JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC

Ondes de raréfaction pour des systèmes quasilinéaires hyperboliques multidimensionnels

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A8_0>

Ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels

S. ALINHAC
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
91405 ORSAY CEDEX

Introduction.

Comme l'a montré LAX [**4**], la solution d'un système de lois de conservation de donnée initiale discontinue se présente localement, en dimension d'espace égale à un, comme une juxtaposition de m (dimension du système) motifs pris parmi trois types : les chocs, les ondes de raréfaction et les discontinuités de contact. Les deux premiers motifs peuvent apparaître pour une valeur propre "vraiment non-linéaire" du système, tandis que le dernier n'existe que dans le cas "linéairement dégénéré" (cf. LAX [**5**]).

En dimension d'espace supérieure à un, pour une donnée initiale discontinue à travers une hypersurface, on peut espérer voir apparaître dans la solution des motifs analogues. Cela a été établi pour les chocs par MAJDA [**6**] (cas d'un seul choc) et MÉTIVIER [**7**] (cas de plusieurs chocs), au moins sous une certaine hypothèse de "stabilité".

Le but du présent exposé est d'indiquer les grandes lignes des résultats obtenus en [**2**] et [**3**] sur l'existence et l'unicité des ondes de raréfaction.

Quant aux discontinuités de contact, aucun résultat n'est connu à ce jour ; Elles ne semblent toutefois pas exister sous la forme classique (discontinuités à travers une surface caractéristique) en général.

1. Généralités.

Nous considérons, dans $\mathbf{R}^n$ où les variables sont notées (x, y, t) $(x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R})$, un **système quasi-linéaire** à coefficients réels C^∞ de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_1(v)\frac{\partial v}{\partial x} + A_2(v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \tag{1.1}$$

où l'on note pour simplifier $A_2 \frac{\partial}{\partial y}$ au lieu de $\Sigma\ A_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_i}$. On suppose que, pour tout $\eta \in \mathbf{R}^{n-2}$, la matrice $A_1 + \eta A_2$ possède une **valeur propre réelle simple** $\lambda(v, \eta)$ **vraiment non-linéaire**, c'est-à-dire qu'on peut choisir le vecteur propre $r(v, \eta)$ correspondant en sorte que $r \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial v} \equiv 1$.

Soit $x = \varphi_0(y)$ (φ_0 réel, $\varphi_0 \in C^1$, $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$) une hypersurface Γ de $\{t = 0\}$, et soient $v_+(x, y)$ et $v_-(x, y)$ des fonctions réelles continues pour $x \geq \varphi_0(y)$ et $x \leq \varphi_0(y)$ respectivement, qu'on appellera "les données" (de Cauchy).

On se propose, pour des données compatibles (cf.§2) assez régulières, de construire des solutions de (1.1) présentant le motif "onde de raréfaction" pour la valeur propre λ.

Nous allons donc d'abord définir ce motif, préciser cette compatibilité, ainsi que l'hypothèse d'hyperbolicité qui sera faite sur le système.

2. Ondes de raréfaction.

2.1.

L'exemple le plus simple d'une telle onde est donné pour $n = 2$ par la fonction (continue pour $t > 0$)

$$u(x,t) = \begin{cases} v_- & \text{si } x \leq \lambda_- t \\ h(x/t) & \text{si } \lambda_- t \leq x \leq \lambda_+ t \\ v_+ & \text{si } x \geq \lambda_+ t \end{cases}$$

où v_- et v_+ sont supposées constantes, $\lambda_\pm = \lambda(v_\pm)$, $\lambda_- < \lambda_+$, et $h(s)$ décrit une courbe intégrale de r dans l'espace des états,

$$h'(s) = r\,(h(s)) \quad , \quad \text{avec } h(\lambda_\pm) = v_\pm \ .$$

2.2.

Dans le cas général, on rendra compte de la forme spéciale de la solution $h(x/t)$ en utilisant un changement de variables singulier, qui ressemble si l'on veut à des "coordonnées cylindriques" (x/t étant l'angle, t le rayon, y la cote).

