théorème pour des opérateurs du troisième ordre.
On considérera des cas assez particuliers, mais on cherchera à obtenir des résultats très précises. On utilisera la méthode des estimations de l'énergie, en définissant des énergies qui dépendent de quelques paramètres ϵ, qui seront liés à la variable duale ξ. Cette méthode s'inspire à celle qu'on a utilisé dans [3] pour étudier des équations strictement hyperboliques à coefficients peu réguliers, et dans [4] pour des équations faiblement hyperboliques du second ordre.
Il est intéressant d'observer que, grâce à cette méthode, nous ne sommes pas obligés à supposer aucune regularité des racines caractéristiques, différemment à ce que souvent on fait.
On trouvera des résultats proches à ceux que nous présentons dans [6], [7]; voir aussi [9].

§2 Enoncés

On se place dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n$, et l'on considère des opérateurs avec des coefficients de classe C^∞, ne dépendant que de la variable t, définis dans un voisinage de $t = 0$. On étudiera le problème de Cauchy par rapport à la surface $S = \{t = 0\}$, et on dira qu'il est bien posé si on a existence (et unicité) de la solution dans un voisinage de l'origine.
Considérons d'abord le cas de dimension 1 d'espace. On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $P = P(t, \partial_t, \partial_x)$ l'opérateur donné par*

$$P = \partial_t^3 + a_1(t)\partial_t^2\partial_x + a_2(t)\partial_t\partial_x^2 + a_3(t)\partial_x^3 \tag{1}$$

et soient $\tau_1(t) \leq \tau_2(t) \leq \tau_3(t)$ les trois racines caractéristiques. Soit M un opérateur d'ordre ≤ 2 à coefficients ne dépendant que de t. Supposons que, pour $t \geq 0$,

$$\tau_2(t) - \tau_1(t) \sim t^l, \qquad \tau_3(t) - \tau_2(t) \sim t^k$$

où k et l sont deux nombres ≥ 1 éventuellement égaux à ∞ ($k = \infty$ signifie que $\tau_3(t) - \tau_2(t) = o(t^h)$ $\forall h$). On peut supposer $k \leq l$.
Si $k > 1$ le problème de Cauchy pour $P + M$ est bien posé dans $\mathcal{E}^s$ pour $s < \dfrac{3k}{2k-1}$, quelque soit M, et il n'est pas bien posé en général dans $\mathcal{E}^s$ si $s \geq \dfrac{3k}{2k-1}$.
Si $k = 1$, le problème est bien posé dans $\mathcal{E}^s$ pour $s < 2 + \frac{1}{l}$, et non (en général) pour $s \geq 2 + \frac{1}{l}$.
Pour les cas k (ou l) $= \infty$, on obtient l'exposant limite; précisement si $k = \infty$, le problème est bien posé pour $s < \frac{3}{2}$, et non pour $s > \frac{3}{2}$; si $k = 1, l = \infty$, le problème est bien posé pour $s < 2$, et non pour $s > 2$.*

*Mais cette fois ci nous ne sommes pas capable à montrer la nécessité pour l'exposant limite.

REMARQUE 1. On notera que si $k = l = \infty$ on retrouve l'exposant de Gevrey donné par Bronštein $\left(\frac{r}{r-1}\right)$, tandis que pour $k < \infty$, on obtient un exposant meilleur, même si $l = \infty$.

REMARQUE 2. Pour appliquer le théorème ci-dessus il n'est pas nécessaire évidemment de calculer les racines τ_j; il suffit en effet de considérer les fonctions

$$f(t) = \sum_{i<j} (\tau_i - \tau_j)^2, \quad g(t) = \prod_{i<j} (\tau_i - \tau_j)^2,$$

qui sont des polynômes par rapport au coefficients a_j de P, et de calculer l'ordre de zéro de f et de g lorsque t tend vers zéro.

Le résultat du théorème 1 s'étend au cas de n variables d'espace; on a en effet le suivant théorème:

THÉORÈME 2. *Soit P un opérateur hyperbolique homogène du troisième ordre à coefficients fonctions C^∞ de la variable t donné par*

$$P = \partial_t^3 + a_1(t, \partial_x)\partial_t^2 + a_2(t, \partial_x)\partial_t + a_3(t, \partial_x).$$

Soit $\bar{\xi}$ fixé dans $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$; définissons l'indice de Gevrey s par rapport à $\bar{\xi}$.

Si pour $\xi = \bar{\xi}$ le tois racines caractéristiques sont distinctes, en $t = 0$, l'on pose $s(\bar{\xi}) = +\infty$.

