JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NOUREDDINE KAIDI
MICHEL ROULEUX

Résonances multiples en limite semi-classique

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A7_0>

Résonances multiples en limite semi-classique

Noureddine Kaidi et Michel Rouleux

Introduction.

On considère l'opérateur de Schrödinger semi- classique sur $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$P = -h^2\Delta + V(x) \quad (h \to 0) .$$

Si $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ vérifie :

$$\lim_{|x| \to \infty} V(x) = E_0 > -\infty ,$$

P admet une extension auto-adjointe naturelle à partir de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ comme opérateur non-borné, et $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_{pp} \otimes \mathcal{H}_c$, où $\mathcal{H}_{pp}$ est la somme des espaces propres (états liés) correspondant au spectre purement ponctuel $\sigma_{pp}(P)$ et $\mathcal{H}_c$ l'espace des états libres associé au spectre continu $\sigma_c(P)$. Le seuil E_0 est la borne inférieure du spectre essentiel :

$$\inf \sigma_c(P) = E_0 .$$

En particulier, si $E_0 > 0$, il n'y a que du spectre discret près de 0 et pour $z \in \mathbb{C}$ assez petit, la résolvante $R(z) = (P-z)^{-1}$ est une fonction méromorphe dont les pôles (nécessairement simples) sont les valeurs propres (réelles) de P.

Si $E_0 < O$, $R(z)$ est une fonction holomorphe dans les demi-plans $\mathrm{Im} z < 0$ et $\mathrm{Im} z > 0$. Sous certaines conditions, $R(z)$ se prolonge à travers l'axe réel dans l'autre demi-plan en une fonction méromorphe dont les pôles sont appelés résonances. Dans les théories désormais classiques d'Aguilar-Combes **[Ag.Co]**, Balslev-Combes **[Ba.Co]**, et Helffer-Sjöstrand **[He.Sj]**, le prolongement de $R(z)$ apparaît comme la résolvante d'un opérateur non auto-adjoint, et ses pôles n'ont plus de raison d'être simples. A.G. Ramm **[Ra]** a étudié la stabilité de la multiplicité algébrique q d'une résonance pour l'opérateur de Schrödinger. J. Sjöstrand **[Sj]**, dans le cadre semi-classique, a obtenu par perturbation $\Delta V(x,h)$ d'un potentiel radial V en dimension 2, l'existence d'un pôle double pour la résolvante de $\widetilde{P} = P + \Delta V$, à partir d'une résonance de multiplicité géométrique égale à 2. On se propose de généraliser cette propriété en montrant, sous certaines hypothèses, que toute résonance $\lambda(h)$ de multiplicité q (pôle simple de la résolvante) peut donner naissance, sous l'effet d'une légère perturbation du potentiel, à un pôle d'ordre q, ou en d'autres termes, que la matrice de $\widetilde{P}$ relative au sous-espace caractéristique dérivé de $\mathrm{Ker}(P - \lambda(h))$, a une partie nilpotente à l'ordre q. Notons que ce résultat est en accord avec le fait bien connu qu'il est en général impossible d'estimer a priori la norme de la résolvante $(P-z)^{-1}$ par une puissance déterminée de la distance de z au spectre de P, si P n'est pas auto-adjoint.

Nos résultats concernent l'oscillateur harmonique $P_0 = -h^2\Delta - |x|^2$ en dimension 2 , ainsi qu'une classe très générale de potentiels à symétrie sphérique en dimension 3. On montre au passage que les pôles de la résolvante d'un tel potentiel sont nécessairement simples, et que la dégénérescence est dûe par conséquent à une rupture de symétrie. On verra aussi comment la multiplicité des résonances est limitée en général par le nombre des harmoniques sphériques associées à un même moment orbital ; en ce sens le cas de l'oscillateur harmonique est une exception, spécifique à la dimension 2, qui nous permet cependant de construire de façon assez simple des exemples de résonances multiples.

Ceci est le résumé d'un article à paraître. Les auteurs remercient J. Sjöstrand pour de motivantes discussions, et Mme B. Barbichon pour l'assistance TeX.

