Journées Équations aux dérivées partielles

Abderemane Mohamed
Jean Nourrigat

Borne inférieure du spectre de l'opérateur de Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A15_0>

BORNE INFERIEURE DU SPECTRE DE L'OPERATEUR DE SCHRODINGER

A. Mohamed et J.Nourrigat

Le point de départ de ce travail est un théorème de Fefferman-Phong [1] sur l'équation de Schrödinger avec champ électrique polynomial. Nous généralisons ce résultat en introduisant aussi un champ magnétique , puis en considérant des potentiels qui ont seulement un "comportement polynomial".

1.Opérateurs à coefficients polynomiaux.

L'un des résultats de [1] compare la borne inférieure $\lambda_o(V)$ du spectre de l'opérateur $P = -\Delta + V(x)$, où V est un polynôme ≥ 0 , à une quantité $\lambda_1(V)$ explicitement associée à V de la manière suivante , en notant $Q(x , h)$ la boule de centre x et de rayon h dans $\mathbb{R}^n$.

$$(1) \qquad \lambda_1(V) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \inf_{x>0} \left(\frac{1}{h^n} \int_{Q(x,h)} V(y)\, dy + \frac{1}{h^2} \right)$$

Plus précisément , on pose :

$$(2) \qquad \lambda_o(V) = \inf_{\substack{\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \psi\neq 0}} \frac{(P\psi , \psi)}{\|\psi\|^2}$$

Le résultat suivant est démontré dans [1] :

<u>Théorème 1</u> Pour tout entier r ,il existe C>1, tel qu'on ait , pour tout polynôme $V\geq 0$, de degré $\leq r$:

$$(3) \qquad C^{-1} \leq \frac{\lambda_1(V)}{\lambda_o(V)} \leq C$$

Tout d'abord , nous allons associer au potentiel V une autre quantité , qui sera aussi équivalente à $\lambda_1(V)$. On pose :

(4) $$M(x) = \sum_{|\alpha|\leq r} |\partial_x^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}}$$

En utilisant des équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré $\leq r$, on montre facilement la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u> Pour tout entier r, il existe $C>0$ tel que, pour tout polynôme $V\geq 0$ de degré $\leq r$, on ait, avec les notations ci-dessus :

(5) $$C^{-1} \leq \frac{\lambda_1(V)}{\inf_{x\in\mathbb{R}^n} M(x)^2} \leq C$$

On peut alors préciser le Théorème 1 .

<u>Proposition 3.(cf. [3])</u> Pour tout entier r, il existe $C>0$ tel que, pour tout polynôme $V\geq 0$ de degré $\leq r$, on ait, avec les notations ci-dessus :

(6) $$\|M(x) f\|^2 \leq (Pf, f) \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Si l'on introduit un champ magnétique B, l' opérateur devient :

(7) $$P = \sum_{j=1}^{n} (D_{x_j} - A_j(x))^2 + V(x)$$

où le champ $B = (B_{jk})$ est lié au potentiel A par :

(8) $$B_{jk}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

On pose maintenant, si les A_j et V sont des polynômes de degré $\leq r$:

(9) $$M(x) = \sum_{|\alpha|\leq r} \left(|\partial^\alpha B(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} + |\partial^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} \right)$$

On a l' analogue de la Proposition 3 :

<u>Proposition 4.</u> (cf. [3]) Pour tout entier r, il existe $C>0$ tel que, pour tout polynômes $V\geq 0$ et $A_1, \ldots, A_n$, de degré $\leq r$, on ait, avec les notations ci-dessus :

(10) $$\|M(x) f\|^2 \leq (Pf, f) \qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

La borne inférieurs de $M(x)^2$ est donc un équivalent de la borne inférieure du spectre de P, définie comme en (2) .

En utilisant des équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré $\leq r$,on peut interpréter la formule (10) , comme la formule (1) , en considérant les moyennes du symbole de l'opérateur P dans les images de la boule unité de $\mathbb{R}^{2n}$ par certaines applications symplectiques .

