

Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Gilles Lebeau

Estimations de dispersion pour les ondes dans un domaine strictement convexe

J. É. D. P. (2006), Exposé n° VII, 18 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A7_0>

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Estimations de dispersion pour les ondes dans un domaine strictement convexe

Gilles Lebeau

Résumé

Nous décrivons les estimations de dispersion en temps petit pour les solutions de l'équation des ondes dans un domaine strictement convexe de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, et nous donnons des applications aux inégalités de Strichartz.

1. Introduction et résultats

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ un domaine strictement convexe à bord C^∞ $\partial\Omega$. Nous décrivons ici les estimations de dispersion en temps petit pour les solutions de l'équation des ondes linéaires dans Ω avec condition de Dirichlet au bord, et nous donnons des applications aux inégalités de Strichartz. Les preuves détaillées seront exposées dans [Leb06].

Pour $a \in \Omega$, soit $u_a(t, x)$ la fonction de Green solution dans Ω du problème mixte

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta)u_a &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega, \\ u_a &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \partial\Omega, \\ u_a(0, x) &= \delta_a, \quad \partial_t u_a(0, x) = 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Soient $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq \dots$ les racines carrées des valeurs propres du laplacien $-\Delta$ dans Ω avec condition de Dirichlet, et soient $e_j(x)$ une base orthonormale de fonctions propres associées

$$-\Delta e_j = \omega_j^2 e_j, \quad \|e_j\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

On a

$$u_a(t, x) = \sum \cos(t\omega_j) e_j(x) e_j(a).\tag{1.2}$$

Pour $\chi \in C_0^\infty(]0.8, 2.2[)$, et $h \in]0, 1]$ notons $\chi(hD_t)u_a$ la fonction C^∞ dans $\mathbb{R}_t \times \Omega$ dont la transformée de Fourier en t est égale à $\chi(h\tau)\hat{u}_a(\tau, x)$, c'est à dire

$$\chi(hD_t)u_a(t, x) = \frac{1}{2} \sum e^{it\omega_j} \chi(h\omega_j) e_j(x) e_j(a).\tag{1.3}$$

Alors $\chi(hD_t)u_a$ est une localisation de u_a aux fréquences

$$\{\omega \in \mathbb{R}; 0.8 < h\omega < 2.2\}.$$

Notre résultat principal est le théorème suivant, qui donne l'estimation L^∞ de dispersion pour $u_a(t, x)$ uniformément par rapport à x, a et t petits.

Théorème 1.1. *Il existe $T_0 > 0$, $C_0 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, 1]$, tout $t \in [0, T_0]$, et tout $a, x \in \Omega$, on a*

$$|\chi(hD_t)(u_a)(t, x)| \leq C_0 h^{-d} \min(1, (h/t)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}}). \quad (1.4)$$

Rappelons que si u_{a, \mathbb{R}^d} est la fonction de Green dans l'espace libre, i.e la solution de (1.1) avec $\Omega = \mathbb{R}^d$,

$$u_{a, \mathbb{R}^d}(t, x) = (2\pi)^{-d} \int \cos(t|\xi|) e^{i(x-a)\xi} d\xi,$$

l'estimation classique de dispersion, avec C_0 indépendant de $(t, x, a) \in \mathbb{R}^{1+2d}$ et $h \in]0, 1]$, est

$$|\chi(hD_t)(u_{a, \mathbb{R}^d})(t, x)| \leq C_0 h^{-d} \min(1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}) \quad (1.5)$$

L'estimation (1.4) signifie donc que l'on perd une puissance $1/4$ de h/t à l'intérieur d'un domaine strictement convexe par rapport à l'estimation de dispersion libre. On a choisit d'écrire l'exposant de dispersion de la formule (1.4) sous la forme $\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{d-1}{2} - \frac{1}{4}$, car $d-1$ est la dimension du bord $\partial\Omega$, de sorte que (1.4) montre que l'effet de dispersion reste meilleur que la dispersion dans les directions tangentiellles. Nous verrons dans la section (2) que pour tout $T_0 > 0$, la perte d'une puissance $1/4$ de h/t est optimale pour l'estimation L^∞ uniforme (1.4), en raison de la présence de caustiques de type queue d'aronde dans le support singulier de u_a dès que le point source a vérifie $\text{dist}(a, \partial\Omega) \leq cT_0^2$: la présence de caustiques en temps arbitrairement petit explique la perte par rapport à la dispersion libre. Si on note

$$S_{a,t}$$

la "sphère" de centre a et de rayon $t > 0$, c'est à dire le lieu des points de Ω qui sont les extrémités des rayons optiques de longueur t issus de a et qui se réfléchissent au bord selon les lois de Descartes, un point essentiel de la preuve consiste en une description précise de la géométrie de $S_{a,t}$, uniformément en a et t petit. La sphère $S_{a,t}$ possède une stratification naturelle