S'il y a une racine double $\tau_1(0, \bar{\xi}) = \tau_2(0, \bar{\xi})$ et une racine simple $\tau_3(0, \bar{\xi})$, soit l tel que $\tau_1(t, \bar{\xi}) - \tau_2(t, \bar{\xi}) \sim t^l$ pour t qui tend vers zéro; on posera alors $s(\bar{\xi}) = \frac{2l}{l-1}$ ($s(\bar{\xi}) = 2$ si $l = \infty$).

Enfin s'il y a une racine de multiplicité trois on pose $s(\bar{\xi})$ suivant le théorème 1.

Soit maintenant $s_0 = \inf s(\bar{\xi}) = \min s(\bar{\xi})$.

Alors le problème de Cauchy pour $P + M$ est bien posé dans $\mathcal{E}^s$ pour $s < s_0$, quel que soit M opérateur d'ordre 2, et il n'est pas bien posé en général si $s > s_0$.

EXEMPLE Considérons l'opérateur

$$P = \partial_t^3 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \left(\partial_{x_1}^2 + t^2 \partial_{x_2}^2\right) \partial_t + \partial_{x_1} \left(\partial_{x_1}^2 + \frac{3}{2} t^2 \partial_{x_2}^2\right)$$

et étudions le comportement des racines lorsque $t \to 0$, suivant les differents ξ. On trouve que, pour $t \to 0$,

$$\max[(\tau_2 - \tau_1), (\tau_3 - \tau_2)] \sim \sqrt{t^2 \xi_2^2 + \xi_1^2}$$

$$\min[(\tau_2 - \tau_1), (\tau_3 - \tau_2)] \sim \frac{t^2 \xi_2^2}{\sqrt{t^2 \xi_2^2 + \xi_1^2}}.$$

On a alors que:
si $\bar{\xi} = (0,1)$ $s(\bar{\xi}) = 3$, si $\bar{\xi} = (1,0)$ $s(\bar{\xi}) = 2$, autrement $s(\bar{\xi}) = 4$.
L'opérateur P est donc fortement hyperbolique Gevrey pour $s < 2$.

§3 Esquisse de la preuve du théorème 1.

Montrons comment on obtient la condition suffisante.
Soit donc u une solution à support compact en x de $Pu = Mu$, où M est d'ordre 2; soit $v(t,\xi)$ la transformée de Fourier de $u(t,x)$ par rapport à x: cherchons des estimations de la croissance de v lorsque $|\xi| \to +\infty$. La fonction v vérifie l'équation ordinaire (dépendant du paramètre ξ)

$$P(t,\partial_t,i\xi)v = M(t,\partial_t,i\xi)v \tag{2}$$

Soit maintenant L_j l'opérateur ayant symbole $L_j = (\tau - i\tau_j(t)\xi)$; de façon analogue

$$L_{hj} = (\tau - i\tau_h\xi)(\tau - i\tau_j\xi) \quad \text{et} \quad L_{123} = P$$

(τ_j, pour $j = 1,2,3$, sont les racines caractéristiques de P). Nous pouvons alors définir l'énergie qu'on utilisera pour les estimations; considérons d'abord le cas $k > 1$; on pose

$$\begin{aligned} E(t,\xi) = {} & |L_{12}v|^2 + |L_{23}v|^2 + |L_{31}v|^2 + \epsilon_1^2\xi^2\left(|L_1v|^2 + |L_2v|^2\right) + \\ & + \epsilon_2^2\xi^2|L_3v|^2 + \epsilon_1^4\xi^4|v|^2 + \epsilon_3^2\xi^4t^2|v|^2, \end{aligned} \tag{3}$$

où les paramètres $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ seront choisis plus tard.
À ce point il faut calculer $E'(t,\xi)$; par exemple pour calculer $\partial_t|L_{12}v|^2$ on a

$$\partial_t(L_{12}v) = -i\tau_1'\xi L_2v - i\tau_2'\xi L_1v + L_{123}v + i\tau_3\xi L_{12}v$$

et donc, compte tenu de (2) et du fait que $L_{123} = P$

$$\begin{aligned} \partial_t|L_{12}v|^2 = {} & 2Re(-i\tau_1'\xi L_2v\overline{L_{12}v} - i\tau_2'\xi L_1v\overline{L_{12}v} + \\ & + Mv\overline{L_{12}v}). \end{aligned}$$

