

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PATRICK GÉRARD

GILLES LEBEAU

Deuxième microlocalisation et problèmes aux limites

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A2_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Deuxième microlocalisation et problèmes aux limites

PATRICK GÉRARD ET GILLES LEBEAU

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

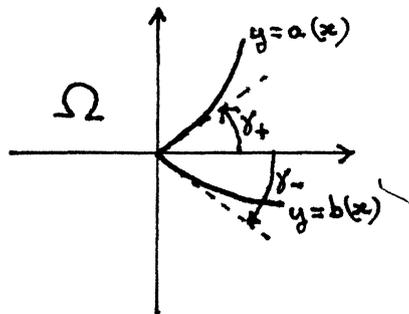
I. Introduction

On s'intéresse ici au calcul de l'onde diffractée par un coin en dimension deux d'espace pour l'équation des ondes avec condition de Dirichlet. Plus précisément, soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 qui localement près de l'origine est le complémentaire de :

$$F = \{(x, y); x \geq 0, b(x) \leq y \leq a(x)\}$$

où a et b sont deux fonctions analytiques près de l'origine vérifiant $a(0) = b(0) = 0$, $b'(0) < 0 < a'(0)$.

(1)



On note Δ_+ , Δ_- les demi-courbes $y = a(x)$, $y = b(x)$ et γ_{\pm} les angles de Δ_{\pm} par rapport à l'axe horizontal; on a $\gamma_+ - \gamma_- \in]0, \pi[$, $\gamma_+ > 0$, $\gamma_- < 0$.

Soit $u(t, x, y)$ la solution locale près de $t = x = y = 0$ du problème d'évolution

$$(2) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t < 0} = u_0 \end{cases}$$

où l'onde entrante u_0 vérifie $(\partial_t^2 - \Delta)u_0 = 0$ au voisinage de l'origine, $u_0 \in H_{\text{loc}}^1$, $\{\text{support}(u_0) \cap t < 0\} \subset \Omega \times \mathbb{R}_t$ et u_0 conormale sur une hypersurface Σ lisse telle que :

$$\Sigma \cap t = 0 = \Sigma_0 = \left\{ x = \theta(y), \theta(0) = \theta'(0) = 0 \right\} .$$

On cherche alors à calculer les singularités de u dans $t > 0$ petit pour $(x, y) \in \Omega_\varepsilon$

$$(3) \quad \Omega_\varepsilon = \left\{ x = r \cos \theta, y = r \sin \theta ; r > 0, \theta \in]\gamma_+ + \varepsilon, 2\pi + \gamma_- - \varepsilon[\right\} .$$

Lorsque le coin est droit, i.e. lorsque les fonctions a et b sont linéaires, ce problème est résolu depuis longtemps. [Voir GARNIR [1], CHEEGER-TAYLOR [2], VARENNE [4], ROULEUX [3] et les bibliographies de ces articles.] Dans le cas général analytique, on dispose des résultats de UCHIDA [5] (qui ne calculent pas l'asymptotique de l'onde diffractée).

On se propose d'indiquer ici comment la stratégie micro-hyperbolique de déformation sur les problèmes elliptiques permet de calculer l'asymptotique de l'onde diffractée par le coin dans Ω_ε .

II. Régularité 2-microlocale pour le problème de Dirichlet

Dans ce paragraphe, on énonce le théorème clé qui va permettre de faire le calcul par déformation.

Soit $M = \left\{ (x, t), x \in \mathbb{R}^n, |x| < a, 0 \leq t < 1 \right\}$ qu'on considère comme variété analytique à bord $\partial M = M \cap t = 0$ et $P = D_t^2 + R(t, x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients analytiques sur M , de symbole principal $p = \tau^2 + r(t, x, \xi)$ réel. On pose $T^*M = T^*\partial M \cup T^*\overset{\circ}{M}$ muni de la topologie naturelle et $r_0(x, \xi) = r(0, x, \xi)$; on suppose $\frac{\partial r_0}{\partial \xi}(x, \xi) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$. Les régions elliptiques \mathcal{E} , glancing \mathcal{G} , hyperboliques \mathcal{H} de $T^*\partial M \setminus \partial M = \overset{\circ}{T^*}\partial M$ sont définies par $r_0 > 0$ (\mathcal{E}), $r_0 = 0$ (\mathcal{G}), $r_0 < 0$ (\mathcal{H}). Soient $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*\partial M$ et s une fonction analytique réelle définie près de ρ_0 , homogène en ξ vérifiant :

$$(4) \quad s(\rho_0) = 0, \quad ds(\rho_0) \quad \text{et} \quad \xi_0 dx \quad \text{libre} \quad ; \quad \{r_0, s\}(\rho_0) > 0 .$$

