Journées Équations aux dérivées partielles

Richard Beals

# Calcul pseudodifférentiel trois-étape

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1988), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A1_0>

CALCUL PSEUDODIFFERENTIEL TROIS-ETAPE

R. Beals
Yale University

On décrit des résultats de T. Cummins sur des algèbres pseudodifférentiels associés aux certains opérateurs hypoelliptiques du type de Hörmander. Pour comparaison, on décrit d'abord le cas classique et le cas deux-étape du même point de vue.

Soit toujours $U$ un ouvert dans $\mathbb{R}^d$ et $P = \sum_{j=1}^{d_1} X_j^2 + (\text{ordre} \leq 1)$, ou les $X_j$ sont des champs de vecteurs independants. On cherche un algèbre pseudodifférentiel, ayant loi de composition asymptotique, qui contient un parametrix de $P$ au cas de hypoellipticité maximale.

Soit $d_1 = d$, dimension de l'espace. Alors $P$ est elliptique et il s'agit de l algèbre classique. Cet algèbre peut être décrit de façon moins classique: soit $\sigma_j(x,\xi)$ - symbole de $-\sqrt{-1}\, X_j$, soient

$$(1) \quad F_k(U) = \left\{ f \in C^\infty(U \times [\mathbb{R}^d \setminus 0]) \,,\ f(x,\lambda\sigma) = \lambda^k f(x,\sigma) \,, \forall \lambda > 0 \right\} ,$$

$$(2) \quad F^m(U) = \left\{ f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}) \,,\ f \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_{m-j} \quad f_k \in F_k(U) \right\} ,$$

$$(3) \quad S^m(U) = \left\{ q(x,\xi) = f(x, \sigma(x,\xi)) \,,\ f \in F^m(U) \right\} ,$$

$$(4) \quad S^\infty(U) = \bigcup_m S^m(U) .$$

Alors on a des résultats classiques: moyennant des operateurs aux noyaux $C^\infty$,

(5) $\operatorname{Op} S^\infty(U)$ ne dépend que de la structure $C^\infty$ de $U$ ;

(6) $\operatorname{Op} S^\infty(U)$ est un algèbre;

(7) le symbole principal de la composition $r(x,D) = q_1(x,D)\, q_2(x,D)$,

$q_j \in S^{m_j}(U)$, est le produit des symboles principaux des $q_j(x,D)$.

Ce dernier résultat doit être compris de la façon suivante: on fixe un point $x \in U$, on prend deux opérateurs approximatifs $Q_j^x$ qui correspondent aux $Q_j = q_j(x,D)$, et qui sont invariants par rapport aux translations euclidiennes dans $\mathbb{R}^d \supset U$. Alors le compose $Q_1^x Q_2^x$ est l'opérateur approximatif pour $Q_1 Q_2$ au point $x$. Mais les operateurs invariants sont des opérateurs de convolution et les symboles se composent par multiplication ponctuelle.

Soit maintenant $d_1 = d - 1$, disons, et soit $P$ hypoelliptique avec perte d'une derivée. Alors tout marche comme ci-dessus; un parametrix de $P$ appartient à un algèbre pseudodifférentiel comme décrit, avec les modifications suivantes. On choisit un champs de vecteurs $X_d$ indépendant des $X_j$, $j < d$. Dans (1), il faut remplacer les dilatations isotropes par les dilatations

$$\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{d-1}, \sigma_d) = (\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \ldots, \lambda\sigma_{d-1}, \lambda^2\sigma_d) .$$

Dans (5), on note que l'algèbre d'opérateurs ne dépend que de la structure $C^\infty$ de $U$ et aussi du sous-fibré $\mathcal{V} \subset T(U)$ engendre par les $X_j$, $j<d$. Dans (7), on trouve que la loi de composition des symboles principaux n'est pas forcément commutative. Néanmoins le principe est le même: premièrement on assigne à chaque point une structure de groupe (nilpotent de rang $\leq 2$) dans $\mathbb{R}^d \supset U$ ; deuxièmement on assigne deux opérateurs approximatifs $Q_j^x$ invariants par rapport aux translations à gauche, et le composée $Q_1^x Q_2^x$ define l'opérateur approximatif pour $Q_1 Q_2$. Nous ne décrirons pas ici la façon d'attacher cette structure de groupe; voir le cas trois-étape plus loin. Il faut remarquer que la structure peut varier brutalement d'un point à un autre. Exemple: $P$ est (la partie scalaire de) l'opérateur $\square_{b,2}$ de Kohn-Rossi sur les formes (0,2) de la variété CR

$$M = \left\{ |z_1|^4 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^5 .$$

Dans ce cas le groupe attaché au point z dans M est isomorphe au groupe de Heisenberg $H_4$ si $z_1 \neq 0$, mais il est isomorphe au groupe $H_3 \times \mathbb{R}^2$ si $z_1 = 0$. Alors il ne s'agit pas ici seulement des "variétés de contact" ou des "opérateurs de convolution aux coefficients variables". Voir [1].[2].

