JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

OMAR DEBBAJ
AHMED INTISSAR

Régularité L^p de problèmes aux limites de type Hermite et Tricomi

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A2_0>

REGULARITE L^p DES PROBLEMES AUX LIMITES DE TYPE HERMITE ET TRICOMI

Omar DEBBAJ et **Ahmed INTISSAR**

Université Mohamed V
E.M.I. B.P: 765.
Section de Mathématiques
RABAT - MAROC

Université Mohamed V
Faculté des Sciences
Dép. de Mathématiques
RABAT - MAROC

§.0. INTRODUCTION

Soit k un entier naturel et soit $L_k(t,x;D_t,D_x)$ l'opérateur différentiel défini dans le demi-espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ par :

$$L_k(t,x;D_t,D_x)=D_t^2+t^k P(t,x;D_x)+t^{]k/2[}Q(t,x;D_x)D_t + t^{](k-1)/2[} R(t,x;D_x)+ S(t,x;D_t).$$

où P (resp. Q, R et S) est un opérateur différentiel d'ordre 2 (resp. d'ordre 1) à coefficients C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ et où $]k/2[$ désigne le plus petit entier positif supérieur ou égal à k/2.

Soit le problème de Dirichlet associé à L_k :

$$(*)\quad \begin{cases} L_k(t,x;D_t,D_x)\, u(t,x) = f(t,x) \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ \gamma\, u(x) = \phi(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où γ désigne l'application trace sur $\mathbb{R}^n$.

On va établir la régularité maximale L^p des solutions du problème de Dirichlet (*). La régularité Hölderienne maximale est également obtenue pour tout entier k positif généralisant ainsi les résultats obtenus par le premier auteur dans [10]. La méthode utilisée ici pour obtenir ces résultats s'adapte trés bien pour l'étude de la régularité C^μ et L^p de certains problèmes à dérivée oblique associés aux opérateurs différentiels de type L_k.

Récemment, pour certains problèmes aux limites singuliers, la régularité dans des espaces de Besov a été obtenue dans [12] en utilisant les techniques des estimations a priori. Ici, pour établir nos résultats, on utilise, comme dans [10],une méthode "pseudo-différentielle" . On construit les opérateurs de Poisson et de Green associés à L_k, comme dans [8] et [10], en utilisant essentiellement, les travaux de Boutet De Monvel [5] et [6], Bolley-Camus-Helffer [2] et de Visik-Grusin [16].

La continuité L^p de l'opérateur de Poisson s'obtient directement à partir des estimations sur son noyau distribution, voir §.2. Par contre pour la continuité L^p de l'opérateur de Green, on établit la continuité L^p d'une sous classe d'opérateurs pseudo-différentiels de "$OPS^{\mu,\nu}$" de Boutet De Monvel. Pour cela, on établit d'abord, des estimations assez fines sur leurs noyaux distribution; puis on utilise, comme dans Nagel - Stein [13] et Coifman - Weiss [7] une décomposition de Calderon - Zygmund associée à une pseudo-norme adaptée aux estimations obtenues sur les noyaux de Green (version de Coranyi-Vagi).

§.1-HYPOTHESES ET RESULTATS

On notera par (t,x) l'élément générique de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et par (τ,ξ) sa variable duale. Sur l'opérateur différentiel L_k considéré dans le §-0 on fait les hypothèses habituelles :

(H_o) L'opérateur L est elliptique pour $t > o$.

(H_1) L'opérateur $L_k(t,x;D_t,D_x) \equiv D_t^2 + t^k P_2(o,x;D_x)$ $+ (t^{k/2r})_+ Q_1(o,x;D_x)D_t$ est elliptique pour $t > o$. P_2 et Q_1 désignent les parties principales respectivement de P et Q et $(t^{k/2r})_+$ la fonction égale à $t^{k/2}$ si $k/2 \in \mathbf{N}$ et à o sinon.