1. Matrice de perturbation.

On étend un peu dans ce Chapître les constructions de **[Sj]** . Soit $P = -h^2\Delta + V$ l'opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ vérifiant :

(1.1) V est analytique sur $\mathbb{R}^n$ et dilatable analytiquement, i.e. V admet un prolongement holomorphe dans :

$$G = \{x \in \mathbb{C}^n : |\mathrm{Im} x| \leq C < \mathrm{Re} x >\} .$$

(1.2) V est radial ($V(x) = V(|x|^2)$) et $V(x) < 0$, $\partial_{|x|} V < 0$ pour $x \neq 0$.

(1.3) $V(0) = 0$ et V admet un maximum non dégénéré en $x = 0$.

(1.4) $\lim_{|x| \to \infty, x \in G} V(x) = E_0 < 0$.

Soit $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ l'hamiltonien classique associé à P, et $K \subset p^{-1}(0)$ l'ensemble des trajectoires captées de p, i.e. :

$$\forall \rho \in K : \exp tH_p(\rho) \not\to \infty \quad \text{quand} \quad t \to \pm\infty .$$

Alors les hypothèses (1.1) à (1.3) assurent que $K = \{(0,0)\}$. Certains des résultats de cette section subsistent si l'on relâche un peu les hypothèses ci-dessus, notamment celle de la symétrie sphérique, mais elles suffiront aux besoins de notre étude.

Dans le formalisme de **[He.Sj]** les résonances sont définies comme les valeurs propres d'une famille d'opérateurs

$$P = P_t : H(\Lambda_{tG}, m_0) \to H(\Lambda_{tG}, \widetilde{m}_0) .$$

Ici les Λ_{tG}, pour $0 < |t| < t_0$ sont des variétés I-Lagrangiennes, que l'on peut considérer comme des déformations complexes de R^{2n} , associées à une "fonction de fuite" $G(x,\xi)$ et des "fonctions d'ordre" $m_0(x,\xi)$, $\widetilde{m}_0(x,\xi)$. Pour nous, $m_0 = 1$ et $\widetilde{m}_0 = \widetilde{r}^{-2}$, avec $\widetilde{r}(x,\xi) = (\xi^2 + r(x)^2)^{\frac{1}{2}}$. Ici $r \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ est définie par $r(x) = r(\mathrm{Re}\ x)$ et vérifie $r \geq 1$, $|V(x)| \leq C_0(r(x))^2$. On peut prendre ici $r = 1$ et $r(x,\xi) =< \xi >$. Les espaces de Hilbert $H(\Lambda_{tG}, m_0)$ et $H(\Lambda_{-tG}, m_0)$ sont duaux l'un de l'autre pour la dualité usuelle $L^2(\mathbf{R}^n)$. Les résonances pour $t > 0$ sont appelées résonances "physiques" ou "sortantes" ; les autres sont les résonances "entrantes".

On considère aussi l'opérateur $P_0 = -h^2\Delta - |x|^2$ qu'on appelera, par abus, "oscillateur harmonique". Les fonctions propres ou "résonnantes" de P_0 associées aux résonances sortantes

(1.5) $\qquad \lambda_0(h) = -ih(2\sigma + n), \quad \sigma \in \mathbf{N}$

sont les combinaisons linéaires des fonctions d'Hermite

(1.6) $\qquad \varphi_\alpha = C_\alpha h^{-(2\sigma+n)/4}\widetilde{\Phi}_\alpha(x,h)e^{ix^2/2h}$

où $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \sigma$, et $\widetilde{\Phi}_\alpha$ est un polynôme d'Hermite. Les résonances entrantes de P_0 sont alors :

$$\mu_0(h) = ih(2\sigma + n)$$

et les fonctions résonnantes associées :

$$\varphi^*_\alpha = \text{prolongement holomorphe de } \overline{\varphi}_\alpha(x)\ , \quad x \in \mathbf{R}^n\ .$$

La constante $\mathbb{C}_\alpha \in \mathbb{C}$ est déterminée par la condition de normalisation $(\varphi_\alpha \mid \varphi^*_\alpha) = 1$ pour la dualité entre $H(\Lambda_{tG}, 1)$ et $H(\Lambda_{-tG},1)$. On sait alors ([**Sj**],[**B.C.D**]) que pour tout $C_0 > 0$ tel qu'aucune des valeurs (1.5) ne tombe sur le bord du disque $D(0, C_0h)$, et pour tout $h > 0$ assez petit, il existe des bijections $b^\pm = b^\pm(h)$ de l'ensemble des résonances de l'oscillateur harmonique :

$$\Gamma_0^\pm(h) = \{\mp h(2\sigma + n) \mid \sigma \in \mathbf{N}\} \cap D(0, C_0h)$$

sur l'ensemble $\Gamma^\pm(h)$ des résonances de P (comptées avec leur multiplicité) dans $D(0, C_0h)$ telles que :

(1.7) $\qquad b^\pm(E) - E = \mathcal{O}(h^{3/2}) \quad (h \to 0)$

(en fait on a ici $\mathcal{O}(h^2)$ à cause de la symétrie sphérique).