On note $V = s^{-1}(0)$. C'est une variété involutive régulière de codimension 1 dans $T^*\partial M$, transverse en ρ_0 à H_{r_0} . Si $g \in \mathcal{D}'(\partial M)$ on notera $SS_V^{2,1}(g)$ le deuxième micro-support analytique à croissance de g le long de V . C'est un fermé conique du fibré normal à V dans $T^*\partial M$, $T_V(T^*\partial M)$ orienté ici de sorte que $(\rho_0, \pm 1) \notin SS_V^{2,1}(g)$ entraîne $SS(g) \cap (\pm s > 0) = \emptyset$ au voisinage de ρ_0 .

Soit $f(t, x)$ une distribution prolongeable sur $\overset{\circ}{M}$ vérifiant :

$$(5) \quad Pf = 0 \quad \text{dans} \quad \overset{\circ}{M} .$$

DÉFINITION. On dit que f est V -sortante en ρ_0 ssi

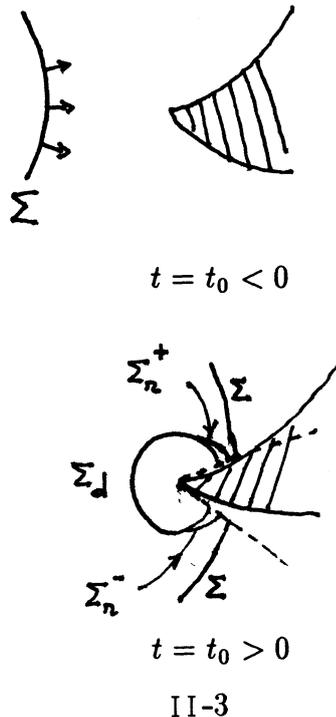
- i) si $\rho_0 \in \mathcal{E}$ pas de condition
- ii) si $\rho_0 \in \mathcal{H}$ et si γ_{\pm} sont les deux demi-bicaractéristiques de p passant au dessus de ρ_0 et contenues dans M on a γ_+ ou $\gamma_- \notin SS(f)$
- iii) si $\rho_0 \in \mathcal{G}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leq t \leq \varepsilon$, $|\rho - \rho_0| \leq \varepsilon$ et $s(\rho) < 0$ entraîne $(\rho, t, \tau) \notin SS_b(f)$ où SS_b est le front d'onde analytique au bord.

THÉORÈME. Soit f distribution prolongeable sur M vérifiant $Pf = 0$ dans \dot{M} , V -sortante en ρ_0 . On suppose $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(f|_{t=0})$. Alors $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)$.

Lorsque $\rho_0 \in \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$, l'hypothèse V -sortante entraîne l'existence d'un o.p.d analytique elliptique d'ordre 1 en ρ_0 tel que $\rho_0 \notin SS\left(E(f|_{t=0}) - \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)$ et le théorème est alors conséquence du fait que les o.p.d. sont 2-microlocaux. Le cas $\rho_0 \in \mathcal{G}$ se traite par déformation micro-hyperbolique.

III. Le calcul de l'onde diffractée

Dans ce paragraphe, on indique les grandes lignes du calcul de l'onde diffractée. Le résultat qu'on va obtenir peut se décrire par le film suivant des singularités de u à $t = t_0$



Les singularités de $u|_{t>0}$ dans Ω_ε sont concentrées sur Σ_d (cône issu de l'origine), Σ_r^\pm (singularités réfléchies par Δ^\pm), et Σ (hypersurface incidente); u est conormale sur $\Sigma_d \cup \Sigma_r^\pm \cup \Sigma$. (On remarquera qu'on ne décrit pas les singularités réémises tangentiellement à Δ^\pm .) On a $u \in H^{3/2}$ sur $\Sigma_j \setminus (\Sigma_r^+ \cup \Sigma_r^-)$.

