JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DIDIER ROBERT
H. TAMURA

Limite semi-classique de l'amplitude de diffusion

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A11_0>

LIMITE SEMI-CLASSIQUE DE L'AMPLITUDE DE DIFFUSION

D. ROBERT
Université de Nantes
France

H. TAMURA
Université de Nagoya
Japon

I- L'amplitude de diffusion

La manière la plus directe et naturelle d'introduire l'amplitude de diffusion est la suivante. Considérons l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$(1) \qquad -\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = \lambda.\Psi\ , \qquad \lambda > 0$$

Δ étant l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$ et V un potentiel.

On pose : $h = \hbar/\sqrt{m}$

Soit $\omega \in S^{n-1}$ une direction fixée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Cherchons une solution de (1) vérifiant la condition de radiation sortante :

$$(2) \qquad \Psi(x) = \exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h} < x,\omega > \right) + A.\frac{\exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h}|x|\right)}{|x|^{(n-1)/2}} + o(|x|^{(1-n)/2})$$

pour $|x| \to +\infty$, $\theta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ étant fixé.

Pour V assez régulier et vérifiant la condition de décroissance : $V(x) = 0(|x|^{-\rho})$, $\rho > \frac{n+1}{2}$ on montre ([Re-Si]) que le problème {(1)+(2)} a une solution unique qui définit l'amplitude de diffusion A, fonction de ω, θ, λ, h, que l'on notera :

$$A(\omega \to \theta\ ; \lambda, h)\ .$$

ω étant une direction entrante, θ une direction sortante. Rappelons que le terme sphérique

$$|x|^{(1-n)/2}\ .\ \exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda}\ .\ |x|}{h}\right)$$

provient du noyau de Green de l'opérateur : $-\frac{h^2}{2}\Delta-\lambda$ $(n \geq 3)$.

Malheureusement cette définition naturelle ne marche plus pour des potentiels plus généraux, à courte portée.

A partir de maintenant on fait sur V l'hypothèse :

$$(V_\rho)\left[\begin{array}{l} V \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ on a :} \\ \partial_x^\alpha V(x) = O(|x|^{-\rho-|\alpha|}) \text{ où } \rho \text{ est fixé } > 1. \end{array}\right.$$

Sous cette hypothèse A se définit par l'intermédiaire du noyau de la matrice de diffusion.

Fixons quelques notations :

$P(h) = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$, $\qquad P_0(h) = -\frac{h^2}{2}\Delta$

$U(t,h) = \exp(-i\frac{t}{h}\, P(h))$, $\quad U_0(t,h) = \exp(-\frac{it}{h}\, P_0(h))$

Les dynamiques U et U_0, sous l'hypothèse (V_ρ), engendrent un système de diffusion décrit par un opérateur de diffusion S(h) (unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$)

$S(h) : \Psi_-^0 \to \Psi_+^0$ où Ψ_-^0 et Ψ_+^0 sont définis par la propriété suivante :

il existe $\Psi \in \mathcal{H}_{ac}(P(h))$ de sorte que :

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|U_0(t,h)\, \Psi_\pm^0 - U(t,h)\Psi\| = 0$$

où $\mathcal{H}_{ac}(P(h))$ désigne le sous-espace absolument continu de P(h).

Soit $\mathcal{J}_h$ l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(]0,+\infty[, L^2(S^{n-1}))$, diagonalisant $P_0(h)$.

On définit alors la <u>matrice de diffusion</u> à l'énergie $\lambda > 0$ comme étant l'opérateur unitaire $S(\lambda,h)$ de $L^2(S^{n-1})$ tel que :

$(\mathcal{J}_h \,.\, S(h)\, \mathcal{J}_h^* u)\,(\lambda,\omega) = (S(\lambda,h)u(\lambda,.))(\omega)$

pour tout $\omega \in S^{n-1}$

$S(\lambda,h)$ a la structure suivante :

$$S(\lambda,h) = I_d - 2i\pi . T(\lambda,h)$$

où $T(\lambda,h)$ est un opérateur compact dans $L^2(S^{n-1})$, de noyau distribution C^∞

en dehors de la diagonale de $S^{n-1}\times S^{n-1}$ ([Is-Ki]).