On appellera **représentant de l'onde** la donnée de fonctions v_1, φ_1 (définies dans un voisinage D_1 de 0 dans $x \leq 0,\ t \geq 0$), v_2, φ_2 (définies dans un voisinage D_2 de $(1,0,0)$ dans $x \geq 1,\ t \geq 0$) et w, ψ définies dans un voisinage D de $y = 0, t = 0, x \in [0,1]$ dans $0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0$) telles que

(2.2.1) $$L(v_i,\varphi_i)v_i = 0 \quad , \quad L(w,\psi)w = 0 \qquad (i = 1,2)$$

(2.2.2) $$v_1(x,y,0) = v_-\left(x + \varphi_0(y), y\right), v_2(x,y,0) = v_+\left(x + \varphi_0(y) - 1, y\right)$$

(2.2.3) $$v_1(0,y,t) = w(0,y,t), \quad v_2(1,y,t) = w(1,y,t)$$

(2.2.4) $$\varphi_1(0,y,t) = \psi(0,y,t), \quad \varphi_2(1,y,t) = \psi(1,y,t)$$

(2.2.5) $$\psi(x,y,0) = \varphi_0(y), \quad \psi_x(x,y,t) = Ct \quad (C \text{ fonction positive})$$

(2.2.6) $$\varphi_1(x,y,0) = x + \varphi_0(y), \quad \varphi_2(x,y,0) = x - 1 + \varphi_0(y)$$

(2.2.7) $$\text{Pour } \ t = y = 0, \quad w_x \neq 0 \ .$$

On note ici :

(2.2.8) $$L(w,\psi) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\psi_x}\left(A_1(w) - \psi_t - \psi_y A_2(w)\right)\frac{\partial}{\partial x} + A_2(w)\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

L'onde de raréfaction proprement dite est bien sûr la juxtaposition des images $\bar{v}_i$ (resp. $\bar{w}$) des fonctions v_i (resp. w) par les applications $(x,y,t) \to (\varphi_i(x,y,t),y,t)$ (resp. $(x,y,t) \to (\psi(x,y,t),y,t)$). Les deux surfaces S_1 et S_2 images de $x = 0$ et $x = 1$ forment un dièdre d'arête Γ où vit $\bar{w}$, et sont λ-caractéristiques (la condition (2.2.7) assure que λ est univoquement liée à l'onde).

Le cas de l'exemple 2.1 correspond à $\psi = xt(\lambda_+ - \lambda_-) + \lambda_- t$. L'onde sera dite de classe C^ρ si elle possède un représentant de classe C^ρ (i.e. v_1, φ_1 etc. ... sont de classe C^ρ dans leurs domaines fermés). Bien entendu, les trois fonctions φ_1, φ_2 et ψ (vérifiant (2.2.4)) sont un luxe pour définir les deux surfaces S_1 et S_2. Si elles sont affines en x, c'est-à-dire :

$$\varphi_1(x,y,t) = x + \psi(0,y,t) \ , \ \varphi_2(x,y,t) = x - 1 + \psi(1,y,t) \ ,$$
$$\psi(x,y,t) = \psi(0,y,t) + x\,(\psi(1,y,t) - \psi(0,y,t)) \ ,$$

le représent est dit **"réduit"**, mais cette "simplification" coûte de la régularité ; plus précisément, on peut montrer que si $\rho \geq 2$, toute onde de classe C^ρ possède un représentant réduit de classe $C^{\rho-1}$.

2.3.

Compatibilité; hyperbolicité; indice. L'existence d'une onde de raréfaction assez régulière implique une certaine **compatibilité des données** le long de Γ, que l'on peut décrire ainsi :

$$(2.3.1) \qquad \begin{cases} \text{soit } h(s,y) \text{ la solution du système} \\ \frac{dh}{ds} = r\,(h, -\varphi_0'(y)) \ , \ h(0,y) = v_+\,(\varphi_0(y),y) \ . \\ \text{Il existe } s(y) < 0 \text{ telle que } v_-\,(\varphi_0(y),y) = h\,(s(y),y) \,. \end{cases}$$

Nous supposerons le système (1.1) **"hyperbolique symétrisable"** au sens suivant.

(2.3.2) Pour les données compatibles v_+ et v_-, il existe, au voisinage des états $h(s,0)$ $(s(0) \leq s \leq 0)$, une matrice symétrique réelle C^∞, $S(v)$, définie positive, telle que SA_1 et SA_2 soient symétriques.