Si $F_\lambda \subset H(\Lambda_{tG}, 1)(\text{resp.} F^*_\mu \subset H(\Lambda_{-tG}, 1))$ est l'espace des fonctions résonnantes associées à $\lambda(h)(\text{resp.} \mu(h))$, alors $F_\lambda \perp F^*_\mu$ si $\lambda(h) \neq \overline{\mu}(h)$ et $F_\lambda = (F^*_\mu)^*$ si $\lambda(h) = \overline{\mu}(h)$.

Si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, et $D = D(\lambda_0(h), \varepsilon_0 h)$,on sait que :

$$\forall z \in \partial D : (P_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(1) : H \longrightarrow \widetilde{H}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit, avec $H = H(\Lambda_{tG}, 1)$ et $\widetilde{H} = H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^2)$. Ici on a relaxé microlocalement au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ la norme de $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r}^2)$ (cf [**Sj**]). Si $\iota : \widetilde{H} \to H$ désigne l'injection canonique, alors $\iota = \mathcal{O}(h^{-1}) : \widetilde{H} \to H$ et $(P_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-1}) : \widetilde{H} \to H$. Soit :

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}(P_t - z)^{-1}dz : H \to H$$

le projecteur sur la somme des espaces caractéristiques de P_t dans le disque D. Pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, le rang de Π est égal à la multiplicité

$q_0 = \binom{n+\sigma-1}{\sigma}$ de $\lambda_0(h)$. On fait alors l'hypothèse suivante sur $\lambda(h) \in \Gamma^+(h)$:

(1.8) $\exists \delta > 0, \exists N \geq 1$ t.q. $D(\lambda(h), 2\delta h^N) \cap \Gamma^+(h) = \{\lambda(h)\}$.

On montre alors facilement le :

LEMME 1.1. *$\exists N_1 \geq 1$ t.q. $\forall z \in \partial D(\lambda(h), \delta h^N) : (P_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-N_1}) : H \to H$ uniformément pour $h > 0$ assez petit.*

REMARQUE 1.2. L'hypothèse (1.8) est générique : si n est impair, $V(x) = -\mid x \mid^2 + \alpha \mid x \mid^4 + \mathcal{O}(\mid x \mid^6)$ $(x \to 0)$ avec $\alpha \neq 0$ on montre que (1.8) est satisfaite pour $N = 2$.

On perturbe à présent P, en changeant V en :

$$\widetilde{V}(x,h) = V(x) + \Delta V(x,h)$$

où ΔV est une somme finie de potentiels de la forme :

$$\Delta V_{l,m}(x,h) = h^l q_{2m}(x,h) e^{-x^2/2}$$

$l, m \in \mathbf{N}^*$, $l + m = \nu =$ Const. et q_{2m} est un polynôme en x homogène de degré $2m$ dont les coefficients sont des fonctions réelles analytiques de h pour $\mid h \mid$ assez petit. On considère $\widetilde{P} = P + \Delta V$ comme opérateur h-pseudo-différentiel de symbole principal $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ et $\widetilde{P}_t$ sa réalisation dans les espaces $H(\Lambda_{tG}, m_0)$. On a :

$$\Delta V = \widetilde{P}_t - P_t = \mathcal{O}(h^l) : \widetilde{H} \to H$$

et d'après le Lemme 1.1, si $l > N_1$, la série de Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} (P_t - z)^{-1}((\widetilde{P}_t - P_t)(P_t - z)^{-1})^k$$

convergeant pour $h > 0$ assez petit définit $(\widetilde{P}_t - z)^{-1}$ comme opérateur borné $H \to H$ pour tout $z \in \partial D(\lambda(h), \delta h^N)$. De plus,

$$(\widetilde{P}_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-N_1+1}) : H \to \widetilde{H}$$
$$(\widetilde{P}_t - z)^{-1} - (P_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(h^{l-2N_1+2}) : H \to \widetilde{H}$$