Le lien avec l'amplitude de diffusion est le suivant :

(3) $\qquad A(\omega \to \theta ; \lambda,h) = C(\lambda,h).T(\theta,\omega ; \lambda,h)$

$\omega \neq \theta$, $C(\lambda,h) = -2\pi.(2\lambda)^{-(n-1)/4}(2\pi h)^{(n-1)/2}.e^{-i(n-3)\pi/4}$

est une constante de normalisation

(3) sert de définition pour A sous l'hypothèse (V_ρ)

Notre objectif ici est de décrire le comportement de A lorsque $h\downarrow 0$. Une version plus détaillée de ce travail est à paraître ($[\text{Ro-Ta}]_2$). On s'attend naturellement à retrouver des quantités liées à la mécanique classique, en vertu du principe de correspondance de Böhr. Nous allons maintenant rappeler des éléments de la théorie de la diffusion en mécanique classique (Hunziker [Hu], Simon [Si]).

II- Diffusion en mécanique classique

Les trajectoires classiques sont les solutions du système hamiltonien :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = p & ; \qquad \dfrac{dp}{dt} = -\nabla V(q) \\ q(0) = x & ; \qquad p(0) = \xi \end{cases}$$

Soit $\lambda > 0$ un niveau d'énergie <u>non captif</u> c'est-à-dire vérifiant :

(6) $\qquad \forall R > 0 \qquad \exists T(R) > 0 \qquad$ tel que :

$$\left\{ |x| < R,\ |t| > T(R),\ \frac{|\xi|^2}{2} + V(x) = \lambda \right\} \Rightarrow |q(t)| > R$$

L'opérateur de diffusion $S_{c\ell}$ en mécanique classique est défini de manière analogue à la situation quantique :

$$S_{c\ell} : (a_-, b_-) \to (a_+, b_+)$$

où

$$(a_\mp, b_\mp) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$$

et

(7) $$\lim_{t\to\pm\infty} (|q(t)-a_\pm - b_\pm .t| + |p(t)-b_\pm|) = 0$$

avec (q,p) vérifiant (5) et (6) (en particulier (q,p) est une trajectoire d'énergie $\lambda > 0$, <u>non captive</u>).

Notons que par la conservation de l'énergie on a :

$$|b|^2 = 2\lambda$$

$S_{c\ell}$ est une transformation canonique dans $T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$.

Pour préparer l'énoncé de notre résultat nous introduisons une hypothèse complémentaire.

Fixons une direction entrante $\omega \in S^{n-1}$. Soit Λ_ω l'hyperplan vectoriel orthogonal à ω.

La particule classique "libre" issue de $z \in \Lambda_\omega$ (à $t=0$), d'énergie $\lambda > 0$ et de direction ω, voyage sur la trajectoire :

$$t \to (\sqrt{2\lambda}\,\omega t + z, \sqrt{2\lambda}.\omega)$$

Posons : $S_{c\ell}(z, \sqrt{2\lambda}\,\omega) = (q_\infty(z,\lambda), \sqrt{2\lambda}\,.\,P_\infty(z,\lambda))$

avec : $P_\infty(z,\lambda) \in S^{n-1}$

$P_\infty(z,\lambda)$ indique la direction asymptotique de sortie $(t \to +\infty)$ de la trajectoire $q_1(t)$ de direction asymptotique d'entrée $\omega (t \to -\infty)$.

On définit alors la <u>densité angulaire du flux de sortie</u> :

$$d_{ang}(z,\lambda) = \left| \det \left(p_\infty, \frac{\partial p_\infty}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_\infty}{\partial z_{n-1}} \right) \right|$$

$(z_1, \dots, z_{n-1}) = z$ étant un système de coordonnées sur Λ_ω.

Notons que

$$\frac{\partial p_\infty}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_\infty}{\partial z_{n-1}}$$

sont des vecteurs tangents à S^{n-1} et que si $d\sigma(\theta)$ désigne l'élément d'aire euclidienne sur S^{n-1} on a :

$$d\sigma(\theta) = d_{ang}(z,\lambda).dz$$

Introduisons la définition suivant :

Définition :

Soit $\theta \neq \omega$. θ *est dit régulier si :*

$$p_\infty(z,\lambda) = \theta,\ z \in \Lambda_\omega \Rightarrow d_{ang}(z,\lambda) \neq 0$$

ie $\left\{ \frac{\partial p_\infty}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_\infty}{\partial z_{n-1}} \right\}$ *est une base de* $T_\theta S^{n-1}$.