Bien que cette hypothèse soit très forte dès que $n \geq 3$, elle est vérifiée par de nombreux systèmes de la physique (dynamique des gaz, magnétohydrodynamique etc ...).

Enfin, nous dirons que deux données compatibles v_+ et v_- sont **d'indice d** ($d \in \mathbf{R}$) s'il existe, au voisinage des états $h(s,0)$ $(s(0) \leq s \leq 0)$, une matrice $\Sigma(v)$ symétrique réelle C^∞ définie positive, telle que ΣA_1 et ΣA_2 soient symétriques et que :

(2.3.3.)

$$(2d+1)\Sigma(h) + \lambda(h)\,(r(h)\cdot\nabla)\,\Sigma - (r(h)\cdot\nabla)\,(\Sigma A_1) + \Sigma(h)B_1(h) + {}^tB_1(h)\Sigma(h) \gg 0 \ ,$$

où $\lambda(h) = \lambda(h,0)$, $r(h) = r(h,0)$, $B_1(h) = (A_1(v)r(h))'_v\,(h)$. On notera bien que (2.3.3) fait intervenir A_1 et A_2, car Σ doit symétriser le système (cf.§5).

Bien entendu, (2.3.2) implique que deux données sont toujours d'indice d si d est assez grand (avec simplement $\Sigma = S$). Néanmoins, nous verrons que d apparaît comme une "perte de régularité", et nous nous efforcerons de le prendre le plus petit possible (cf.§5).

3. Le théorème d'existence.

Supposons ici pour simplifier $\varphi_0 \in C^\infty$, v_+ et v_- de classe C^∞ pour $x \geq \varphi_0(y)$ et $x \leq \varphi_0(y)$.

THÉORÈME 3.1 ([**2**]). *Soit s_0 le plus petit entier pair supérieur à $\frac{n+3}{2}$. Si les données (compatibles) v_+ et v_-, d'indice d, sont k-compatibles, avec $k > s_0 + d + 5$, il existe au voisinage de 0 une onde de raréfaction solution de* (1.1) *dont un représentant possède la régularité suivante :*

i) *Pour $x < 0$ (resp. $x > 1$; $0 < x < 1$) les fonctions v_1, φ_1 (resp. $v_2, \varphi_2; w, \psi$) appartiennent à H^{k-d}_{loc}.*

ii) *Près de $x = 0$ (resp. $x = 1$; $x = 0$ et $x = 1$) la fonction v_1 (resp. $v_2; w$) est de classe C^ρ $(\rho = \frac{k-d}{2} - \frac{n+1}{4})$.*

iii) *Les surfaces S_1 et S_2 ont des équations $x = r(y,t)$, $x = s(y,t)$ avec $r, s \in H^{k-d-1}$.* □

Notons que si λ est une valeur propre extrême de A_1 (c'est-à-dire la plus petite ou la plus grande), on obtient une régularité légèrement meilleure (cf. par exemple [**1**]).

La " k-compatibilité" qui apparaît dans les hypothèses signifie que les dérivées normales (à Γ) $\partial_n^\ell v_-$ ($\ell \leq k$) sont liées à celles de v_+ d'une façon similaire à ce qu'indique (2.3.1) pour $k = 0$. Pour les détails, le lecteur pourra se reporter à [**2**].

4. Le théorème d'unicité.

THÉORÈME 4.1 ([**3**]). *Soient deux ondes de raréfaction de classe C^ρ, $\rho \geq 4$, relatives à la valeur propre λ, et possédant les mêmes données d'indice d. Si $\rho > \rho_0(n,d)$, les deux ondes coïncident au voisinage de l'origine.* □

Une valeur possible de $\rho_0(n,d)$ est :

$$\rho_0(n,d) = \frac{d}{2} + \frac{n+13}{4} + \left(\frac{1}{4}(\frac{n-1}{2} - d)_+^2 + \frac{n}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous allons voir au §5 un cas particulier plus agréable.

5. Quelques propriétés de l'indice.

Nous avons vu aux paragraphes 3 et 4 le rôle joué par l'indice d des données de Cauchy.

La proposition suivante concerne une large classe de cas physiques.