(H_2) Pour tous $x \in \mathbf{R}^n$ et $\xi \in \mathbf{R}^n-\{o\}$ le problème associé à l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} L^+_k(t,x;D_t,\xi)\ u = o \\ u(o) = o \\ u \in \mathcal{S}(\bar{R}_+) \end{cases}$$

n'admet que la solution identiquement nulle .

$L^+_k(t,x;D_t,\xi)$ désigne l'opérateur différentiel suivant

$$L^{+}_{k}(t,x;D_t,\xi) = D_t^2 + (t^{k/2})_+ Q_1(o,x;\xi)D_t + t^k \; P_2(o,x;\xi)$$
$$+(t^{(k-2)/2})_+ R_1(o,x;\xi).$$

Exemple : Soit $k \in \mathbb{N}$ et considérons l'opérateur différentiel défini dans $R \times R^n$ par $L_k = D_t^2 - t^k \Delta_x$ où Δ_x est le Laplacien ordinaire dans R^n. L'opérateur L_k vérifie toutes les hypothèses $(H_0)(H_1)$ et (H_2). Par ailleurs nous avons :

L_0 est le Laplacien ordinaire dans $R \times R^n$;

L_1 est un opérateur différentiel de type Tricomi dans $R \times R^n$;

L_2 est un opérateur différentiel de type Hermite dans $R \times R^n$

Pour énoncer le résultat principal, on fixe quelques notations supplémentaires pour les espaces fonctionnels dont on va se servir. Pour $\rho = 2/(2+k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ on définit pour tout $s \geq o$ l'espace de sobolev avec poids la fonction t :

$$W_t^{s+2\rho,p}(R_+ \times R^n) = \{ u \in L^p(R_+ + R^n);\; D_t^2 u \in W^{s,p}(R_+ \times R^n)$$

$$t^k u \in W^{s+2,p}(R_+ \times R^n) \text{ et } t^{3\ k/2\ell} D_t u \in W^{s+1,p}(R_+ \times R^n)\}$$

où les $W^{m,p}(R_+ \times R^n)$ désignent les espaces de Sobolev usuels. De la même manière on considère les espaces de Hölder avec poids $C_t^{s+2\rho}(R_+ \times R^n)$ où les $C^{s+2\rho}(R_+ \times R^n)$ sont les espaces de Hölder usuels (voir [4] et pour les traces de certains espaces de Sobolev avec poids voir [3] et [12]).

Maintenant nous pouvons énoncer le théorème principal de régularité maximale L^p pour le problème de Dirichlet associé à l'opérateur L_k.

Théorème 1. Soient k un entier positif et $\rho = 2/(2+k)$. Sous les hypothèses (H_0),(H_1) et (H_2) sur l'opérateur différentiel L_k considéré dans le §.0 on a : Pour $s \geq o$ et $p > 1$ et pour $f \in W^{s,p}_{comp}(\bar{R}_+ \times R^n)$ et $\phi \in W^{s+2\rho-\rho/p,p}_{comp}(R^n)$si $u \in W^{r,p}_{loc}(\bar{R}_+ \times R^n)$, $r > 1/p$, est solution du problème de Dirichlet

$$(*) \qquad \begin{cases} L_k(t,x;D_t,D_x)\; u(t,x) = f(t,x) \text{ dans } R_+ \times R^n \\ \gamma\; u(x) = \phi(x) \quad \text{dans } R^n \end{cases}$$

alors $u \in W^{s+2\rho,p}_{t,loc}(\bar{R}_+ \times R^n)$

On a aussi la régularité Hölderienne maximale :

Théorème 2 *. Avec les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1 on a : Pour* $\mu > o$ *et pour* $f \in C^{\mu}_{comp}(\bar{R}_+ \times R^n)$

et $\phi \in C^{\mu+2\rho}_{comp}(R^n)$ si $u \in L^\infty_{loc}(\bar{R}_+ \times R^n)$ est solution du problème de Dirichlet (*) ci-dessus alors $u \in C^{\mu+2\rho}_{t,loc}(\bar{R}_+ \times R^n)$.