Cummins [3] etudie le cas 3-etape. Soient des champs de vecteurs

$$\overbrace{\overbrace{X_1 , \dots X_{d_1}}^{\mathcal{V}_1} , X_{d_1+1} , \dots , X_{d_2}}^{\mathcal{V}_2} , X_{d_2+1} , \dots , X_d$$

indépendants et soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ les sous-fibrés engendrés par les premiers et les deux premiers comme indiqué ci-dessus. Soit $[\mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_1] \subset \mathcal{V}_2$. On introduit des classes de symboles et d'opérateurs comme auparavant, encore avec changement de dilatation:

$$\lambda ( \sigma_1 , \dots , \sigma_d ) = ( \lambda \sigma_1 , \dots , \lambda \sigma_{d_1} , \lambda^2 \sigma_{d_1+1} , \dots , \lambda^2 \sigma_{d_2} , \lambda^3 \sigma_{d_2+1} , \dots , \lambda^3 \sigma_d ) .$$

Cummins montre des résultats analogues pour cette classe d'opérateurs. La classe ne depend que des sous-fibrés $\mathcal{V}_j$. La classe est un algèbre, et la composition des symboles principaux correspond en chaque point à la composition des opérateurs invariants à gauche par rapport à un groupe associé au point. Voici un esquisse de la choix de groupe. Étant donné $x_0 \in U$, on fait d'abord le unique changement de coordonnées affine tel que $x_0 \mapsto 0$ et tel que $X_j(x_0) \mapsto \partial/\partial x_j (0)$. Provisoirement on assigne des poids dans ces coordonnées:

poids d'un produit est somme des poids des facteurs;

poids de $x_j$ est $\underline{-1}$ si $1 \leq j < d_1$, $\underline{-2}$ si $d_1 < j \leq d_2$, $\underline{-3}$ si $j > d_2$

poids de $\partial/\partial x_j$ + poids de $x_j = 0$ .

On prend alors le developpement de Taylor des $X_j$ (c'est-à-dire des coefficients) à l'origine dans ces coordonnées et on garde seulement les termes de poids $\geq$ poids de $\partial/\partial x_j$. S'il y a des termes de poids $>$ poids de $\partial/\partial x_j$, on fait un changement de coordonnées quadratique pour tuer tous ces termes (ce qui est possible grace au hypothèse $[\mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_1] \subset \mathcal{V}_2$ ). Après ce deuxieme changement, en gardant les termes du developpement de $X_j$ de poids = poids de $\partial/\partial x_j$, on obtient des champs de vecteurs approximatifs $X_j^{x_0}$. Les $X_j^{x_0}$, considérés commes champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, sont invariants à gauche par rapport à une unique structure de groupe de

Lie nilpotent de rang $\lesssim 3$ . Une fois de plus, le type d'isomorphie de ce groupe peut varier d'un point à un autre.

Pour terminer cette esquisse, on remarque que dans les cas classique et deux-étape, on a fait des calculs pour le plupart au côté des symboles. Les symboles deux-étape appartient a la classe $S_{1/2, 1/2}$, fait qui indique qu un tel calcul est possible, sinon facile, et que les operateurs d'ordre 0 sont bornes dans $L^2$ . Cummins travait pour la plupart au côté des noyaux; ses symboles appartient à la mauvaise classe $S_{1/3, 2/3}$. Il obtient aussi des estimations: les operateurs d'ordre 0 envoie $L^p_c$ dans $L^p_{loc}$ , $1 < p < \infty$ . Finalement. il faut citer le travail [4] de Rothschild-Stein. Cummins se place dans un cadre plus étroit de ce de Rothschild-Stein pour obtenir des résultats plus précises au niveau du developpement asymptotique et de calcul (en principe) de parametrices.

Il parait que le cas k-étape peut être aborder de la même façon.

## Références


1. R. Beals et P. C. Greiner, Pseudodifferential operators associated to hyperplane bundles, Semin. Matem. Torino, 1983.

2. ―――――――――, Calculus on Heisenberg Manifolds, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988.

3. Cummins, T. E., A pseudodifferential calculus associated to 3-step nilpotent groups, Dissertation, Yale, 1988.

4. L. P. Rothschild et E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, Acta Math. 137 (1976), 247-320.