Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Zuily

Existence locale et régularité du problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère

Journées Équations aux dérivées partielles (1989), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1989____A21_0>

Existence locale et régularité du problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère

CLAUDE ZUILY
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE D'ORSAY, BÂT. 425
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

1. Introduction.

On se propose de décrire, dans cet exposé, certains résultats récents concernant l'existence locale et la régularité des solutions du problème de Dirichlet pour des équations de Monge-Ampère du type

$$\det\left(u_{ij} + a_{ij}(x, u, \nabla u)\right) = K(x) f(x, u, \nabla u) \tag{1.1}$$

où u est une fonction réelle, $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, a_{ij}, K, f sont des fonctions réelles et $f(x, u, p) > 0 \;\; \forall (x, u, p)$.

On s'intéresse soit au problème local au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}^n$, soit au problème de Dirichlet dans un ouvert régulier Ω i.e.

$$u \big|_{\partial\Omega} = \phi \, . \tag{1.2}$$

Il est bien connu que ce type d'équations intervient dans le problème du plongement isométrique local des variétés Riemaniennes dans $\mathbf{R}^3$ (alors $n = 2$) ainsi que dans celui de trouver des bouts de variétés Riemaniennes à courbure de Gauss donnée.

Bien évidemment ces problèmes ont été abondamment étudiés et pour n'oublier personne nous renvoyons le lecteur à l'abondante bibliographie de l'article de CAFFARELLI-NIRENBERG-SPRUCK [**C.N.S**].

Passons en revue les principaux résultats classiques de la théorie. Concernant le problème local il est connu depuis longtemps que l'équation (1) admet des solutions régulières lorsque $K(x_0) \neq 0$. Les études plus récentes concernent donc les cas où la courbure peut s'annuler.

Quant au problème de Dirichlet l'article mentionné ci-dessus [**C.N.S**] a été le point d'orgue d'une longue série de travaux dus à différents auteurs. Rappelons en le contenu.

Soit Ω un ouvert borné strictement convexe à bord C^∞ et $K(x)$ une fonction $C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que $K(x) > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Le résultat principal de [**C.N.S**] est alors que le problème

$$\begin{cases} \det(u_{ij}) = K(x) \\ u \big|_{\partial\Omega} = \phi \in C^\infty(\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.3}$$

admet une solution unique, strictement convexe, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Pour motiver un peu l'objet de notre étude, notons que ce résultat est étendu dans **[C.N.S]** au cas où le second membre de (1.3) est de la forme $f(x,u,\nabla u) > 0$ pourvu que le problème correspondant possède une sursolution $\bar{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ i.e.

$$\begin{cases} \det(\bar{u}_{ij}) \geq f(x,\bar{u},\nabla\bar{u}) \\ \bar{u}\,|_{\partial\Omega} = \phi \ . \end{cases}$$

Une telle sursolution existe si $|f(x,u,\nabla u)| \leq C(1+|\nabla u|^2)^{n/2}$, ce qui n'inclue pas le cas de la courbure de Gauss où $f(x,u,\nabla u) = K(x)\cdot(1+|\nabla u|^2)^{\frac{n+2}{2}}$. En effet dans ce cas TRUDINGER et URBAS **[T.U]** ont montré qu'une condition nécessaire (et suffisante) sur K ($K > 0$ dans Ω) pour que le problème admette une solution pour toute donnée ϕ est que

a) $\displaystyle\int_\Omega K(x)\,dx < \omega_n$

b) $K = 0$ sur $\partial\Omega$

où ω_n est la mesure de la boule unité. Il est donc d'un certain intérêt d'étudier les équation (1.1), (1.2) lorsque $K > 0$ dans Ω et $K = 0$ sur $\partial\Omega$.

Passons maintenant aux résultats plus récents.

En dimension $n = 2$, C.S. LIN **[L1]**, **[L2]** a étudié les deux cas suivants :

i) $K \geq 0$ près de x_0

ii) $K(x_0) = 0$, $dK(x_0) \neq 0$.

Il a démontré l'existence de solutions H^s mais dans des ouverts Ω_s qui diminuent avec s ce qui empêche de prendre $s = +\infty$.