1ère étape : réduction au bord

On note δ_\pm les masses de Dirac sur les demi-courbes Δ_\pm , v_\pm les dérivées normales $v_\pm = \partial_n u|_{\Delta_\pm}$; on a :

$$v_\pm \in L^2_{\text{loc}(t)}(\Delta_\pm \times \mathbf{R}_t) \quad \text{et} \quad \text{support}(v_\pm) \subset \{0 \leq x \leq \text{cte } t\} .$$

Soit \underline{u} le prolongement de u par zéro dans Ω^c . On a :

$$(6) \quad \square \underline{u} = v_+ \delta_+ + v_- \delta_-$$

d'où en posant $\underline{u} = \tilde{u} + u_0$, $\text{support}(\tilde{u}) \subset t \geq 0$ et

$$(7) \quad \tilde{u} = \square_+^{-1}(v_+ \delta_+ + v_- \delta_-) .$$

La connaissance de v_\pm détermine donc u et (v_+, v_-) vérifie le système 2×2

$$(8) \quad \begin{cases} \partial_n \tilde{u}|_{\Delta_+} = v_+ - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Delta_+} \\ \partial_n \tilde{u}|_{\Delta_-} = v_- - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Delta_-} . \end{cases}$$

2ème étape : réduction 2-microlocale

Soit $\tilde{\Delta}_\pm$ le prolongement des demi-courbes Δ_\pm , paramétrées par l'abscisse curviligne s de sorte que $\Delta_\pm = \{s \geq 0\}$. Dans $T^*(\tilde{\Delta}_\pm \times \mathbf{R}_t)$, on note V_\pm l'involutive d'équation $s = 0$. On va effectuer un calcul microlocal près de la feuille de V_\pm

$$(9) \quad F_\pm^0 = \left\{ (s = 0, t = 0; \sigma, \tau = 1) \right\} .$$

Notons u_\pm les ondes de données u_0 dans le passé et vérifiant $u_\pm|_{\tilde{\Delta}_\pm} = 0$ et posons :

$$(10) \quad w_\pm = v_\pm - (\partial_n u_\pm)|_{\tilde{\Delta}_\pm} \cdot 1_{s \geq 0} .$$

On a alors :

$$(11) \quad w_\pm \in L^2_{\text{loc}(t)}(\Delta_\pm \times \mathbf{R}_t) , \quad \text{support } w_\pm \subset \{0 \leq s \leq \text{cte } t\}$$

et pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$(12) \quad SS(w_\pm) \cap \left\{ s > 0; t \leq \varepsilon_1; \tau = 1 \right\} \subset |\sigma + 1| < \varepsilon_0$$

$$(13) \quad \begin{aligned} &\text{Si } \rho = (s = 0, t; \sigma, \tau = 1) , \quad t \leq \varepsilon_1 \text{ on a} \\ &(\rho, +1) \notin SS_{V_\pm}^{2,1}(w_\pm) \text{ pour } |\sigma + 1| < \varepsilon_0 . \end{aligned}$$

En effet (12) est conséquence du théorème de propagation analytique de J. Sjöstrand et (13) du théorème du §.II. On a toujours $(\rho, -1) \notin SS_{V_{\pm}}^{2,1}(w_{\pm})$ car $\text{support}(w_{\pm}) \subset (s \geq 0)$. On réécrit alors le système (8) avec les inconnues proportionnelles à w_{\pm} :

$$(14) \quad \begin{cases} f_+ = (\partial_y - a'(x)\partial_x)[u - u_+] \Big|_{\Delta_+} ; \\ f_- = (b'(x)\partial_x - \partial_y)[u - u_-] \Big|_{\Delta_-} \end{cases}$$

et on obtient le système 2×2 suivant où les données h_{\pm} se calculent à partir de u_0