Lorsque θ est régulier, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de θ sur S^{n-1} tel que l'équation en z : $p_\infty(z,\lambda) = \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} \in \mathcal{U}_\theta$ se résolve par : $z = W_j(\tilde{\theta},\lambda)$, $j = 1,\dots,\ell(\theta,\lambda)$.

On définit alors la section différentielle efficace (classique) par :

$$\sigma_{c\ell}(\omega \to \theta,\lambda) = \sum_{j=1}^{\ell_j(\theta,\lambda)} \frac{1}{d_{ang}(W_j(\theta,\lambda),\lambda)}$$

III- Le résultat.

Théorème :

Sous les hypothèses suivantes :

(i) (V_ρ) *(avec* $\rho > 1$*)*

(ii) $\lambda > 0$ *niveau d'énergie non captif*

(iii) $\omega \in S^{n-1}$ *étant fixé,* $\theta \in S^{n-1}$ *est régulier.*

On a l'asymptotique :

$$(*) \qquad A(\omega \to \theta\ ;\lambda,h) = \sum_{j=1}^{\ell_j(\theta,\lambda)} \frac{1}{\sqrt{d_{ang}(W_j(\theta,\lambda),\lambda)}}\, e^{i\left(h^{-1}S_j - \mu_j\frac{\pi}{2}\right)} + O(h)$$

pour $h \downarrow 0$

où :

$$S_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|p_1(t,W_j,\lambda)|^2}{2} - V(q_1(t,W_j,\lambda)) - \lambda \right) dt - \sqrt{2\lambda} < q_\infty(W_j, \lambda), \theta >$$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$ *étant l'indice de Maslov de la trajectoire* (q_1, p_1) *sur la variété lagrangienne décrite par :*

$$x = q_1(t,z,\lambda),\ \xi = p_1(t,z,\lambda),\ z \in \Lambda_\omega,\ t \in \mathbb{R}$$

(q_1, p_1) *étant la trajectoire introduite dans II.*

Commentaires :

1) *Sous les mêmes hypothèses on peut obtenir l'asymptotique complète en* h, $h \downarrow 0$ (*modulo* $O(h^\infty)$).

2) *Si* $\ell(\theta,\lambda) = 1$ (ie si $p_\infty(z,\lambda) = \theta$ *a une unique solution* z) (*) *implique :*

$$\lim_{h \downarrow 0} |A(\omega \to \theta, \lambda\ ;\ h)|^2 = \sigma_{c\ell}(\omega \to \theta, \lambda).$$

3) *Auparavant Vainberg [Va] et Protas [Pr] ont obtenu (*) lorsque*

$$V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et } \lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}^n} V(x)$$

puis Yajima [Ya] a obtenu un résultat semblable sous l'hypothèse (V_ρ) *au sens de la convergence* L^2 *en* λ *et* θ *sans faire l'hypothèse* (6) *sur* λ. *Ici le fait de fixer l'énergie* λ *nous a amené à faire cette hypothèse. Sans cela (cas par exemple du puits dans une île - Cf [Ge-Ma-Ra]) l'amplitude de diffusion est probablement exponentiellement grande (en* $O(e^{\gamma/h})$, $\gamma > 0$) *au voisinage des énergies résonantes dues à la présence de pôles de la matrice* S *très prêt de l'axe réel.*

IV- Schéma de démonstration du théorème (on renvoie à $[\text{Ro-Ta}]_2$ pour les détails)

1) On part d'une formule de représentation de l'opérateur $T(\lambda,h)$ due à Isozaki-Kitada ([Is-Ki]) :

$$T(\lambda,h) = T_1(\lambda,h) - T_2(\lambda,h)$$

où :

$$T_1(\lambda,h) = F_0(\lambda).J^*_{+a}(h)(K_{+b}(h) - K_{-b}(h)).F^*_0(\lambda)$$

$$T_2(\lambda,h) = F_0(\lambda)\, K^*_{+a}\, R(\lambda + io,h).(K_{+b}(h) + K_{-b}(h))F^*_0(h)$$

avec :

$$(F_0(\lambda)u)(\omega) = c_0(\lambda,h). \int e^{\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h} < x,\omega >} u(x)dx$$

J_{+a}, K_b étant des opérateurs intégraux de Fourier, localisés dans des zônes sortantes (+) entrantes (-) de l'espace de phase, associés à des fonctions de phase φ vérifiant l'équation de Hamilton Jacobi :

$$\frac{1}{2} |\nabla_x \varphi_{\pm}(x,\xi)|^2 + V(x) = \frac{|\xi|^2}{2}$$

plus une condition convenable à l'infini dans une zône sortante Σ_+ (respectivement entrante Σ_-).