Si $l > 2N_1 - 2$ le projecteur spectral

$$\widetilde{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \widetilde{D}} (z - \widetilde{P}_t)^{-1} dz$$

où $\widetilde{D} = D(\lambda(h), \delta h^N)$, associé aux résonances de $\widetilde{P}_t$ dans $\widetilde{D}$, est voisin dans $\mathcal{L}(H,H)$ du projecteur correspondant pour P_t . En particulier, si q est la multiplicité (algébrique) de $\lambda(h)$ et ψ_β désigne une base de $F = F_\lambda$, alors il existe exactement q résonances dans $\widetilde{D}$ pour $\widetilde{P}_t$ et $\widetilde{F} = \widetilde{\Pi}(H)$ est un sous-espace caractéristique de dimension q dont une base est donnée par :

$$v_\beta = \widetilde{\Pi}(\psi_\beta), \qquad \beta = 1, 2, ..., q.$$

On considère de même pour $z \in \partial\widetilde{D}^* = \partial D(\bar{\lambda}(h), \delta h^N)$ l'opérateur $(\widetilde{P}_t - z)^{-1} = (\widetilde{P} - z)^{-1} : H^* \to \widetilde{H}^*$ où $H^* = H(\Lambda_{-tG}, 1)$, $\widetilde{H}^* = H(\Lambda_{-tG}, \tilde{r}^2)$ et le projecteur spectral :

$$\widetilde{\Pi}^* = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\widetilde{D}^*} (z - \widetilde{P}_{-t})^{-1} dz$$

associé aux résonances (entrantes) de $\widetilde{P}$ dans $\widetilde{D}^*$. Le sous-espace $\widetilde{F}^* = \widetilde{\Pi}^*(H^*)$ est un sous-espace caractéristique de dimension q, dual du précédent, dont une base est donnée par les $\widetilde{\Pi}^*(\psi^*_\beta), \beta = 1, 2, ..., q$. La matrice de $\widetilde{P}$ dans la base des v_β est donnée par :

$$(\widetilde{P}_t v_\beta \mid v^*_\gamma) = (\widetilde{P}_t \psi_\beta \mid v^*_\gamma) = \lambda(h)\delta_{\beta\gamma} + (\Delta V \psi_\beta \mid v^*_\gamma).$$

Estimant dans H^* :

$$v^*_\gamma - \psi^*_\gamma = (v^*_\gamma - \widetilde{\Pi}^* \psi^*_\gamma) + (\widetilde{\Pi}^* \psi^*_\gamma - \psi^*_\gamma)$$

comme dans **[Sj]**, on arrive facilement à la :

PROPOSITION 1.3. *Soit $M = (\widetilde{P}_t v_\beta \mid v^*_\gamma)$ la matrice de $\widetilde{P}_{\mid \widetilde{F}}$ dans la base v_β. Alors si l est assez grand et $l + m = \nu = Const.$ on a :*

$$(\widetilde{P}_t v_\beta \mid v^*_\gamma) = \lambda(h)\delta_{\beta\gamma} + (\Delta V \psi_\beta \mid \psi^*_\gamma) + \mathcal{O}(h^{2(l+m)-N_2})$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit, avec $N_2 \geq 1$ indépendant de l et m .

2. Cas de la dimension 2 et de l'oscillateur harmonique.

Les calculs ci-dessus s'appliquent à la situation la plus simple, qui est d'ailleurs celle traitée dans **[Sj]**, où $P = P_0 = -h^2\Delta - \mid x \mid^2$ (on n'a pas encore utilisé l'hypothèse (1.4)). On alors $\psi_\beta = \varphi_\beta$ (formule (1.6)), $q = q_0$ et :

$$(2.1) \qquad (\widetilde{P} v_\alpha \mid v^*_\beta) = \lambda_0(h)\delta_{\alpha\beta} + (\Delta V \varphi_\alpha \mid \varphi^*_\beta) + O(h^{2(l+m)-1})$$

pour $l, m \in \mathbf{N}^*$, $l + m = \nu =$ Const., $\mid \alpha \mid = \mid \beta \mid = \sigma \in \mathbf{N}^*$. Un calcul simple comme dans **[Sj]** montre que :

$$(2.2) \quad (\Delta V \varphi_\alpha \mid \varphi^*_\beta) = h^\nu \Sigma_m i^m \Big(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x2} q_{2m}(x, 0) \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(x) dx + O(h) \Big)$$

où les Φ_α sont les polynômes d'Hermite usuels (les $\widetilde{\Phi}_\alpha$ sont obtenus à partir des Φ_α par une rotation de $\pi/4$ dans le complexe). La première étape dans notre construction consiste à obtenir tout élément de l'espace $M^+_q(\mathbb{C})$ des matrices complexes symétriques d'ordre q comme :

$$\Big(\sum_m i^m \int e^{-x^2} q_{2m}(x, 0) \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(x) dx\Big)_{|\alpha| = |\beta| = \sigma} .$$