$$(15) \quad \begin{cases} f_+ - 1_{x \geq 0}(Q_+ f_+ + S_{+,-} f_-) = h_+ \\ f_- - 1_{x \geq 0}(Q_- f_- + S_{-,+} f_+) = h_- \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} Q_+ f_+(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(x-x')\xi + i(t-t')\tau} \left(\frac{\xi}{\xi_+} - \mu \right) \\ \quad \left(\frac{\mu - a'(x)}{1 + \mu^2} \right) f_+(x', t') dx' dt' d\xi d\tau \\ \mu = \frac{a(x) - a(x')}{x - x'}, \quad \xi_+ = [(1 + \mu^2)(\tau - i0)^2 - \xi^2]^{1/2}, \quad \text{Im } \xi_+ \geq 0 \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} Q_- f_-(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i(x-x')\xi + i(t-t')\tau} \left(\frac{\xi}{\xi_-} + \nu \right) \\ \quad \left(\frac{b'(x) - \nu}{1 + \nu^2} \right) f_-(x', t') dx' dt' d\xi d\tau \\ \nu = \frac{b(x) - b(x')}{x - x'}, \quad \xi_- = ((1 + \nu^2)(\tau - i0)^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \text{Im } \xi_- \geq 0 \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} S_{+,-} f_-(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i\tau(t-t') + i\psi_{+,-}(x, x', \tau, \xi)} \\ \quad \left(1 - \frac{a'(x)\xi}{\xi_0} \right) f_-(x', t') dx' dt' d\xi d\tau \\ \xi_0 = [(\tau - i0)^2 - \xi^2]^{1/2}, \\ \text{Im } \xi_0 \geq 0, \quad \psi_{+,-} = (x - x')\xi + [a(x) - b(x')]\xi_0 \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} S_{-,+} f_+(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{i\tau(t-t') + i\psi_{-,+}(x, x', \tau, \xi)} \\ \quad \left(1 + \frac{b'(x)\xi}{\xi_0} \right) f_+(x', t') dx' dt' d\xi d\tau \\ \psi_{-,+} = (x - x')\xi - (b(x) - a(x'))\xi_0 . \end{cases}$$

3ème étape : Transformation de F.B.I

On utilise la transformation de Bargman suivante :

$$(20) \quad T f(z, w, \lambda) = \int e^{\lambda x z - \lambda \frac{x^2}{2} - \frac{\lambda}{2}(w-t)^2} f(t, x) dt dx$$

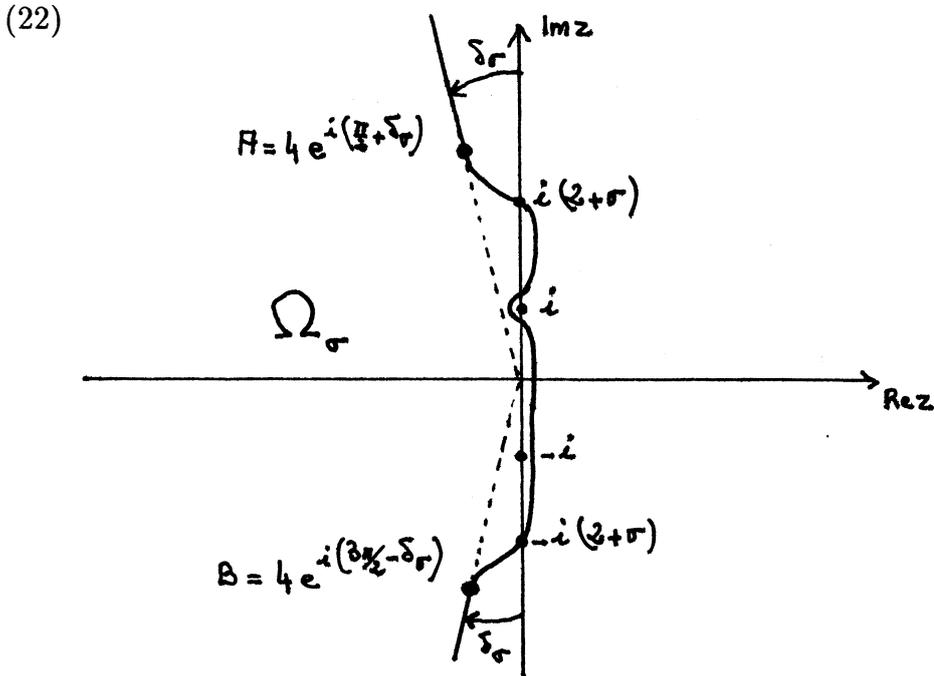
pour $f \in L^2(\mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_t)$, on a alors la formule d'inversion

$$(21) \quad f(t, x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \int_{\Sigma} e^{-\lambda x z + \lambda \frac{z^2}{2} + \frac{\lambda}{2} (t-w)^2} T f(w, z) dw dz$$

où $\Sigma = \left\{ w = t - i\alpha, z = x - i\theta, (\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est orienté de sorte que $dw dz = d\alpha d\theta$ et où l'intégrale est oscillante.