$$S_{a,t} = \sqcup_{k \geq 0} S_{a,t}^k$$

où $S_{a,t}^k$ correspond aux extrémités des rayons possédant k points de contact avec le bord. Par le théorème d'équivalence des hypersurfaces glancing de R. Melrose ([Mel76]), l'hypothèse de stricte convexité entraîne que la dynamique du billard dans l'espace de phase est, près des rayons tangents, localement C^∞ conjuguée à une transvection symplectique. La description uniforme par rapport à k de $S_{a,t}^k$ est obtenue en écrivant précisément cette conjugaison dans les coordonnées (x, ξ) naturelles.

En utilisant l'argument TT^* usuel, on déduit du Théorème 1.1 les estimations de Strichartz suivantes. Soit $I_h = \{k, h\omega_k \in [0.9, 2.1]\}$ et E_h le sous espace de $L^2(\Omega)$

$$E_h = \{u(x) = \sum_{k \in I_h} u_k e_k(x)\}.$$

Soit

$$\alpha_d = \frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}$$

l'exposant de dispersion de la formule (1.4). Soit $q \in]2, \infty]$, $r \in [2, \infty]$, et β tels que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \alpha_d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right), \\ \beta &= (d - \alpha_d) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Proposition 1.2. *Soit $d \geq 2$. Pour tout $T > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in]0, 1]$ et toute solution u de*

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x) \in E_h, \quad h\partial_t u(0, x) = u_1(x) \in E_h, \end{aligned} \quad (1.7)$$

on a

$$h^\beta \|u; L^q(]0, T[, L^r(\Omega))\| \leq C(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}). \quad (1.8)$$

Remarque 1.3. *Notons que bien que α_d soit optimal pour l'estimation de dispersion (1.4), nous ne savons pas quel est le α_d optimal pour l'estimation de Strichartz (1.8). Je remercie J.-M. Delort qui m'a signalé les résultats récents de H. Smith et C. Sogge ([SS06]) : dans le cas $d = 2$ et pour $r = 8$, une conséquence des estimations de [SS06] sur les projecteurs spectraux est la validité de (1.8) dans un domaine quelconque du plan avec $\alpha_{d=2, r=8} = 1/3 > 1/4$. Cela laisse penser que l'estimation de Strichartz (1.8) pourrait être vraie avec $\alpha_d = \frac{d-1}{2} - 1/6$.*

Soit $B^{r,2}(\Omega)$ l'espace de Besov associé au laplacien avec condition de Dirichlet

$$B^{r,2} = \{u = \sum u_k, u_k \in E_{2^{-k}}, \|u_k\|_{L^r} = c_k \in \ell^2\}.$$

On a l'injection $B^{r,2} \subset L^r$ pour $2 \leq r < \infty$ (elle se démontre comme dans le cas sans bord en utilisant essentiellement le fait que les opérateurs $\sum u_j e_j(x) \rightarrow \sum \chi(h\omega_j) u_j e_j(x)$ sont bornés uniformément en h sur tous les L^p). On déduit de (1.2) les estimations de Strichartz usuelles pour les solutions d'énergie finie de l'équation des ondes dans Ω

Proposition 1.4. *Soit $d \geq 3$ et $q \in]2, \infty]$, $r \in [2, \infty[$ des exposants tels que*

$$\frac{1}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2} - 1, \quad q \geq \frac{2d+3}{2d-3}. \quad (1.9)$$

Pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ et $F \in L^1(\mathbb{R}_t, L^2(\Omega))$ la solution u de

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)u &= F \quad \text{dans } \mathbb{R}_t \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_t \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \end{aligned} \quad (1.10)$$

vérifie l'inégalité de Strichartz

$$\|u; L^q(]0, T[, L^r(\Omega))\| \leq C(\|u_0; H_0^1\| + \|u_1; L^2\| + \|F; L^1(]0, T[, L^2)\|). \quad (1.11)$$

Remarque que l'estimation de Strichartz (1.11) est la même que celle de l'espace libre, sauf que les valeurs admissibles de q sont restreintes à $q \geq \frac{2d+3}{2d-3}$ au lieu de $q > 2$ en dimension $d \geq 3$. Bien sûr, pour l'estimation (1.11), cela ne fait de différence que pour $d = 3$ ou $d = 4$. Rappelons que lorsque Ω est l'extérieur d'un domaine strictement convexe, H. Smith and C. Sogge ont prouvé dans [SS95], en utilisant

la parametrix pour la diffraction de M. Taylor and R. Melrose, qu'on a les mêmes estimations de Strichartz que dans l'espace libre. Remarquer aussi que, à l'extérieur d'un convexe, un point source ne génère jamais de caustiques, et que ce sont les caustiques générées en temps petit par des points sources près du bord qui posent problème à l'intérieur d'un convexe.