En 1987 j'avais montré en collaboration avec J. HONG **[H.Z1]** comment en dimension n quelconque on pouvait avoir des solutions C^∞ dans le cas i). Dans cet exposé je voudrais décrire le cas ii). Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME 1.

Supposons que K, a_{ij}, f soient C^∞ de leurs arguments près de x_0 et que

$$K(x_0) = 0 \ , \ dK(x_0) \neq 0$$

le problème (1) *admet alors une solution u C^∞ au voisinage de x_0.*

Concernant le problème aux limites voici l'énoncé du résultat obtenu en collaboration avec J. HONG.

THÉORÈME 2. (J. HONG-C.ZUILY)

Supposons que K, a_{ij}, f soient C^∞ dans $\bar{\Omega}$ et que

$$K > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ , \quad K = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad dK \neq 0 \ .$$

Soit u une solution convexe du problème (1.1), (1.2) *telle que*

$$(*) \qquad \partial\Omega \quad \text{soit non caractéristique} \ .$$

Alors si $n = 2$ (resp. $n \geq 3$), $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (resp. $u \in C^3(\bar{\Omega})$) implique $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Concernant le théorème 2 remarquons qu'il n'est pas clair de pouvoir supprimer la condition $(*)$. Cependant si Ω est strictement convexe (au sens où le Hessien est $\gg 0$) $\partial\Omega$ est non caractéristique pour toute solution $u \in C^3(\bar{\Omega})$ du problème de Dirichlet avec $\phi = 0$.

Il reste cependant un trou entre les meilleurs résultats d'existence de **[T.U]** i.e. $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ et le résultat énoncé ci-dessus. Enfin, la raison de la différence du seuil de régularité sur u imposé entre $n = 2$ et $n = 3$ est qu'en dimension $n = 2$ on dispose d'une meilleure linéarisation du problème fournie par la transformation d'Ampère.

2. Quelques idées de preuve.

La preuve du théorème 1 est basée sur un résultat récent de J. GOODMAN-D. YANG **[G.Y]** qui est une extension au cas non linéaire d'un résultat de DUISTERMAAT-HÖRMANDER **[D.H]**.

Rappelons tout d'abord qu'un opérateur différentiel linéaire P est dit de type principal réel en x_0 si il existe un voisinage $W_{x_0} = W$ tel que toute bicaractéristique nulle de p passant par un point de W quitte W dans les deux sens en un temps fini. (Remarquons que cette notion est plus forte que celle qui requiert que dp ne soit pas parallèle au champ radial comme le montre l'exemple $p = x\eta - y\xi$). DUISTERMAAT et HÖRMANDER ont montré que ces opérateurs étaient semi-globalement résolubles (i.e. globalement résolubles dans les ouverts W_{x_0} ci-dessus) dans le C^∞ et ont construit des parametrixes.

J. GOODMAN et S. YANG **[G.Y]** ont alors prouvé ce qui suit.

Considérons une équation non linéaire

$$(2.1) \qquad F(x, u, \nabla u, \ldots, D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m} = g(x) \ .$$

Supposons que l'on puisse trouver $u_0 \in C^\infty$ tel que le linéarisé L_{u_0} en u_0 de l'équation (2.1) soit de type principal réel en x_0. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$, $\delta > 0$ tel que $\forall g \in C^\infty$ avec

$$\|g - F(x_0, u_0, \ldots, D^\alpha u_0)\|_k < \delta$$

l'équation (2.1) admet une solution locale $u \in C^\infty$ près de x_0.

La preuve de ce résultat est basée sur l'algorithme de Nash-Moser. La chose importante étant de construire un inverse à L_u pour u près de u_0. Le point clé de l'argument de **[G.Y]** est le suivant : Soient p et p_0 deux symboles de type principal réel proches i.e. $\|p - p_0\| < \varepsilon$ dans une norme de symboles convenable. Il existe alors une transformation canonique **globale** qui transforme p_0 en p (et pas seulement microlocale).

Le théorème 1 résulte alors du :

LEMME 3.