Les zones entrantes (resp. sortantes) sont caractérisées par : $x.\xi \leq \sigma|x|.|\xi|$ (resp $x.\xi \geq \sigma|x|\,|\xi|$) pour un réel $\sigma \in]-1,1[$; $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash 0)$.

Les amplitudes a et b sont définies en résolvant des équations de transport.

2) Un argument de phase non stationnaire facile permet de se débarrasser de T_1 (ici seule la condition $\theta \neq \omega$ intervient).

3) En utilisant des contrôles de la résolvante et en tronquant en temps grâce à la condition (6) de <u>non capture</u> on se ramène à la construction d'une paramétrix globale pour $e^{-ith^{-1}P(h)}$ pour $|t| \leq T_0$, $T_0 > 0$ fixé, assez grand avec des données initiales oscillantes.

Pour voir cela on part de l'égalité :

$$(9)\qquad R(\lambda+io,h)=ih^{-1}.\int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t(\lambda-P(h))}dt+e^{ih^{-1}T\lambda}.R(\lambda+io,h).e^{-ih^{-1}T_0\,P(h)}$$

D'autre part, utilisant des arguments de commutateurs, des estimations microlocales sur $R(\lambda+io,h)$ et (8) on montre que :

$$(10)\qquad T_2(\theta,\omega\ ;\ \lambda,h)=<R(\lambda+io,h)g_{-b}\, e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a}\, e^{ih^{-1}\phi_+}>+O(h^{\infty})$$

où :

$$\phi_+=\phi_+(x,\sqrt{2\lambda}.\theta)$$

$$\phi_-=\phi_-(x,\sqrt{2\lambda}.\omega)$$

$$g_{\pm b}=e^{\pm ih^{-1}\phi_\pm}[\chi,P_0(h)]b_\pm\, e^{ih^{-1}\phi_\pm}$$

et $\chi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, Supp χ assez grand.

Utilisant (9), (10) et les propriétés de support de g_b on obtient :

$$(11)\quad T(\theta,\omega,\lambda,h)=ih^{-1}.\int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda}<U(t,h).g_{-b}.e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a}\, e^{ih^{-1}\phi_+}>dt+O(h^{\infty})$$

3) On applique la théorie de Maslov et on termine la démonstration à l'aide du théorème de la phase stationnaire. C'est à ce stade de la démonstration qu'intervient l'hypothèse θ régulier.

BIBLIOGRAPHIE

[Ge-Ma-Ro] C. Gérard-A. Martinez-D. Robert

Breit-Wigner formulas for the scattering phase and the total scattering cross sections in the semi-classical limit. Preprint

[Hu] Hunziker

The S-matrix in classical mechanics Comm. Math. Phys. 8, 282-299 (1968)

[Is-Ki] H. Isozaki-H. Kitada

Scattering matrices for two body Schrödinger operators-Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo 35 (1985) 81-107

[Pr] Yu N Protas

Quasiclassical asymptotics of the scattering amplitude for the scattering of a plane wave by inhomogeneities of the medium - Math. USSR Sbornik. Vol. 45 (1983) n° 4- 487-507

[Si] B. Simon

Wave operators for Classical Particle Scattering Comm. Math. Phys. 23, 37-48 (1971)

[Ro-Ta]$_1$ D. Robert-H. Tamura

Semi-classical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections. Ann. I.H.P. Physique Théorique vol. 46 n° 4. 1987. p. 415-442.

[Ro-Ta]$_2$ D. Robert-H. Tamura

Asymptotic behaviour of Scattering Amplitudes in Semi-classical and Low Energy Limits. Preprint Nagoya and Nantes Universities - To appear -

[Re-Si] M. Reed-B. Simon

Methods of modern mathematical physics III scattering theory. Academic Press 1979

[Ya] K. Yajima

The quasi-classical limit of scattering amplitude -L^2-approach for short range potentials. Japan J. Math. 13 (1987) 77-126

[Va] BR Vainberg

Quasi classical approximation in stationary scattering problems. Func. Anal. Appl. 11 (1977)