Remarque 1. Le théorème 2 généralise pour tout entier k les résultats de régularité Hölderienne maximale obtenus dans [10] pour "k pair".

Remarque 2 . Les théorèmes 1 et 2 restent valables pour le problème de Dirichlet dans un ouvert Ω de R^{n+1}, borné, de frontière régulière et pour tout opérateur du second ordre qui dans une carte locale convenable s'écrit sous la forme de l'opérateur L_k considéré dans le demi-espace $R_+ \times R^n$.

Nous insisterons sur le théoèrme 1. En effet, comme dans [10], le théorème 2 découlera assez aisément des estimations obtenues sur les noyaux de Poisson et de Green pour le problème de Dirichlet associé à L_k dont les constructions seront esquissées dans le §.2.

§.2- METHODE PSEUDO-DIFFERENTIELLE POUR LA CONSTRUCTION DES NOYAUX DE POISSON ET DE GREEN ASSOCIES A L_k POUR TOUT k ENTIER POSITIF (PAIR OU IMPAIR).

2.1-Construction de l'opérateur de Poisson et estimation de son noyau distribution: On notera par $\mathcal{S}(R_+ \times R^n)$ l'ensemble des fonctions $p(t,x,\xi)$ C^∞ sur $\bar{R}_+ \times R^n \times R^n - \{o\}$ telles que pour tous $\alpha, \beta \in N^n$ et M, $N \in N$ et pour tout compact K de $\bar{R}_+ \times R^n$ il existe une constante c>o telle que pour tous $(t,x) \in K$ et $\xi \in R^n - \{o\}$

$$|t^M D_t^N D_x^\alpha D_\xi^\beta p(t,x;\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{m-|\beta|-\rho(M-N)}$$

On définit les noyaux de Poisson $K^m(\bar{R}_+ \times R^n)$ comme l'ensemble des opérateurs P linéaires continus de $C^\infty_{comp}(R^n)$dans $C^\infty(\bar{R}_+ \times R^n)$défini pour $\phi \in C^\infty_{comp}(R^n)$par

$$P\phi(t,x) = (2\Pi)^{-n} \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} p(t,x;\xi)\, \hat{\phi}(\xi)\, d\xi$$

où p est un symbole de Poisson appartenant à $\mathcal{S}(R_+ \times R^n)$. **On a**

Théorème 2.1. Sous les hypothèses (H_0),(H_1) et (H_2) il existe un noyau de Poisson $K \in K^0(R_+ \times R^n)$ tel que

$$(2.2) \quad \begin{cases} L_k(t,x;D_t,D_x)\, K \equiv 0 \text{ mod } K^{-\infty} \\ \gamma\, K \equiv I \text{ mod } OPS^{-\infty}_{1,0} \end{cases}$$

2.2-Construction de l'opérateur de Green et estimation des noyaux distribution associés: On notera $\Omega = R_+ \times R^n$ et $\Gamma = R^n$ On introduit une sous classe de symboles $\Sigma_+^{\mu,\nu}$ de la classe de symboles de Boutet De Monvel "$S^{\mu+\nu,\mu}$" :

Définition 2.1.Soit $\delta = 1-\rho$.On désignera par $\Sigma_+^{\mu,\nu}$, $\nu \geq o$, l'ensemble des fonctions $p(t,x;\tau,\xi)$ appartenant à $S^{(1-\delta)\mu+\nu}_{\rho,\rho}$ telles que pour tout compact K de $\bar{R}_+ \times R^n$ et pour tous α, $\beta \in N^n$ et M, N $\in$ **N** il existe une constante $c > o$ telle que

(2.3) $$|D_t^N D_x^\beta D_\tau^M D_\xi^\alpha p(t,x;\tau,\xi)| \leq c \frac{|\xi|^{\nu+\rho N/\delta} d_\Sigma^{\mu-|\alpha|/\rho-M-\rho N/\delta}}{(t\, d_\Sigma+1)^{\delta|\alpha|/\rho}}$$

Pour tous $(t,x) \in K$ et $(\tau, \xi) \in R \times R^n$ $|(\tau,\xi)| \geq 1$ (d_Σ étant égal à $(\tau^2 + t^k|\xi|^2 + |\xi|^{2\rho})^{1/2}$).