Si $K(x_0) = 0$, $dK(x_0) \neq 0$ il existe $u_0 \in C^\infty$ tel que L_{u^0} soit de type principal réel en x_0.

Nous renvoyons à **[Z]** pour les détails de ce lemme.

Passons maintenant aux problèmes aux limites. La preuve se fait en deux temps. On commence par prouver que toute solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est $C^{2+\alpha}$ pour $\alpha > 0$ puis, à partir de cela que u est C^∞. Après plusieurs réductions du problème et en utilisant la transformation d'Ampère en dimension deux : $u = z_x$, $v = y$ (où z est une solution de Monge-Ampère) et une transformation faisant intervenir la solution et destinée à redresser les caractéristiques du linéarisé (en dimension $n \geq 3$) on se ramène à étudier un opérateur du type

$$L = D_y^2 + y \sum_{j=1}^{n} a_j D_j D_y + y \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j + \sum b_j D_j + b D_y + c$$

où les a_{ij}, a_j, b_j, b, c sont des fonctions, continues dans $\bar{\mathbf{R}}_+^{n+1}$ dans l'étape 1 et C^α dans la deuxième étape, constantes hors d'un compact de $\bar{\mathbf{R}}_+^{n+1}$ et la matrice (a_{ij}) est définie positive.

On commence par montrer une estimation maximale dans les espaces L^p : Il existe $C > 0$ t.q. $\forall u \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}^{n+1})$, $\forall p \in]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \|D_y^2 u\|_{L^p} + \left\|y^{1/2} \Lambda D_y u\right\|_{L^p} + \|y \Lambda^2 u\|_{L^p} \\ + \left\|\Lambda^{4/3} u\right\|_{L^p} + \left\|\Lambda^{2/3} D_y u\right\|_{L^p} \\ \leq C (\|Lu\|_{L^p} + \|u\|_{L^p} + \|u(x,0)\|_{W^{2,p}}) \end{aligned}$$

où C dépend de sup $\{/(x,y) \in \operatorname{supp} u\}$ et Λ a pour symbole $(1+|\xi|^2)^{1/2}$. On montre ensuite une estimation analogue où les L^p sont remplacés par les $\dot{C}^\alpha$ (espaces de Hölder tangentiels). Les détails sont assez techniques et se trouvent dans **[H.Z2]**. Notons que des résultats de ce type dans les espaces de Besov $B^{s,p}$, $s > 0$ et dans les Hölder, ont été obtenus par EL BARAKA **[B]**.

Bibliographie

[BA] A.E. BARAKA, *Estimations L_p et Holderiennes pour certaines classes d'opérateurs elliptiques singuliers,* Thesis University of Rennes, **(1987)**.

[C.N.S] L. CAFFARALLI-L. NIRENBERG-SPRUCK, *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations I : Monge-Ampère equations,* Comm. Pure and Applied Math. XXXVII, **(1984)**, 369-402.

[G.Y] J.B. GOODMANN-D. YANG, *Local solvabiliry of non linear partial differential equations of real principal type,* Preprint.

[H.Z1] J. HONG-C. ZUILY, *Existence of C^∞ local solutions for the Monge-Ampère equation,* Invent. Math. 89, **(1987)**, 645-661.

[H.Z2] J. HONG-C. ZUILY, *L^p and Hölder estimates for a class of degenerate elliptic boundary value problems. Application to the Monge-Ampère equation,* Preprint.

[L1] C.S. LIN, *The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemanian Manifolds with non negative curvature,* J. Diff. Geom. 21, **(1985)**, 213-230.

[L2] C.S. LIN, *The local isometric embedding ... with Gaussian curvature changing sign cleanly,* Comm. Pure and Appl. Math., Vol. XXXIX, **(1986)**, 867-887.

[TU] N. TRUDINGER, J. URBAS, *The Dirichlet problem for the equation of prescribed Gauss curvature,* Bull. Austr. Math. Soc., Vol 28, **(1983)**, 217-231.

[Z] C. ZUILY, *Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle,* Annali Scuola Norm. di Pisa (à paraître).