2. Idée de la preuve

Nous décrivons ici brièvement la stratégie de preuve du Théorème 1.1. Les principaux ingrédients sont : la conservation de l'énergie, la localisation dans l'espace de phase par calcul h-pseudodifférentiel adapté aux problèmes aux limites, la propagation des singularités, la description de la sphère $S_{a,t}$ et de la conormalité de u_a le long de $S_{a,t}$. Rappelons que le théorème de propagation des singularités à l'intérieur d'un domaine strictement convexe Ω a été démontré par G. Eskin dans [Esk77] par construction d'une parametrix près des rayons tangents au bord, et indépendamment par K.-G. Anderson et R. Melrose dans [AM77]. Toutefois la parametrix de G. Eskin à l'intérieur d'un convexe n'a pas le même degré de précision géométrique que la parametrix construite par M. Taylor et R. Melrose à l'extérieur d'un convexe, et qui a été utilisée par H. Smith et C. Sogge dans [SS95] pour démontrer la validité des estimations de Strichartz de l'espace libre pour l'équation des ondes à l'extérieur d'un convexe strict. L'essentiel de notre travail consiste donc en une description précisée de la géométrie.

La première étape consiste à se ramener par changement d'échelle à prouver une estimation en temps 1 pour une équation renormalisée avec un point source près du bord. On remarque d'abord que la première moitié de l'estimation (1.4) est vraie : il existe C_0 tel que pour tout $h \in]0, 1]$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a, x \in \Omega$, on a

$$|\chi(hD_t)(u_a)|(t, x) \leq C_0 h^{-d}. \quad (2.1)$$

En effet, l'estimation classique de la restriction du noyau de la chaleur $p_t(x, a) = \Sigma e^{-t\omega_j^2} e_j(x) e_j(a)$ sur la diagonale donne, avec C indépendant de $a \in \Omega$ et $t \in]0, 1]$,

$$\Sigma e^{-t\omega_j^2} |e_j(a)|^2 = p_t(a, a) \leq C t^{-d/2}, \quad (2.2)$$

d'où avec une autre constante C

$$\Sigma_{\omega_j \leq \lambda} |e_j(a)|^2 \leq C(1 + \lambda)^d \quad \forall \lambda \geq 0, \forall a \in \Omega, \quad (2.3)$$

et donc par Cauchy-Schwarz

$$|\chi(hD_t)(u_a)(t, x)| \leq \frac{\|\chi\|_\infty}{2} \Sigma_{0.8 \leq h\omega_j \leq 2.2} |e_j(x)| |e_j(a)| \leq C_0 h^{-d}. \quad (2.4)$$

Comme conséquence de (2.1), on obtient que (1.4) est vrai pour $t \in [0, Mh]$ pour toute constante $M > 0$.

Soit $\varphi(t), \psi(t) \in C_0^\infty(]-2, 2])$ des fonctions égales à 1 au voisinage de $[-1, 1]$, et telles que $\varphi = 1$ au voisinage du support de ψ . Soit $\varphi_T(t) = \varphi(t/T)$ et $\psi_T(t) = \psi(t/T)$. Pour tout N , il existe C_N , tel que pour tout $h \in]0, 1]$, $T \geq h$, tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $a, x \in \Omega$, on ait

$$|\psi_T(t)\chi(hD_t)((1 - \varphi_T)u_a)(t, x)| \leq C_N h^{-d} (h/T)^N. \quad (2.5)$$

Dans la suite, on utilise le système de coordonnées géodésiques normales (x', x_d) près du bord : pour $x' \in \partial\Omega$, soit $\gamma(x', s)$ la géodésique (i.e le segment de droite de \mathbb{R}^d ici) issue de x' dans la direction normale au bord pointant vers Ω . Alors pour $r_0 > 0$ petit, $(x', x_d) \rightarrow \gamma(x', x_d)$ est un difféomorphisme de $\partial\Omega \times]-r_0, r_0[$ sur un voisinage tubulaire de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R}^d , et Ω a pour équation locale $x_d > 0$.