Nous avons $\Sigma_+^{\mu,\nu} \subset S^{\mu+\nu,\mu}$ dans $(R_+ \times R^n) \times (R \times R^n)$. On notera $I_+^m = \bigcap_{j\in N} \Sigma^{-j/\delta, m+\rho j/\delta}$ et on désignera par $OP\Sigma_+^{\mu,\nu}$

(resp.OPI_+^m) l'ensemble des opérateurs pseudo- différentiels associés aux symoles p appartenant à $\Sigma_+^{\mu,\nu}$(resp. I_+^m). Maintenant nous pouvons énoncer le résultat concernant le noyau de Green associé à l'opérateur L_k :

***Théorème** 2.2. Sous les hypothèses (H_o),(H_1) et (H_2) sur L_k il existe un opérateur $Q \in OP\Sigma_+^{-2,o}$ possédant la propriété de transmission et un opérateur $I \in OPI_+^{-2\rho}$ tels que l'opérateur $G = G_1+G_2+G_3$ avec $G_1=Q^\Omega$ $G_2=-K\,\gamma\,Q^\Omega$ et $G_3 = I^\Omega$ vérfie pour $s \geq o$.*

$$\begin{cases} L\,G - I \in \mathcal{L}\,(W^{s,p}_{comp}(\bar{\Omega}),\ C^\infty(\bar{\Omega})) \\ \gamma G \in \mathcal{L}\,(W^{s,p}_{comp}(\bar{\Omega}),\ C^\infty(\Gamma)) \end{cases}$$

(K étant un noyau de Poisson défini dans la proposition 2.1 choisi proprement supporté).

Pour établir ce théorème on utilise, principalement, comme dans [10] certains résultats de Boutet De Monvel [5] et [6], Bolley-Camus-Helffer [2] et de Visik - Grusin [16]. Notons que pour les k impairs on ne peut pas prolonger les coefficients de l'opérateur L_k, comme dans [10], tout en conservant l'éllipticité pour $t\neq o$

Nous donnons maintenant les estimations des noyaux distribution associés aux opérateurs pseudo-différentiels $OP\Sigma_+^{\mu,\nu}$ dont nous aurons besoin dans le paragraphe §-3. Avec une troncature, bien adaptée, du symbole p de $P \in OP\Sigma_+^{\mu,\nu}$, comme dans [10], nous obtenons.

Proposition 2.1. Soit $K(t,x;t-s,x-y)$ le noyau distribution associé à un opérateur pseudo-différentiel P appartenant à $OP\Sigma_+^{\mu,\nu},\nu\}$ o. Alors K se décompose sous la forme $K = K_1 + K_2$ avec

(i) K_1 est C^∞ pour $(t,x) \neq (s,y)$. De plus pour tout $N \geq o$ tel que $n + \rho + \rho\mu + \nu - \rho N > o$ et pour tout compact K de $\bar{R}_+ \times R^n$ il existe une constante $c > o$ telle que :

$$|t^N K_1(t,x;t-s,x-y)| \leq c(|t-s|^{1/\rho} + |x-y|)^{-(n+\rho)-(\rho\mu+\nu)+\rho N}$$

lorsque $(t,x) \in K$ et $(s,y) \in \bar{R}_+ \times R^n$, $(s,y) \neq (t,x)$.

(ii) $K_2(t,x;t-s,x-y)$ est C^∞ pour $(t,x) \neq (s,y)$ et vérifie pour N $\geq o$ tel que $n + 1 + \mu + \nu + N > o$, pour tout compact K de $\bar{R}_+ \times R^n$, il existe une constante $C > o$ telle que

$$|K_2(t,x;t-s,x-y)| \leq C\ t^{\mu+\delta/\rho+N}\ (|t-s|^{1/\rho} + t^{\delta/\rho}|t-s| + |x-y|)^{-(n+1)-(\mu+\nu)-\rho N}$$

pour tous $(t,x) \in K$ et $(s,y) \in \bar{R}_+ \times R^n$, $(s,y) \neq (t,x)$.