En traitant de façon analogue les autres termes, on obtient alors

$$\begin{aligned} E'(t,\xi) = {} & 2Re(Mv)\left(\overline{L_{12}v} + \overline{L_{23}v} + \overline{L_{31}v}\right) + \\ & + 2Re\left(-i\tau_1'(t)\xi L_2v - i\tau_2'(t)\xi L_1v\right)\overline{L_{12}v} + \\ & + 2Re\left(-i\tau_2'(t)\xi L_3v - i\tau_3'(t)\xi L_2v\right)\overline{L_{23}v} + \\ & + 2Re\left(-i\tau_3'(t)\xi L_1v - i\tau_1'(t)\xi L_3v\right)\overline{L_{31}v} + \\ & + \epsilon_1^2\xi^2 2Re(L_{12}v)\overline{L_1v} + \epsilon_1^2\xi^2 2Re(L_{12}v)\overline{L_2v} + \\ & + \epsilon_2^2\xi^2 2Re(L_{23}v)\overline{L_3v} + \epsilon_1^2\xi^2 2Re\ \left(-i\tau_1'(t)\xi v\right)\overline{L_1v} + \\ & + \epsilon_1^2\xi^2 2Re\ \left(-i\tau_2'(t)\xi v\right)\overline{L_2v} + \epsilon_2^2\xi^2 2Re\ \left(-i\tau_3'(t)\xi v\right)\overline{L_3v} + \\ & + \epsilon_1^4\xi^4 2ReL_1v\bar{v} + \epsilon_3^2\xi^4 2t|v|^2 + \epsilon_3^2\xi^4t^2 2ReL_1v\bar{v}. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant estimer des termes comme $|\xi L_1 v|$; d'un côté on a évidemment $|\xi L_1 v| \leq \dfrac{1}{\epsilon_1}\sqrt{E}$; d'autre part on a

$$\xi L_1 v = \frac{(L_{12} - L_{13})v}{-i\tau_2 + i\tau_3}$$

et donc $|\xi L_1 v| \leq C\dfrac{\sqrt{E}}{t^k}$.
En conclusion $|\xi L_1 v| \leq C\dfrac{1}{t^k + \epsilon_1}\sqrt{E}$.
Par des calculs analogues sur les autres termes, on obtient

$$E'(t) \leq C\left[\frac{1}{t^k + \epsilon_1} + \frac{1}{t^l + \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_3 t + \epsilon_1^2} + \frac{\epsilon_1^2|\xi|}{t^k + \epsilon_1} + \frac{\epsilon_2^2|\xi|}{t^l + \epsilon_2} + \right.$$
$$\left. + \epsilon_3^2 \frac{t}{(\epsilon_3 t + \epsilon_1^2)^2} + \frac{\epsilon_3^2|\xi| t^2}{(t^k + \epsilon_1)(\epsilon_3 t + \epsilon_1^2)}\right] E(t).$$

On a utilisé le fait, prouvé par Bronštein [2] que les racines $\tau_j(t,\xi)$ sont lipschitziennes par rapport à t.
On choisit maintenant

$$\epsilon_1 = |\xi|^{-1/3} \quad \epsilon_2 = |\xi|^{-1/2} \quad \epsilon_3 = |\xi|^{-\frac{2k-1}{3k}}$$

et l'on obtient (pour $|\xi| > 1$)

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(C|\xi|^{\frac{2k-1}{3k}} \log(|\xi| + 1)\right)$$

d'où la thèse.
Pour le cas $k = 1$ on définit l'énergie comme dans (3), mais sans le terme $\epsilon_3^2 \xi^4 t^2 |v|^2$, et l'on procède d'une façon analogue.
REMARQUE Nous avons appliqué cette méthode au cas des opérateurs du quatrième ordre, en obtenant de résultats analogues à ceux du théorème 1.
Pour montrer la partie nécessaire il suffit de choisir

$$M(t, \partial_t, \partial_x) = i\partial_x^2$$

et évaluer les parties imaginaires des racines $\tau = \tau(t,\xi)$ du polynôme

$$\tau^3 + a_1(t)\xi\tau^2 + a_2(t)\xi^2\tau + a_3(t)\xi^3 - \xi^2.$$

Réferences

[1] Bronštein M. D., The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **41** (1980), 87-103.

[2] Bronštein M. D., Smoothness of roots of polynomials depending on parameters, Sibirskii Mat. Ž., **20** (1979), 493-501.

[3] Colombini F., De Giorgi E., Spagnolo S., Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **6** (1979), 511-559.

[4] Colombini F., Jannelli E., Spagnolo S., Well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a nonstrictly hyperbolic equation with coefficients depending on time, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **10** (1983), 291-312.

[5] Colombini F., Orrù N., On the strong hyperbolicity in the Gevrey classes for some hyperbolic equations, en préparation.

[6] Ivrii V. Ya., Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes, Sibirskii Mat. Ž., **17** (1976), 1256-1270.

[7] Ivrii V. Ya., Correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for some non-strictly hyperbolic operators, Izv. VUZ Mat. (189) (1978), 26-35.

[8] Mizohata S., On the Cauchy problem, Science Press, Beijing, et Academic Press, New York, 1985.

[9] Uryu H., Conditions for well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic operators, publ. Rims, Kyoto Univ., **21** (1985), 355-383.

Ferruccio Colombini
Dipartimento di Matematica Università
via Buonarroti, 2
56127 PISA, ITALIE