JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ENRICO BERNARDI
ANTONIO BOVE

Conditions de Levi pour le problème de Cauchy pour une classe d'équations hyperboliques à caractéristique triples

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A4_0>

Conditions de Levi pour le problème de Cauchy pour une classe d'équations hyperboliques à caractéristiques triples.

E. Bernardi

A. Bove

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Piazza di Porta S. Donato, 5
40127 Bologna, Italy

1. Introduction et présentation du résultat.

Il est bien connu que le problème de Cauchy dans C^∞ n'est pas bien posé en général pour des opérateurs hyperboliques d'ordre m à caractéristiques multiples, si on n'impose pas des conditions sur les termes d'ordre inférieur (conditions de Levi). Dans le cas de caractéristiques doubles le problème a été résolu par Ivrii – Petkov [5] et Hörmander [2].

Le but de ce travail est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques triples soit bien posé .

Nous considérons des opérateurs différentiels d'ordre m , $P = P_m + P_{m-1} + \cdots$, dont le symbole principal P_m s'annule d'ordre trois sur une varieté Σ et le localisé sur Σ de P_m s'écrit de la forme $L \cdot Q$, où Q est une forme quadratique non–effectivement hyperbolique. Pour cette classe d'opérateurs les conditions de Levi se formulent en termes du symbole sous–principal p^s_{m-1} de P et de son Hamiltonien, $H_{p^s_{m-1}}$. De façon plus précise on dénote par $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x')$ des coordonnées dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, par $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$ et par Γ_P le cone d'hyperbolicité de P. Si $\sigma = d\xi \wedge dx = d\omega$ est la forme symplectique usuelle dans $T^*\Omega \setminus 0$ soit Γ_P^σ le polaire de Γ_P par rapport à σ. Si ρ est un zéro double de q on dénote par F_q la matrice hamiltonienne de q en ρ et par $Tr^+F_q = \sum \mu_j$, where $\pm i\mu_j \in sp(F_q)$.

Nous allons formuler de façon précise nos hypothèses.

Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel d'ordre m:

$$P(x, D) = P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) + \cdots \tag{1}$$

où P_j désigne la partie homogène d'ordre j de P, $j = 0, 1, \ldots, m$. On suppose que P ait ses coéfficients dans C^∞ sur Ω, $0 \in \Omega$.

H1. Le symbole principal de P, $P_m(x,\xi)$ est hyperbolique par rapport à ξ_0.

H2. Les racines caractéristiques de $\xi_0 \mapsto P_m(x, \xi_0, \xi')$ ont multiplicité au plus trois et l'ensemble des zéros triples

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega \mid p_m(x,\xi) = 0,\ dp_m(x,\xi) = 0,\ d^2p_m(x,\xi) = 0\}$$

est une varieté lisse telle que

$$\operatorname{rang} \sigma_{|_\Sigma} = \text{constante}.$$

et la 1–forme canonique ω ne s'annule pas identiquement sur $T\Sigma$.

H3$_\rho$. Soit $\rho \in \Sigma$ et on dénote par $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0) \ni \delta z \mapsto P_{m,\rho}(\delta z)$ le localisé de P_m en ρ. Il s'agit d'un polynome homogène hyperbolique d'ordre trois sur le quel on suppose:

i) $P_{m,\rho}(\delta z) = L_1(\delta z)Q_2(\delta z)$, où $L_1(\delta z) = \delta\xi_0 - \ell_1(\delta x, \delta\xi')$, ℓ_1 étant une forme lineaire.

ii) $Q_2(\delta z)$ est une forme quadratique hyperbolique réelle telle que:

a) $\dim\ker F_{Q_2} = \dim T_\rho\Sigma$

b) $\ker F_{Q_2}^2 \cap Im\ F_{Q_2}^2 = \{0\}$

c) $\dim Im\ F_{Q_2}^2 > 0$

d) $\mathrm{sp}\,(F_{Q_2}) \subset i\,\mathbf{R}$

H4$_\rho$. $H_{L_1} \in \mathrm{Int}\,(\Gamma_{Q_2}^\sigma) \cap T_\rho\Sigma$.