§.3. DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL

3.1. Continuité L^p du noyau de Poisson. La continuité L^p de l'opérateur de Poisson s'obtient directement à partir des estimations sur son noyau distribution.On obtient

Proposition 3.1. Soit $\ell, m \in R, p > 1$ et soit P un opérateur de Poisson dans K^m. Alors P se prolonge en un opérateur linéaire continu de $W_{comp}^{\ell-\rho/p,p}(R^n)$ dans $W_{loc}^{\ell-m,p}(\bar{R}_+ \times R^n)$

De la Proposition 3.1 on déduit

Corollaire 3.2. Un noyau de Poisson $K \in K^o$ se prolonge, pour tous $s \geq o$ et $p > 1$, en un opérateur linéaire borné de $W_{comp}^{s+2\rho-\rho/p,p}(R^n)$ dans $W_{loc}^{s+2\rho,p}(\bar{R}_+ \times R^n)$

3.2 Continuité L^p du noyau de Green . On sera amené à utiliser des pseudo-normes adaptées aux estimations obtenues dans la proposition 2.6, comme dans Coifmann-Weiss [7] et dans Nagel-Stein [13]. Posons pour (t,x)et $(s,y) \in R_+ \times R^n$

$$(3.1) \qquad |(t-s,x-y)|_t = \frac{|t-s|^{1/\rho} + t^{\delta/\rho}|t-s| + |x-y|}{|t-s|^{\delta/\rho} + t^{\delta/\rho} + |x-y|^\delta}$$

Nous avons :

Lemme 3.1 (i) $|(t-s,x-y)|_t \sim |(t-s,x-y)|_s$ pour tous (t,x) et $(s,y) \in R_+ \times R^n$

(ii) **"Inégalité triangulaire"**:il existe $c > o$ tel que

$$|(t-s,x-y)|_t \leq c(|(t-r,x-z)|_t + |(r-s,z-y)|_r)$$

pour tous $(t,x),(s,y)$ et $(r,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$.

La première assertion est simple à obtenir, quant à la vérification de l'inégalité triangulaire, elle se fait terme par terme en utilisant convenablement l'inégalité de Hölder ($ab \leq a^{1/p} + b^{1/\delta}$).

Pour $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$, on désigne par $B(t,x),r)$ la pseudo-boule de centre(t,x) et de rayon r associé à la pseudo-norme $|\ |_t$ i.e $\{(s,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \,/\, |(s-t,y-x)|_t < r\}$ Nous avons

Lemme 3.2. (i) les boules $B((t,x),r)$ forment une base de voisinage de (t,x)

(ii) mes $B((t,x),2r) \leq c$ mes $B((t,x),r)$

(iii)Il existe une constante $c>0$ telle que

si $B((t_1,x_1),r_1) \cap B((t_2,x_2),r_2) \neq \emptyset$ et $r_1 \geq r_2$ alors $B((t_2,x_2),cr_2) \supset B((t_1,x_1),r_1)$

En utilisant ce lemme nous avons la décomposition de Calderon- Zygmund adaptée à ces pseudo-boules (voir [7] et [13]) que l'on utilise d'une manière essentielle pour obtenir

Théorème 3.1. Soit $P \in OP\Sigma_+^{0,0}$.Alors P^0 se prolonge, pour tout $p>1$,en un opérateur borné de $L^p_{comp}(\overline{\mathbf{R}}_+ \times \mathbf{R}^n)$dans L^p_{loc} $(\overline{\mathbf{R}}^+ \times \mathbf{R}^n)$