PROPOSITION 5.1. *Soit $d > -1$. Alors, si le système est un système de lois de conservation et si :*

i) $n = 2$, *ou bien*

ii) *λ est une valeur propre extrême du système, tout couple de données v_+ et v_- compatibles est d'indice d.* □

Le point ii) permet, entre autres, la discussion du système d'Euler (cf. [**1**]).

Un **corollaire** de la proposition 5.1 est que, sous ses hypothèses, on peut prendre $\rho_0 = \frac{n}{2} + 4$ dans le théorème 4.1 (ce qui correspond au choix $d = -\frac{1}{2}$).

La proposition est obtenue en choisissant, pour symétriser le système, un symétriseur Σ qui n'est pas en général le symétriseur S de (2.3.2) naturellement donné avec le système.

La question de savoir si l'indice d, lorsqu'il apparaît effectivement, est pertinent, est ouverte. Compte tenu de la proposition, les exemples les plus simples sur lesquels on pourrait tenter des calculs semblent déjà très compliqués ... .

6. Remarques sur les preuves des théorèmes.

Sans reprendre ici les détails donnés dans [**1**] au sujet de la procédure de Nash-Moser utilisée pour démontrer le théorème 3.1, nous voudrions souligner que la première étape des preuves des deux théorèmes est la compréhension correcte des équations linéarisées et des conditions aux limites.

Soit par exemple une famille $v(s), \varphi(s)$ $(s \in [0,1])$, et notons $\dot{v} = \dfrac{dv}{ds}, \dot{\varphi} = \dfrac{dv}{ds}$. La proposition suivante décrit l'équation linéarisée.

PROPOSITION 6.1. *On a :*

$$\frac{d}{ds}(L(v,\varphi)v) \equiv \ell(v,\varphi)(\dot{v},\dot{\varphi}) = \{L(v,\varphi) + B(v,\varphi)\}\dot{V} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(L(v,\varphi)v) \ ,$$

où

$$\dot{V} = \dot{v} - \frac{v_x}{\varphi_x}\dot{\varphi}, B(v,\varphi) = \left\{\frac{1}{\varphi_x}(A_1(h) - \varphi_y A_2(h))\, v_x + A_2(h) v_y\right\}_h' (h = v)$$

et $L(v,\varphi)$ est défini en (2.2.8). □

Donnons une interprétation de la "bonne" inconnue $\dot{V}$: soit $\widetilde{v}$ l'image de v par le changement $(x,y,t) \to (\varphi,y,t)$, c'est-à-dire $\widetilde{v}(\varphi(x,y,t),y,t) = v(x,y,t)$. En différentiant, il vient

$$\dot{\widetilde{v}}(\varphi,y,t) + \widetilde{v}_x(\varphi,y,t)\dot{\varphi} = \dot{v}(x,y,t) \ ,$$

et d'autre part :

$$\widetilde{v}_x \varphi_x = v_x \ , \quad \text{d'où} \quad \dot{\widetilde{v}}(\varphi,y,t) = \dot{v} - \frac{v_x}{\varphi_x}\dot{\varphi} = \dot{V} \ .$$

L'inconnue $\dot{V}$ est donc l'image sur un domaine fixe de la variation $\widetilde{v}$ de l'onde, et non la variation de son représentant.

Pour une famille de représentants d'ondes (cf. 2.2), les conditions (2.2.3) donnent $\dot{v}_1 = \dot{w}$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\psi}$ sur $x = 0$, $\dot{v}_2 =$

$\dot{w}$, $\dot{\varphi}_2 = \dot{\psi}$ sur $x = 1$. Malheureusement, pour les bonnes inconnues $\dot{V}_i = \dot{v}_i - \frac{v_{ix}}{\varphi_{ix}}\dot{\varphi}_i$, $\dot{W} = \dot{w} - \frac{w_x}{\psi_x}\dot{\psi}$, cela n'implique pas $\dot{V}_1 = \dot{W}$ et $\dot{V}_2 = \dot{W}$ sur $x = 0$ et $x = 1$!