On pose, pour $s = 1, 2$:

$$\widetilde{\mathcal{D}}_s = \{\widetilde{Q}_s = \sum_{l+m=\nu} h^l q_{2m}(x,h) \mid \nu \geq 2, m \equiv s+1 \operatorname{mod} 2\}$$

où $q_{2m}(x,h)$ est considéré comme un polynome en x dont les coefficients dépendent analytiquement du paramètre h. On a le :

LEMME 2.1. *Pour $n=2$, on considère des perturbations de l'oscillateur harmonique sous la forme $\Delta V = (\widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2)e^{-x^2/2}$ avec $\widetilde{Q}_s \in \widetilde{\mathcal{D}}_s$. Alors il existe une application $\mathbf{R}$-linéaire $(\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2) \to \mathcal{M}_0(\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2)$ qui réalise un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{E}}$ de $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{D}}_2$ sur $M_q^+(\mathbb{C})$ telle que la matrice de $\widetilde{P}_{\mid \widetilde{F}}$ définie dans la Proposition 1.3 s'écrive :*

$$\begin{aligned} M &= \lambda_0(h) Id + h^\nu(\mathcal{M}_0(\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2) + \mathcal{O}(h)) \\ &= \lambda_0(h) Id + h^\nu \mathcal{M}(\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2, h) \quad (\nu \geq 2). \end{aligned}$$

Indication sur la preuve : on commence par montrer que les $(\Phi_\alpha \Phi_\beta)_{\mid \alpha \mid = \mid \beta \mid = \sigma}$ sont pairs et linéairement indépendants comme polynômes à coefficients réels. On montre ensuite que les espaces $\widetilde{\mathcal{D}}_s$ (comme espaces de polynômes) sont denses dans le sous-espace fermé de $L^2(\mathbf{R}^2, e^{-x^2}dx)$ des fonctions paires et à valeurs réelles. On termine la preuve par un argument de projection. □

L'étape suivante consiste à remarquer que toute matrice nilpotente complexe est semblable à une matrice symétrique [G] , et à établir un lemme géométrique de transversalité pour absorber le terme en $\mathcal{O}(h)$ dans (2.2). Soit $M_q(\mathbb{C})$ l'espace de toutes les matrices complexes d'ordre q et $\mathcal{H} \subset M_q(\mathbb{C})$ la variété des matrices M nilpotentes exactement à l'ordre q (i.e. $M^q = 0, M^{q-1} \neq 0$).

LEMME 2.2. *Soit $K \in M_q^+(\mathbb{C})$. Alors il existe au voisinage de K un sous-espace affine $\mathcal{V}_0 \subset M_q^+$ de dimension q dont l'intersection avec $\mathcal{H}$ est transverse, i.e. $\mathcal{V}_0 \oplus (T_K\mathcal{H} \cap M_q^+(\mathbb{C})) = M_q^+(\mathbb{C})$.*

On conclut à l'existence de pôles multiples pour la résolvante de $\widetilde{P}_{\mid \widetilde{F}}$ quand $h \to 0$ comme dans [Sj]. Soit $\mathcal{V}_0^*$ l'image réciproque de $\mathcal{V}_0$ par l'application $\mathcal{M}_0$. $\mathcal{V}_0^*$ est donc un sous-espace affine de E de dimension q passant par $\mathcal{M}_0^{-1}(K)$. Comme dans [Sj] on vérifie que les applications $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}$ sont analytiques par rapport à $\widetilde{Q}_1$ et $\widetilde{Q}_2$ et que leurs différentielles vérifient :