Si on dénote par $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid x_0 < t\}$, on peut énoncer le premier théorème:

THÉORÈME 1.

On suppose que le problème de Cauchy pour P est bien posé dans Ω_t, t assez pétit. Soit $\rho \in \Sigma$; si H1, H3$_\rho$, i) , ii) b)–d) *et si*

$$H_{L_1} \in \Gamma_{Q_2}^\sigma \cap \ker F_{Q_2}$$

les conditions suivantes sont nécessaires:

$L1)_\ell$
$$Re\ p^s(\rho) = 0$$
$$H_{Tr^+F_{Q_2}L_1} \pm H_{Re\,p^s}(\rho) \in \Gamma_p^\sigma(\rho)$$

$L2)$
$$Im\ p^s(\rho) = 0, \quad H_{Im\,p^s}(\rho) = 0$$

Le résultat suivant montre que L1 et L2 sont presque suffisantes.

THÉORÈME 2.

On suppose que P vérifie les hypothèses H1, H2, H3$_\rho$, H4$_\rho$, $\forall\rho \in \Sigma$. *Alors, si on assume:*

$L1)_s$
$$Re\,p^s(\rho) = 0 \qquad \forall\rho \in \Sigma$$
$$H_{Tr^+F_{Q_2}L_1} \pm H_{Re\,p^s}(\rho) \in \mathrm{Int}(\Gamma_p^\sigma(\rho)), \qquad \forall\rho \in \Sigma$$

et L2, *le problème de Cauchy pour P est bien posé dans* Ω.

2. Quelques commentaires.

L'hypothèse $H4_\rho$ entraine que $P_{m,\rho}$ est un polynome strictement hyperbolique et que $\Gamma_p(\rho) = \Gamma_{Q_2}$. En plus on a que $H_{L_1} \in T_\rho\Sigma \cap T_\rho^\sigma\Sigma$. En particulier cette hypothèse assure qu'il n'y a pas de courbes bicaractéristiques issues hors de Σ qui ont des points limites sur Σ. Quand cela se vérifie, déjà dans le cas des caractéristiques doubles on ne sait pas si les conditions d'Ivrii–Petkov–Hörmander sont suffisantes pour la bonne position du problème de Cauchy.

L'hypothèse H3 c) signifie que si $\Sigma = \{\rho \in T^*\mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi_j(\rho) = 0,\ j = 1, \dots, d\}$, le rang de la matrice $(\{\varphi_i,\ \varphi_j\}(\rho))_{i,\ j=1,\dots,d}$ est positif, c'est à dire que Σ contient des composantes symplectiques.

Nous avons toujours travaillé dans l'hypothèse H3 b), mais on remarque que le Théorème 2 peut être démontré même si on remplace H3 b) par

$$\mathrm{H3}_\rho b)_{II} \qquad \rho \in \Sigma, \quad \ker F_{Q_2}^2 \cap Im\, F_{Q_2}^2 \neq \{0\}$$

et la condition (2.14) de [1] est vérifiée.

Finalment on note que le Théorème 1 donne le résultat du Théorème 12.4.6 de [3] dans le cas d'opérateurs à coefficients constants. Il est aussi facile de voir que si $P(x, D) = L(x, D)B(x, D)$, où $\xi_0 - \ell_1(x, \xi')$, et $b_2(x, \xi)$ sont les symboles principaux de L et B respectivement, nos conditions de Levi L1 , L2 restituent la condition d'Ivrii–Petkov–Hörmander pour B. Enfin on remarque que les conditions nécessaires données par Ivrii–Petkov sont remplies et que toutes les hypothèses et conditions de Levi sont invariantes par transformations canoniques.