On peut rapprocher les inégalités (6) et (10) d' un résultat antérieur de [2] , où l'on considère un système $X_1 , \dots , X_p$ d'opérateurs dans $\mathbb{R}^n$, chacun d'eux étant de la forme suivante :

$$(11) \quad X = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + A_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n} + i B(x)$$

où les A_j et B sont des polynômes réels , ne dépendant que des variables indiquées . On suppose aussi qu'il existe un entier r tel que les commutateurs itérés de longueur $\geq r$ des opérateurs $X_1 , \dots , X_p$ sont nuls . Les systèmes de cette forme servent de modèles microlocaux pour les systèmes pseudodifférentiels sous-elliptiques (cf.[4]).

On associe à ce système une fonction poids $M(x)$ de la manière suivante :

$$(12) \quad M(x) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|I| \leq r} |X_I(x, \xi)|^{1/|I|}$$

où l'on note X_I les commutateurs itérés de $X_1 , \dots , X_p$, et $|I|$ la longueur du crochet correspondant . L'analogue des inégalités (6) et (10) s'énonce ainsi :

<u>Proposition 5.</u> (cf. [2]) Pour tout entier r , il existe $C>0$ tel que , sous les hypothèses ci-dessus , on ait :

$$(13) \quad \|M(x) f\|^2 \leq C \left(\sum_{j=1}^{p} \|X_j f\|^2 \right) \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Notons que la constante C ne dépend que de l'entier r , et non des opérateurs $X_1 , \dots , X_p$.

Les inégalités (6) , (10) et (13) donnent des critères simples pour les propriétés d'injection compacte .Dans le cas de la Proposition 4 , posons :

$$D = \{ f \in L^2 \ , Pf \in L^2 \}$$

<u>Corollaire 6</u> Sous les hypothèses de la Proposition 4 , l'injection de l'espace D dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte si , et seulement si la fonction $M(x)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| \to +\infty$.

La condition du Corollaire 6 est nécessaire , car , si elle n'est pas vérifiée , on peut faire une rotation d'axes telle que $B(x)$ et V (x) deviennent indépendants de l'une des coordonnées et l'injection de D dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ ne peut évidemment pas être compacte dans ce cas .

2 . Potentiels à comportement polynomial .

On suppose seulement ,(avec les notations de la Proposition 4) , que $V(x)$ et $B(x)$ sont dans $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$ .Le comportement polynomial va s'exprimer de la manière suivante . En posant :

(14) $$m^*(x) = 1 + \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha V(x)| + \sum_{|\alpha| \leq r-1} |\partial^\alpha B(x)|$$

on suppose qu'il existe $C>0$ tel que :

(15) $$\sum_{|\alpha| = r+1} |\partial^\alpha V(x)| + \sum_{r \leq |\alpha| \leq r+1} |\partial^\alpha B(x)| \leq C\, m^*(x)$$

On définit maintenant la fonction poids $M(x)$ de la manière suivante :

(16) $$M(x) = 1 + \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} + \sum_{|\alpha| \leq r-1} |\partial^\alpha B(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}}$$

Théorème 7 (cf. [3]) Soient $V \geq 0$ et $A_1, \dots, A_n$ des fonctions vérifiant les hypothèses ci-dessus . Alors , il existe $C>0$ tel que :

(17) $$\| M(x) f \|^2 \leq C \left((Pf, f) + \|f\|^2 \right) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

De plus , l'injection du domaine D dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte si , et seulement si la fonction $M(x)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| \to \infty$.

On trouvera dans [3] un encadrement de la fonction $N(\lambda)$ associée à l'opérateur P quand la condition ci-dessus est satisfaite .

[1] C.L.Fefferman The uncertainty principle . Bull. A.M.S. 9 (2) (1983) p. 129-206.

[2] J. Nourrigat Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents . J.Funct. Analysis 74 (2) (1987) p. 300-327 .

[3] A.Mohamed , J.Nourrigat Encadrement du $N(\lambda)$ pour un opérateur de Schrödinger avec des champs électrique et magnétique . Préprint.

[4] J.Nourrigat Systèmes sous-elliptiques . Préprint.