En réalité, les conditions aux limites sur la frontière caractéristique ne peuvent être comprises qu'en diagonalisant (par blocs) les systèmes linéarisés $L(v_i, \varphi_i) + B(v_i, \varphi_i)$ et $L(w, \psi) + B(w, \psi)$ qui apparaissent dans la proposition 6.1. (Le terme $\frac{\dot{\varphi}}{\varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(L(v, \varphi)v)$ étant une erreur quadratique négligeable). Notons donc $P(w, \nabla\psi)$ une matrice orthogonale qui diagonalise $S(w)\widetilde{A}$, ${}^tPS\widetilde{A}P = D$, où $\widetilde{A} = A_1(w) - \psi_t - \psi_y A_2(w)$, D ayant sa première valeur propre nulle.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2. *Posons* $\dot{V}_i = P(v_i, \nabla\varphi_i)\dot{X}_i$, $\dot{W} = P(w, \nabla\psi)\dot{Y}$ $(i = 1, 2)$. *Alors*

i) $\dot{X}_1' = \dot{Y}'$ *sur* $x = 0$, $\dot{X}_2' = \dot{Y}'$ *sur* $x = 1$.

ii) $\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{(tZ_0)}t(\dot{Y} - \dot{X}_1)_0$ *sur* $x = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{(tZ_0)}t(\dot{Y} - \dot{X}_2)_0$ *sur* $x = 1$.

On a noté tout vecteur $H = (H_0, H')$, H_0 *étant la première coordonnée, et* $Z = {}^t P(\frac{w_x}{\psi_x} - \frac{v_{1x}}{\varphi_{1x}})$ *sur* $x = 0$ *(*$Z = {}^t P(\frac{w_x}{\psi_x} - \frac{v_{2x}}{\varphi_{2x}})$ *sur* $x = 1$*).* □

Le point crucial de la proposition 6.2 est que $Z \neq 0$, mais $Z' = 0$ et $tZ_0 \neq 0$ à l'origine (cf. [**2**]).

D'après ces deux propositions, les équations linéarisées sont de la forme :

$$\bar{L}(v_i, \varphi_i)\dot{X}_i = 0 \ , \ \bar{L}(w, \psi)\dot{Y} = 0 \ ,$$

avec le couplage :

$$\dot{X}_1' = \dot{Y}' \ \text{sur} x = 0, \ \dot{X}_2' = \dot{Y}' \ \text{sur} x = 1$$

($\bar{L}$ est le transformé de $L + B$ par le changement $\dot{V} = P\dot{X}$).

Il se trouve que ces conditions aux limites sont précisément **maximales positives** pour le système symétrique considéré, lequel est alors traité par une technique standard d'inégalités d'énergie. Comme ψ_x s'annule sur $t = 0$, le système $\bar{L}(w, \psi)$ est en fait singulier, et il est nécessaire d'introduire des normes avec un poids t^{-d}, d étant justement l'indice des données de Cauchy.

Les considérations ci-dessus suffisent pour l'essentiel à démontrer le théorème 4.1 (voir [**3**] pour les détails techniques).

La preuve du théorème 3.1 nécessite cependant une autre idée : celle d'introduire des espaces de Sobolev (à poids) dissymétriques (comptant moitié moins de dérivées “ normales” ∂_x que de dérivées “tangentielles” $\partial_t, \partial_y, x\partial_x$), et d'établir dans cette chaîne d'espaces des estimations “tame” (ce qui semble impossible dans les espaces de Sobolev usuels pour un tel problème caractéristique).

Nous renvoyons le lecteur curieux (et courageux) à l'esquisse de [**1**], et à [**2**] pour le cas général.

Bibliographie

[1] S. ALINHAC, *Existence d'ondes de raréfaction pour des écoulements isentropiques,* Séminaire EDP, Ecole Polytechnique, Paris, 1986-1987.

[2] S. ALINHAC, *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,* à paraître dans Comm. in PDE, 1988.

[3] S. ALINHAC, *Unicité d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,* Preprint.

[4] P.D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II,* Comm. Pure Appl. Math. 10, 537-567, 1957.

[5] P.D. LAX, *Shock waves and entropy,* in contributions to nonlinear functional analysis (Zarantonello, Ed.), Acad. Press, 1971.

[6] A. MAJDA, *The stability of multidimensional shock fronts* et *The existence of multidimensional shock fronts,* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 275 et 281, 1983.

[7] G. MÉTIVIER, *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace,* Trans. Amer. Math. Soc. 296, 431-479, 1986.