3. Esquisse de la preuve du Théorème 1.

On a suivi les idées d'Hörmander dans le cas des caractéristiques doubles. En effet nos conditions sont nécessaires pour la validité d'une estimation a priori du type

$$\| u \|_{-\mu}^{-} \leq C \| Pu \|_{\mu}^{-} \tag{2}$$

$u \in C_0^\infty(K)$, $K \subset\subset \Omega$, $\mu > 0$ qui résulte aussitôt quand'on assume que le problème de Cauchy soit bien posé . Il s'agit alors, en supposant que $L1)_\ell$ et L2) ne soient pas vérifiées, de construire une solution asymptotique u_τ, $\tau > 0$ grand paramètre, qui va violer l'estimation (2). La preuve se divide en plusieurs étapes.

Première étape.

On retrouve la condition nécessaire de Ivrii–Petkov, c'est à dire $p^s_{m-1}(\rho) = 0,\ \rho \in \Sigma$. Par des dilatations symplectiques on localise P prés d'un point $\rho \in \Sigma$, où $\rho = (0, e_n)$ et

$$P_\tau(x, D) = \left\{ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 P_m}{\partial \xi_0^3}(0, e_n)\right) D_0^3 + P_{m-1}(0, e_n) D_n^2 \right\} D_n^{m-3} + O(\tau^{-N}),$$

N assez grand. En conjugant par

$$E_\tau(x) = e^{i\,\tau^{3/2}\,x_n + i\,\varphi_\tau(x)},$$

où

$$\varphi_\tau(x) = i\,\tau\,(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) + i\sqrt{\tau}\ x_n^2\ + \tau\,\gamma x_0,$$

γ étant la racine de l'équation $\gamma^3 + P_{m-1}(0, e_n) = 0$, avec $Im\ \gamma < 0$, on peut trouver une solution asymptotique

$$u_\tau(x) = E_\tau(x) \sum_{j \geq 0} \tau^{-j/2}\, v_j(x)\,;$$

qui résoud $P_\tau u_\tau \sim 0$ et qui contredit (2).

Par la même méthode on prouve aussi que L2) est nécessaire.

Deuxième étape.

Ici on va prouver que $L1)_\ell$ est nécessaire. On peut choisir des coordonnées adaptées telles que le localisé peut s'écrire de la forme:

$$\begin{aligned} P_\tau(x, D) = \big\{ &(D_0 - \langle \lambda', x' \rangle D_n - \langle \lambda'', D'' \rangle) \\ &\big[-D_0^2 + 2D_0\, L_1\,(x' D_n,\ D'') + 2D_0\, L_2\,(x''' D_n,\ D''') \\ &+ Q^{(1)}\,(x' D_n,\ D'') + Q^{(2)}\,(x''' D_n,\ D''') + Q^{(3)}\,(x' D_n,\ D''; x''' D_n,\ D''')\big] \\ &+ (c_0\, D_0 + \langle c', x' \rangle D_n + \langle c'', D'' \rangle + \langle c_1''', x''' \rangle D_n \\ &+ \langle c_2''',\ D''' \rangle) D_n \big\}\ D_n^{m-3} + O(\tau^{-N}) \end{aligned}$$

où $x' = (x_1, \dots, x_d)$, $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_\ell)$, $x''' = (x_{\ell+1}, \dots, x_{n'})\, x^{IV} = (x_{n'+1}, \dots, x_{n-1})$ et les L_j désignent des formes linéaires et les $Q^{(j)}$ des formes quadratiques dans les coordonnées. En posant

$$\Lambda = (\lambda', \lambda''), \quad c_1 = c_1''' + i\, c_2'''$$

$$H = M + L_2 \otimes \Lambda, \quad M = M_1 + i\, M_2.$$

où $Q^{(3)}(t;\, x''', \xi''') = 2\langle M_1 t,\, x'''\rangle + 2\langle M_2 t,\, \xi'''\rangle$ et $t = (x'\, \xi_n,\, \xi''))$ avec $M = M_1 + i\, M_2$ et $C = (c', c'')$.