$$d\mathcal{M} = d\mathcal{M}_0 + \mathcal{O}(h)$$

Soit $\mathcal{V}_h$ l'image de $\mathcal{V}_0^*$ par $\mathcal{M}$.Alors $\mathcal{V}_h$ est une sous-variété analytique de dimension réelle 2q qui diffère au voisinage de K de la variété $\mathcal{V}_0$ par une quantité $\mathcal{O}(h)$ (pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$.) En particulier, si $h > 0$ est assez petit, $\mathcal{V}_h$ intersecte transversalement $\mathcal{H}$ dans un voisinage de K

dont la taille est de l'ordre de h . Le théorème des fonctions implicites donne alors facilement le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 2.3. *Avec les notations du Lemme 2.1, il existe une sous-variété affine* $\mathcal{V}_0^* e^{-x^2/2} \subset (D_1 \oplus \widetilde{\mathcal{D}}_2)e^{-x^2/2}$ *de* $\widetilde{\mathcal{E}}e^{-x^2/2}$ *(avec des notations évidentes) de dimension réelle* $2q$ *de potentiels* $\Delta V(h) = \Delta V(x,h) = (\widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2)e^{-x^2/2}$ *et une fonction réelle analytique injective* $h \longrightarrow \Delta V(h) \in \mathcal{V}_0^* e^{-x^2/2}$ *définie pour* $h > 0$ *assez petit telles que* M *ait une partie nilpotente à l'ordre* q .

Si on cherche à étendre le théorème 2.3 aux potentiels radiaux vérifiant (1.4) on s'aperçoit que la multiplicité q de $\lambda(h)$ est en général égale à la dimension de l'espace des harmoniques sphériques associées au nombre quantique orbital σ . Pour $n = 2$ on a donc $q = 2$ pour tout $\sigma \geq 1$ et le résultat de [**Sj**] ne peut pas, en général, être amélioré. Notons toutefois qu'en choisissant des potentiels qui ont un contact d'ordre élevé avec $-\mid x \mid^2$ en $x = 0$, il est encore possible de construire des perturbations ΔV qui donnent des pôles d'ordre arbitrairement grand pour la résolvante de $\widetilde{P}$. Mais une telle extension n'est pas très naturelle ; la bonne généralisation de notre résultat a lieu en dimension 3 d'espace.

2. Cas des potentiels radiaux en dimension 3.

Pour un potentiel à symétrie sphérique, les états qui correspondent à un même niveau d' "énergie" $\lambda_0(h) = -ih(2\sigma + n)$ de l'oscillateur harmonique se scindent généralement suivant la valeur du nombre quantique orbital (quantification du moment cinétique) : ce sont ces états " stables " qu'il est possible de perturber en brisant la symétrie sphérique pour obtenir des dégénérescences, car le théorème 2.3 ne s'étend pas directement à l'oscillateur harmonique dès que $n \geq 3$. Si $n = 3$, la multiplicité d'une résonance $\lambda(h) \mathrm{de} P = -h^2\Delta + V$ voisine de $\lambda_0(h)$ est égale à $2(\sigma - 2k) + 1$, pour $k = 0, 1, \ \ldots \ , [\sigma/2]$.

(Du point de vue de la théorie des représentations, on peut dire que l'espace des fonctions résonnantes associées est une composante irréductible de $H(\Lambda_{tG}, 1)$ sous l'action du groupe $O^+(3)$. (Pour une approche des problèmes liés à la théorie des représentations en Mécanique Quantique, on pourra se référer à [**M**]).)

En particulier, pour $k = 0$, $\lambda(h)$ est une résonance de l'opérateur

$$(3.1) \qquad P(\sigma) = -h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sigma(\sigma+1)}{r^2}\right) + V(r^2)$$

agissant sur la variable r, où $x = r\omega, r > 0, \omega \in S^2$ (bien entendu, des k non nuls correspondent à d'autres valeurs de σ.) On va montrer que la multiplicité algébrique des $\lambda(h)$ est égale à leur multiplicité géométrique, ou en d'autres termes, que la résolvante de P n'a que des pôles simples.

Dans cette section, on adopte le point de vue d'Aguilar-Combes pour la définition des résonances (pour l'équivalence des différentes définitions, on pourra se référer à [**He.Ma**]).