Esquisse de la démonstration :.Nous pouvons écrire P sous la forme $P = P_1 + P_2$ avec P_1 et $P_2 \in OP\Sigma^{0,0}$ et dont les noyaux distribution K_1 et K_2 associés, ainsi que leurs dérivées, vérifient respectivement (i) et (ii) de la proposition 2.6 avec les μ et v correspondants. Montrons le théorème pour P_2. Puisque $P_2 \in OPS^0_{\rho,\rho}$ $(\rho<1)$ P_2 est borné de L^2 dans L^2 (théorème de Calderon-Vaillancourt). Par conséquent, pour obtenir le théorème on est ramené à montrer que P_2 est (1.1) faible. Pour cela il suffit que l'on ait, pour tout $(s,y) \in B((s_0,y_0);r)$,

$$(3.2) \qquad \int_{(t,x) \notin B((s_0,y_0);2r)} | K_2(t,x;t-s,x-y) - K_2(t,x;t-s_0,x-y_0)| \, dt\, dx < C$$

Ceci résulte des estimations sur K_2 et de la nature des pseudo-boules considérées ici.

De même on vérifie que P_1 est (1,1)- faible en utilisant la pseudo-norme $|\ |_0$ défini par$|(t-s,x-y)|_0 = (|t-s|^{1/p} + |x-y|)^p$ et les estimations de son noyau associé données par la proposition 2.6 (i). Cela achève la démonstration du théorème 3.1.

En se basant essentiellement sur le théorème 3.1 on obtient, par les mêmes techniques que dans[10] :

Proposition 3.2. L'opérateur de Green G donné par le théorème 2.2 se prolonge en un opérateur borné de $V^{s,p}_{comp}(\bar{\Omega})$ $(s \geq 0,\ p > 1)$ dans $W^{s+2p,p}_{t,loc}(\bar{\Omega})$.

§4 - APPLICATION A LA REGULARITE D'UN PROBLEME AUX LIMITES NON LINEAIRE

Dans ce paragraphe on va étudier la régularité des solutions de problèmes aux limites non linéaires dont les opérateurs linéarisés sont dans la classe d'opérateurs étudiés aux paragraphes précédents.

Soit $F(t,x,p_{\alpha j})_{0 \leq \alpha + j \leq 2}$ une fonction réelle de classe $C^{\infty}(R^{N})$ où N désigne le nombre de variables de la fonction F. On note par $C_t^{2+m}(R_+^{n+1})$, $m \in N$, l'espace fonctionnel avec poids suivant :

$$C_t^{2+m}(R_+^{n+1}) = \{u \in C^m(R_+^{n+1}) / \partial_t^2 u \in C^m(R^{n+1}),\ t^k u \in C^{m+2}(R_+^{n+1}),\ t^{]k/2[} \partial_t u \in C^{m+1}(R_+^{n+1}),\ t^{](k-2)/2[} u \in C^{m+1}(R_+^{n+1})\}$$

Soit $u \in C_t^2(\bar{R}_+^{n+1})$ une fonction réelle solution du problème.

$$(**) \quad \begin{cases} F(t,x,t^{]-2+(k+2)|\alpha|/2+j[}\, \partial_x^{\alpha} \partial_t^{j} u)_{0 \leq \alpha + j \leq 2} = 0 \\ u_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

L'opérateur linéarisé de (**) s'écrit :

$$L \equiv \sum_{0 \leq \alpha + j \leq 2} a_{\alpha j}(t,x) t^{]-2+(k+2)|\alpha|/2 + j[} \partial_x^{\alpha} \partial_t^{j}$$

avec $a_{\alpha j}(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial p_{\alpha j}}(t,x,t^{]-2+(k+2)|\alpha|/2+j[}\, \partial_x^{\alpha} \partial_t^{j} u)$

Les coefficients $a_{\alpha j}(t,x)$ de l'opérateur L sont dans $C^{0}(\bar{R}_+^{n+1})$. On introduit sur L les hypothèses habituelles (H_0), (H_1) et (H_2). Nous avons

Théorème 4.1. Si les hypothèses (H_0),(H_1) et (H_2) sur l'opérateur linéarisé L du problème non linéaire (**) sont vérifiées et si $u \in C_t^2(\bar{R}_+^{n+1})$ est solution de ce même problème alors $u \in C^{\infty}(\bar{R}_+^{n+1})$.