La possibilité de trouver une solution asymptotique de la forme $e^{i\tau\psi} \sum_{j \geq 0} v_j(x)\tau^{-j}$ avec $Im\, \psi > 0$ est lié au comportement des racines réelles de la suivante équation algébrique du quatrième degré :

$$\begin{aligned}
(3) \qquad & \psi_{x_0}^4\, (1 + \langle \bar{L}_2,\, F L_2\rangle) \\
& + \psi_{x_0}^3 (2\, Re\langle \bar{L}_2, F\, Ht\rangle + 2\langle \Lambda - L_1,\, t\rangle) \\
& + \psi_{x_0}^2 \big(\xi_n\, Re\, \langle \bar{c}_1,\, F L_2\rangle + \langle \bar{H}t,\, F\, Ht\rangle \\
& - Q^{(1)}(t) + \langle \Lambda, t\rangle^2 - 2\langle \Lambda, t\rangle\, \langle L_1, t\rangle - \xi_n (c_0 + Tr^+ F_{Q_2})\big) \\
& + \psi_{x_0} \big(\xi_n\, Re\, \langle \bar{c}_1,\, F\, Ht\rangle - \xi_n \langle C + c_0\, \Lambda,\, t\rangle\big) \\
& + \frac{\xi_n^2}{4}\, \langle \bar{c}_1,\, F c_1\rangle = 0
\end{aligned}$$

où

$$F = \left(C^{(2)} + i\, B^{(2)}\right)^{-1},$$

et

$$Q^{(2)}(x''', \xi''') = \langle A^{(2)} x''',\, x'''\rangle + 2\langle B^{(2)} x''',\, \xi'''\rangle + \langle C^{(2)} \xi''',\, \xi'''\rangle$$

avec $A^{(2)} = C^{(2)}$.

La nécessité de $L1)_\ell$ est équivalente au fait que (3) ait quatre racines réelles pour chaque valeur du paramètre t.

La preuve se termine en utilisant la technique d'Hörmander [2].

4. Esquisse de la preuve du Théorème 2.

La technique est classique: il s'agit d'établir des estimations d'énergie pour P en multipliant dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, P par un opérateur hyperbolique à caractéristiques doubles choisi d'une façon convenable et dont les termes d'ordre inférieur vont jouer un rôle fondamental pour obtenir des estimations avec perte de deux dérivées.

5. Un example.

Soit

$$P(x,D) = (D_0 - \ell D_1)(-D_0^2 + D_1^2 + \mu(D_2^2 + x_2^2 D_n^2)) + p_2(x,D).$$

Avec $\mu > 0$, $\ell \in \mathbf{R}$, P est un opérateur hyperbolique dont le symbole principal s'annule à l'ordre trois sur

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0, x_2 = 0\}.$$

On pose alors $p_2(x,D) = (c_0D_0 + c_1D_1 + c_2D_2 + c_3x_2D_n)D_n$, $c_j \in \mathbb{C}, j = 0,1,2,3$. Les hypothèses H1, H2, H3 sont remplies tandis que H4 équivaut à $|\ \ell\ | < 1$.

Les conditions de Levi L1 et L2 deviennent alors:

$c_j \in \mathbf{R}, j = 0,1,2,3$ et

$$\mu \geq |\ c_0\ | + \sqrt{\frac{1}{\mu}(c_2^2 + c_3^2) + (|\ c_1\ | - \ell\mu)^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bernardi A. Bove, *Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics.* Comm. in P.D.E., 13 (1), 61-86 (1988).

[2] L. Hörmander, *The Cauchy Problem for differential equation with double characteristics.* J. Analyse Math **32** (1977), 118 - 196.

[3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II,III,* Springer Verlag, Berlin, 1985.

[4] V. Ja. Ivrii, *The well-posedness of the Cauchy Problem for non-strictly hyperbolic operators, III, The Energy Integral.* Trans. Moscow Math. Soc., **34** 1978, 149-168.

[5] V. Ja. Ivrii V. M. Petkov, *Necessary conditions for the correctness of the Cauchy Problem for non strictly hyperbolic equations.* Russian Math. Surveys **29**: (5), (1974) 1-70.