Soit $P = -h^2\Delta + V$ sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ où V satisfait aux hypothèses (1.1) à (1.4). P n'est pas essentiellement auto-adjoint à partir de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash 0)$ mais on peut considérer son extension de Friedrichs et il est facile de voir qu'elle définit un opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ de domaine $\mathcal{D}(P) = H^2(\mathbb{R}^3)$; il s'agit donc de l'extension naturelle de P à partir de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ Par passage en polaires, on a $P = \oplus_{\sigma=0}^\infty P(\sigma)$, où $P(\sigma)$ est l'extension auto-adjointe à partir de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ de l'opérateur (3.1) dont le domaine est contenu dans :

$$H^1_\sigma(\mathbb{R}^+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^+, r^2dr) \mid \int_0^\infty \{(1+\frac{\sigma(\sigma+1)}{r^2})\,|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2\}r^2dr < \infty\}$$

On a alors $\mathcal{D}(P(\sigma)) = H^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{H}_\sigma$ où $H^1_{0,\sigma}(\mathbb{R}^+)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ dans $H^1_\sigma(\mathbb{R}^+)$ et :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\sigma &= \{u \in L^2(R^+, r^2dr) \mid P(\sigma)u \in L^2(R^+, r^2dr)\}\\ &= \{u \in L^2 \mid \Delta(\sigma)u \equiv -h^2(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sigma(\sigma+1)}{r^2})u \in L^2\}\end{aligned}$$

On récupère alors $\mathcal{D}(P)$ par la formule :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(P) = \{u = \sum_{\sigma=0}^{+\infty}\sum_{\tau=-\sigma}^{\sigma} u_{\sigma\tau}Y_{\sigma\tau} \mid u_{\sigma\tau} \in \mathcal{D}(P(\sigma))\forall\sigma,\tau \mid\\ \sum_{\sigma=0}^{+\infty}\sum_{\tau=-\sigma}^{\sigma} \|u_{\sigma\tau}\|^2_{H^1_\sigma(\mathbb{R}^+)} < \infty \mid \sum_{\sigma=0}^{+\infty}\sum_{\tau=-\sigma}^{\sigma} \|P(\sigma)u\|^2_{L^2} < \infty\}\end{aligned}$$

(voir par exemple [**Ro**]). Ici les $Y_{\sigma\tau}$ sont les fonctions propres du Laplacien sur S^2. On en déduit :

$$Sp(P) = \bigcup_{\sigma=0}^{\infty} Sp(P(\sigma))$$

(à noter que la réunion est en général disjointe , ce qui n'est pas le cas si $P(\sigma)$ est remplacé par l'oscillateur harmonique $-h^2\Delta(\sigma) - r^2$).

Soit U_θ le générateur des dilatations analytiques et

$$P_\theta = U_\theta P U_\theta^{-1} = -h^2e^{-2\theta}\Delta + V(e^{2\theta}r^2)$$

pour θ dans un voisinage complexe de 0. On a :

$$U_\theta P U_\theta^{-1} = \oplus_{\sigma=0}^\infty U_\theta P(\sigma)U_\theta^{-1} = \oplus_{\sigma=0}^\infty P_\theta(\sigma)$$

avec

$$P_\theta(\sigma) = -h^2e^{-2\theta}(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sigma(\sigma+1)}{r^2}) + V(e^{2\theta}r^2)$$

La simplicité des pôles de la résolvante des $P_\theta(\sigma)$ entraîne celle pour P_θ . On a en fait le :

THÉORÈME 3.1. *Si $n \geq 3$, sous les hypothèses (1.1) à (1.4), et si* $\mathrm{Im}\theta > 0$ *et* $h > 0$ *sont assez petits,* $P_\theta(\sigma)$ *a du spectre discret près de 0, et ses valeurs propres (les résonances de P) sont simples.—*

(L'idée est de comparer les résonances de $P(\sigma)$ *à celles de* $P_0(\sigma) = -h^2\Delta(\sigma) - r^2$ *pour* $h \to 0$ *en s'inspirant de* [**B.C.D**].On conjecture que cette propriété est vraie pour tout h.)