Ici, on travaille près de $w_0 = -i$, et on pose $\varphi_0(w) = \frac{1}{2} (\text{Im } w)^2$. Pour $\sigma \in [0, 1]$ on construit une chaîne d'espaces de Banach H_σ de fonctions holomorphes d'une variable z comme suit.

Soit Ω_σ l'ouvert du plan complexe



de sorte $\Omega_\sigma \subset \Omega_{\sigma'}$ pour $\sigma < \sigma'$, $\text{dist}(\Omega_\sigma, \Omega_{\sigma'}^c) \simeq (\sigma' - \sigma)C_0$, ($C_0 > 0$), $\delta_\sigma = \sigma\delta_1 + (1 - \sigma)\delta_0$, ($0 < \delta_1 < \delta_0$ petits), $\text{dist}(i, \Omega_\sigma) \geq C_1 > 0$, $\text{dist}([i(1 - \varepsilon_0), -i(1 + \varepsilon_0)], \Omega_\sigma^c) \geq C_1 > 0$ où ε_0 est petit. On définit alors H_σ comme l'espace des fonctions holomorphes f sur Ω_σ , localement bornées jusqu'au bord L^2 sur les demi-droites munies de la norme :

$$(23) \quad \|f\|_\sigma = \sup \left\{ |f(z)| ; z \in \Omega_\sigma, |z| \leq 5 \right\} + \sup \left\{ \left(\int_4^\infty |f(\rho e^{i\alpha})|^2 d\rho \right)^{1/2} ; \alpha \in \left[\frac{\pi}{2} + \delta_\sigma, \frac{3\pi}{2} - \delta_\sigma \right] \right\}.$$

On note $H_{\varphi_0}^m(w, H_\sigma)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions $f(w, z, \lambda)$ holomorphes en w près de w_0 , $z \in \Omega_\sigma$ telles que :

$$\sup_w \left\| f(w, \cdot, \lambda) e^{-\lambda\varphi_0(w)} \right\|_\sigma \leq \text{cte } \lambda^m.$$

D'après (11), (12) et (13), on peut supposer

$$(24) \quad (T f_{\pm})(w, \cos \gamma_{\pm} z, \lambda) \in H_{\varphi_0}^0(w, H_{\sigma})$$

pour tout $\sigma \in [0, 1]$, pour w près de w_0 .

On introduit aussi les opérateurs pseudo-différentiels sur H_{φ_0} à valeurs dans les opérateurs sur la chaîne H_{σ} de la forme :

$$(25) \quad \text{Op}(p)g(w, \cdot, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int e^{i\lambda(w-w')\tau} p(w, w', \tau, \lambda) g(w', \cdot, \lambda) dw' d\tau$$

où $p \simeq \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n} p_n(w, w', \tau, \lambda)$, p_n étant un opérateur qui envoie $H^{\sigma'}$ dans H^{σ} pour tout $\sigma < \sigma'$ et tel que

$$(26) \quad |p_n|_{\sigma, \sigma'} \leq AB^n \frac{n^n}{(\sigma' - \sigma)^n}$$

avec A, B indépendants de w, w', τ, λ .