Ce théorème résulte immédiatement des deux lemmes suivants :

Lemme 1. Si $u \in C_t^2(\bar{R}_+^{n+1})$ est solution du problème (**) alors $u \in W^{3,p}_{t,Loc}(\bar{R}_+^{n+1})$ pour tout $p > 1$, en particulier $u \in C_t^{2+\mu}(\bar{R}_+^{n+1})$ pour tout μ, $0 < \mu < 1$.

Lemme 2. Si $u \in C_t^{2+\mu}(\overline{R}_+^{n+1})$, $o<\mu<1$, est solution du problème (**) alors $u \in C^\infty(\overline{R}_+^{n+1})$.

La démonstration du lemme 2 est basée essentiellement sur les estimations de Schauder et l'utilisation de la méthode des quotients différentiels comme dans Agmon-Douglis-Nirenberg [1] et Douglis-Nirenberg [11] (pour les détails voir [12]). Quant au lemme 1, il se démontre de la même façon que le lemme 2, mais en utilisant cette fois-ci les estimations a priori $W^{s,p}$ $(s\geq o, p>1)$ qui résultent de la continuité L^p des opérateurs de Poisson et de Green associés à l'opérateur linéarisé L.

Nous tenons à remercier le professeur Jacques CAMUS pour les discutions fructueuses que nous avons eues avec lui.et pour nous avoir suggéré l'application de nos résultats obtenus dans le cas L^p, à la régularité C^∞ du problème aux limites non linéaire considéré au paragraphe IV.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **S.AGMON-A.DOUGLIS-L.NIRENBERG.** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial différential equations satisfying general boundary solutions. I*. Comm.On Pure and Applied Math.,Vol. XII(1959) 623-727

[2] **P. BOLLEY-J.CAMUS-B.HELFFER.** Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. Pures et Appl. 56,1976, p. 131.171.

[3] **P.BOLLEY-J.CAMUS.** On a class of Weighted Sobolev Spaces. Proceeding of a Spring School, 1978

[4] **P.BOLLEY-J.CAMUS-G.METIVIER.** Estimations de Schauder et régularité Hölderienne pour une classe de problèmes aux limites singuliers. Comm. in. P.D.E. (1986)

[5] **L.BOUTET DE MONVEL.** Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. on Pure and Applied. Math. Vol.27,1974.

[6] **L.BOUTET DE MONVEL** Comportement d'un opérateur pseudo-differentiel sur une variété à bord. J. Anal Math. 17,1966.

[7] **R.R.COIFMAN-G.WEISS.** Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture Notes in Mathematics (1971 , n°242, Springer Verlag.

[8] **O.DEBBAJ-A.SOUISSI.** Problème à derivée oblique associé à des opérateurs elliptiques singuliers. Coll. EDP. de S^{t} Cast, 1979

[9] **O.DEBBAJ.** Thèse d'état. Rennes 1983

[10] **O.DEBBAJ.** Régularité Hölderienne maximale de certains problèmes aux limites elliptiques singulier. Comm. Par. Diff. Equat. ;11(8) ; 795-850; (1986).

[11] **A.DOUGLIS-L.NIRENBERG.** Interior estimates for elliptic systems of partial différential equations. Comm . On Pure and Applied Math., Vol 8(1955).

[12] **A.ELBARAKA.** Thèse 3ème cycle, Rennes 1987.

[13] **A.NAGEL-E.M.STEIN.** Lectures on pseudo-differential operators regularity theorems and applications to non elliptic problems Princeton. Univ. Press; 1979.

[14] **R.T.SEELEY.** Extension of C^{∞} functions defined in half space . Proc.Am Math. Soc...(15)(1964).p.625-626.

[15] **E.M.STEIN.**Singular Integrals and Différentiability Properties of functions. Princeton University Press. 1970.

[16] **M.I.VISIK-V.V.GRUSIN.** On class of higher degenarate elliptic equations. Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol.8(1969) n°1 p.1-32.