Pour faire apparaître des dégénérescences, il est donc nécessaire de rompre la symétrie sphérique du potentiel, ce qui justifie le procédé général de perturbation de la section 1. Soit :

$$Y_\sigma = \mathrm{Vect}\{Y_{\sigma\tau} \mid -\sigma \leq \tau \leq \sigma\}$$

Les fonctions résonnantes de $P_0(\sigma)$ associées à la résonance sortante $\lambda_0(h) = -ih(2\sigma+3)$ sont données par :

$$f_\beta(x) = C_\sigma h^{-(2\sigma+3)/4} e^{ir^2/2} r^\sigma Y_\beta(\omega), \beta = (\sigma,\tau), x = r\omega.$$

Soient $\psi_\beta(x)$ les fonctions résonnantes de $P(\sigma) \bigotimes Id_{Y_\sigma}$ associées aux résonances voisines de $\lambda_0(h)$ pour $P(\sigma)$ au sens de (1.7). On a le :

LEMME 3.2. *Avec les notations de la Proposition 1.3 :*

$$(\Delta V\psi_\beta \mid \psi_\gamma^*) = (\Delta V f_\beta \mid f_\gamma^*) + \mathcal{O}(h^{l+m+1}), \quad \beta = (\sigma,\tau), \gamma = (\sigma,\tau').$$

Avec les mêmes notations, et sous les hypothèses (1.1) à (1.4) et (1.8) on a :

$$(\widetilde{P}_t v_\beta \mid v_\gamma^*) = \lambda(h)\delta_{\beta\gamma} + h^\nu \Big(\sum_m i^m \frac{\Gamma(\sigma+m+3/2)}{\Gamma(\sigma+3/2)}$$
$$\int_{S^2} q_{2m}(\omega,0) Y_\beta(\omega) Y_\gamma(\omega) d\omega + \mathcal{O}(h)\Big), \beta = (\sigma,\tau), \gamma = (\sigma,\tau')$$

On procède alors à une analyse totalement analogue à celle de la section 2 (la principale difficulté technique consiste à montrer l'indépendance des produits $(Y_\beta(\omega)Y_\gamma(\omega))_{\beta,\gamma}$) , et le Théorème 2.3 se généralise de la façon suivante :

THÉORÈME 3.3. *Pour $n = 3$, soit P vérifiant les hypothèses (1.1) à (1.4) et soit $\lambda(h)$ une résonance de P de multiplicité (géométrique) $q = 2\sigma + 1 (\sigma \in \mathbb{N}^*)$ vérifiant aussi l'hypothèse (1.8). On considère des perturbations de P sous la forme : $\Delta V = (\widetilde{Q}_1 + \widetilde{Q}_2)e^{-x^2/2}$ avec $\widetilde{Q}_s \in \widetilde{\mathcal{D}}_s$. Alors il existe une sous-variété affine $\mathcal{V}_0^* e^{-x^2/2} \subset (\widetilde{\mathcal{D}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{D}}_2)e^{-x^2/2}$ de dimension réelle 2q de potentiels $\Delta V(h)$ et une fonction réelle analytique $h \to \Delta V(h) \in \mathcal{V}_0^* e^{-x^2/2}$,injective,définie pour $h > 0$ assez petit telles que M ait une partie nilpotente à l'ordre q .*

Bibliographie

[Ag.Co] J.Aguilar J.M Combes, A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians. Comm. in Math. Phys. 22, (1971), 269-279.

[Ba.Co] E.Balslev J.M Combes : Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation analytic interactions. Comm. in Math. Phys. 22, (1971), 280-294.

[B.Co.D] P.Briet J.M.Combes P.Duclos : On the location of resonances for Schrödinger operators in the semi-classical limit II. Comm. in Part. Diff. Eq. 12(2), (1987), 2O1-222.

[G] M.Gantmacher : Theory of Matrices II. Chealsea (1972)

[He.Sj] B.Helffer J.Sjöstrand : Résonances en limite semi-classique. Mémoire de la S.M.F. (1986), Tome 114 (3).

[He-Ma] B.Helffer A.Martinez : Comparaison entre les diverses notions de résonances. Helvetica Phys. Acta , 60, (1987), 992-1003.

[M] G.M.Mackey : Quantum Mechanics from the point of vue of the theory of group representations. Lect. in Appl. Math., 21, (1985), 219-253.

[Ra] A.G.Ramm : Perturbation of resonances. J. Math. Analysis and Appl., 88, (1982), 1-7.

[Ro] M.Rouleux : Diffraction analytique sur une variété à singularité conique. Comm.in Part. Diff. Eq., 11(9), (1986), 947-988.

[Sj] J.Sjöstrand : Semi-classical resonances generated by non-degenerate critical points. Springer Lect. Notes in Math.,1256, (1987), 402-429.

Noureddine Kaidi
Faculté des Sciences de Tunis, Département de Math.
1060 TUNIS - Tunisie

Michel Rouleux
Université Paris-Sud, Département de Math.
91405 ORSAY CEDEX - France