En utilisant des développements asymptotiques dans $\text{Re } z < 0$, l'estimation a priori (24) et (12) et le principe du maximum on obtient :

$$(27) \quad T[1_{x \geq 0} Q_{\pm} f_{\pm}] \equiv J^{-1} \text{Op}(q_{\pm}) J(T f_{\pm}) \text{ mod } e^{-c\lambda} \text{ dans } H_{\varphi_0}(\cdot, H_{\sigma})$$

$$(28) \quad q_{\pm} \sim \sum \lambda^{-n} q_{\pm, n}; q_{\pm, n}(a) \\ = \sum_{j+k=n} \partial_z^j \int \frac{i}{2\pi(z-z')} \frac{1}{j!k!} \partial_x^j \partial_{x'}^k \sigma_{\pm} \Big|_{\substack{x=x'=0 \\ \xi=iz}} \partial_z^k a dz'$$

avec

$$\sigma_+ = \left(\frac{\xi}{\xi_+} - \mu \right) \left(\frac{\mu - a'(x)}{1 + \mu^2} \right), \\ \sigma_- = \left(\frac{\xi}{\xi_-} + \nu \right) \left(\frac{b'(x) - \nu}{1 + \nu^2} \right)$$

où J est la transformation canonique

$$(29) \quad J(f)(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\lambda \frac{y^2}{2}} f(x+y) dy \simeq \sum_{\ell} \frac{1}{\lambda^{\ell} 2^{\ell} \ell!} \partial^{2\ell} f(x)$$

$$(30) \quad J^{-1}(f)(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{\lambda \frac{y^2}{2}} f(x+y) \frac{dy}{i} \simeq \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{\lambda^{\ell} 2^{\ell} \ell!} \partial^{2\ell} f(x).$$

En utilisant la formule de Cauchy, la structure de σ_{\pm} et une inégalité de Hardy on vérifie que $q_{\pm, n}(\tau)$ vérifie des estimations de type (26). De plus on a $q_{\pm, 0} = 0$.

On obtient aussi :

$$(31) \quad T[1_{x \geq 0} S_{+, -} f_-] = \text{Op}(q_{+, -}) T(f_-) \text{ mod } e^{-c\lambda} \text{ dans } H_{\varphi_0}(\cdot, H_{\sigma}).$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{+,-} = \sum \lambda^{-n} q_{+,-,n}(\tau, \lambda) \\ q_{+,-,n} = \sum_{j+k=n} \int \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{[z + i(\xi_+ a_+ \xi_0)]^{k+1}} \cdot \partial_x^k B \Big|_{x=0} \\ \quad \cdot \frac{1}{j!} \partial_{x'}^j \left[e^{\lambda \phi(x')} \partial_z^j T u(x' - i(\xi_+ b_- \xi_0)) \right] \Big|_{x'=0} d\xi \\ a_+ = a'(0); b_- = b'(0) \\ B(x, \tau, \xi, \lambda) = e^{-\lambda \frac{x^2}{2} + i\lambda \xi_0 [a(x) - x a_+]} \left[1 - \frac{a'(x) \xi}{\xi_0} \right] \\ \phi(x') = -\frac{x'^2}{2} - i \xi_0 [b(x') - x' b_-] \end{array} \right.$$

et la formule analogue pour $T \left[1_{x \geq 0} S_{-,+} f_+ \right] = \text{Op}(q_{-,+}) T(f_+)$.

Ici il est important de remarquer qu'on peut choisir le profil des bords $\partial \Omega_\sigma$ de sorte que $q_{+,-,n}$ envoie H_0 dans H_1 (i.e. $q_{+,-,n}$ régularise en variable z) et vérifie

$$(33) \quad |q_{+,-,n}|_{0,1} \leq A B^n n!$$

où A et B sont indépendants de τ, λ (pour τ assez près de 1).

Les intégrales dans (28) et (32) sont calculées sur une déformation du contour en ξ

$$(34) \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \quad \quad \quad \curvearrowleft \quad \quad \quad \curvearrowright \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad -1 \quad \quad \quad +1 \end{array}$$

Le système (15) se réécrit alors, avec $a_\pm = J(T f_\pm)$, $b_\pm = J(Th_\pm)$, sous la forme :

$$(35) \quad \begin{cases} a_+ - \text{Op}(q_+) a_+ - J \text{Op}(q_{+,-}) J^{-1} a_- = b_+ \\ a_- - \text{Op}(q_-) a_- - J \text{Op}(q_{-,+}) J^{-1} a_+ = b_- \end{cases}$$

En utilisant (29), (30) et (33), on peut écrire $J \text{Op}(q_{\pm,\mp}) J^{-1} = \text{Op}(\tilde{q}_{\pm,\mp})$ en restreignant les valeurs de σ dans la chaîne d'espaces à $\sigma \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$;

le système (35) devient alors un système pseudo-différentiel ordinaire sur $H_{\varphi_0}(w, H_\sigma)$ et on est ramené à vérifier que son symbole principal est inversible.

4ème étape : Inversion du symbole principal

Le symbole principal du système (35) est l'opérateur sur $[H_\sigma]^2$ (avec $\xi = iz \in i\Omega_\sigma$)

$$(36) \quad \text{Id} - A = \text{Id} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \rho S & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\rho = \frac{\cos \gamma_+}{\cos \gamma_-}$ et S est l'opérateur

$$(37) \quad Sv(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\xi + i(\eta \cos \xi + \eta_0 \sin \gamma)} \left(\cos \gamma - \frac{\eta}{\eta_0} \sin \gamma \right) v(\eta) d\eta$$

où Γ est contour de type (34). Soit R_α l'opérateur de rotation $R_\alpha(z) = v(e^{i\alpha}z)$. Posons $S_\alpha = R_\alpha S R_{-\alpha}$; alors S_α est défini par (37) avec η_0 remplacé par $\eta_\alpha = (e^{-2i\alpha} - \eta^2)^{1/2}$ et on a de plus $R_\alpha \circ Sv \in$ Fourier $(L^2(\mathbb{R}_+))$ pour $v \in H_\sigma$ pour $\alpha > 0$ assez petit. Posons aussi $A_\alpha = R_\alpha A R_{-\alpha}$. Alors pour k assez grand $A^k R_{-\alpha}$ envoie Fourier $(L^2(\mathbb{R}_+))$ dans H_1 . Enfin l'équation

$$(38) \quad (1 - A_\alpha) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

est équivalente à la résolution du système à coefficients constants

$$(39) \quad \begin{cases} (\Delta + e^{-2i\alpha})U = 0 \text{ dans} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{y = a_+x, x \geq 0\} \cup \{y = b_-x, x \geq 0\} \\ U|_{y-a_+x=0^+} = U|_{y-a_+x=0^-} \\ U|_{y-b_-x=0^+} = U|_{y-b_-x=0^-} \\ D_a^- U = -\frac{\phi}{2}, \quad D_b^+ U = -\frac{\psi}{2} \\ V = D_a^+ U - D_a^- U, \quad W = D_b^- U - D_b^+ U \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \widehat{V}(\sqrt{1+a^2}\xi) = v(\xi) & \widehat{\phi}(\sqrt{1+a^2}\xi) = \varphi(\xi) \\ \widehat{W}(\sqrt{1+b^2}\xi) = w(\xi) & \widehat{\psi}(\sqrt{1+b^2}\xi) = \psi(\xi) \end{cases}$$

$$(41) \quad \begin{cases} D_a^\pm = \partial_y - a\partial_x|_{y-ax=\pm 0} \\ D_b^\pm = b\partial_y - \partial_x|_{y-bx=\pm 0} \end{cases}$$

On vérifie alors que le système (39) où (ϕ, ψ) est la donnée et (V, W) l'inconnue est bien posé dans $[L^2(\mathbb{R}_+)]^2$. Donc $1 - A_\alpha$ est inversible et on écrit l'inverse de $1 - A$ sous la forme :

$$(42) \quad (1 - A)^{-1} = 1 + A + \dots + A^k + A^k R_{-\alpha} (1 - A_\alpha)^{-1} R_\alpha A.$$

Références

- [1] GARNIR : *Fonction de Green pour l'opérateur métaharmonique posé dans un angle ou un dièdre*, Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège, 1952, 119-140, 207-231, 328-344.
- [2] CHEEGER-TAYLOR : *Diffraction by conical singularities I, II*, C.P.A.M., Vol. 35, 1982, 275-331, 487-529.
- [3] ROULEUX : *Diffraction analytique sur une variété à singularités coniques*, C.P.D.E., 11 (9), 1986, 947-988.
- [4] VARENNE : *Diffraction par un angle ou un dièdre*, C.R.A.S., Paris, Série A, t. 290, 1980, 175-178.
- [5] UCHIDA : *Microlocal Analysis of Diffraction at the Corner of an obstacle*, Séminaire d'Equations aux Dérivées Partielles à l'Ecole Polytechnique, 1989-90.