Soit $T_0 \leq r_0/4$. En utilisant la vitesse finie de propagation et (2.5), on obtient qu'il existe C_0 tel que pour tout $h \in]0, 1]$, $T \in]h, T_0]$, tout $x \in \Omega$ et tout a tel que $\text{dist}(a, \partial\Omega) \geq 2T$, on a l'estimation de dispersion libre

$$|\chi(hD_t)(u_a)(T, x)| \leq C_0 h^{-d} (h/T)^{\frac{d-1}{2}}. \quad (2.6)$$

Pour $T \in [h, T_0]$ et $\text{dist}(a, \partial\Omega) \leq 2T$, on a par vitesse finie de propagation, $\varphi_T u_a(t, x) = 0$ pour tout t et tout x tels que $\text{dist}(x, a) \geq 2T$, donc pour $\text{dist}(x, a) \geq 2T$, on a $\psi_T \chi(hD_t)(u_a)(t, x) = \psi_T \chi(hD_t)((1-\varphi_T)u_a)(t, x)$. En utilisant (2.5), on est donc ramené à prouver que (1.4) est vrai pour T_0 petit, $t \in [h, T_0]$, $\text{dist}(a, \partial\Omega) \leq 2t$, et $\text{dist}(x, a) \leq 2t$. On peut donc supposer a de la forme $a = (x'_0, r)$, $x'_0 \in \partial\Omega$, $0 < r < 2t$ avec $t \in [h, T_0]$, $T_0 \leq r_0/4$ et $\text{dist}(x, x'_0) \leq 4t$, et on est ramené à vérifier qu'il existe $C_0 > 0$, $T_0 > 0$ tel que pour tout $x'_0 \in \partial\Omega$, tout $h \in]0, 1]$, tout $T \in [h, T_0]$, et tout $r \in]0, 2T[$ on a pour $\text{dist}(x, x'_0) \leq 4T$

$$|\psi_T(T)\chi(hD_t)(\varphi_T u_a)(T, x)| \leq C_0 h^{-d} (h/T)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}} \quad (2.7)$$

Dans le système de coordonnées géodésiques normales, la métrique de \mathbb{R}^d est

$$\begin{pmatrix} g(\cdot, x_d) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

où $g(\cdot, x_d)$ est la métrique riemannienne induite sur l'hypersurface $\text{dist}(x, \partial\Omega) = x_d$. Dans ces coordonnées, le laplacien est

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2 + \Delta_g + \frac{1}{2}(\partial_{x_d} \log(\det g))\frac{\partial}{\partial x_d}. \quad (2.9)$$

On élimine le terme du premier ordre en $\frac{\partial}{\partial x_d}$ dans (2.9) en posant $e = (\det g)^{-1/4}$ et

$$\begin{aligned} \Delta' &= e^{-1}\Delta e = \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2 - \mathcal{R}(x_d, x', D_{x'}), \\ \mathcal{R}(x_d, x', D_{x'}) &= \sum_{i,j \leq d-1} e D_i g^{i,j} e^{-2} D_j e + e \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2 \left(\frac{1}{e}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Alors $\mathcal{R}(x_d, x', D_{x'})$ est un opérateur différentiel du second ordre en x' , de symbole principal $R(x_d, x', \xi')$ égal à $g^{-1}(\xi', x_d)$. La convexité stricte du bord implique qu'il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout $x_d \in [0, r_1]$ avec $r_1 > 0$ petit, et tout x', ξ' , on a

$$\partial_{x_d} R(x_d, x', \xi') \geq c_0 |\xi'|^2. \quad (2.11)$$

Soit \square l'équation des ondes conjuguée

$$\square = e^{-1}(\partial_t^2 - \Delta)e = -\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^2 + \partial_t^2 + \mathcal{R}(x_d, x', D_{x'}). \quad (2.12)$$

Comme la conjugaison par e est inoffensive pour l'estimation (2.7), on peut remplacer u_a par la solution $u_{x'_0, r}$ de

$$\begin{aligned} \square u_{x'_0, r} &= 0 \quad \text{dans } x_d > 0, \\ u_{x'_0, r} &= 0 \quad \text{sur } x_d = 0, \\ u_{x'_0, r}(0, x) &= \delta_{x'=x'_0, x_d=r}, \quad \partial_t u_{x'_0, r}(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'uniformité en x'_0 résultant de la technique de preuve, on choisit des coordonnées locales sur le bord telles que $x'_0 = 0$, $g(0, 0) = \text{Id}$ et on pose $u_{x'_0, r} = u_r$.

Pour vérifier (2.7), on utilise un changement d'échelle qui transforme (2.7) en une estimation en temps 1. Pour $T > 0$, posons $t = Ts$, $x_d = Ty_d$, $x' = Ty'$, $r = Tb$ et soit $v_{b, T}$ défini par

$$v_{b, T}(s, y) = T^d u_r(Ts, Ty). \quad (2.14)$$

Alors $v_{b, T}$ est solution de

$$\begin{aligned} \square_T v_{b, T} &= 0 \quad \text{dans } y_d > 0, \\ v_{b, T} &= 0 \quad \text{sur } y_d = 0, \\ v_{b, T}(0, y) &= \delta_{y'=0, y_d=b}, \quad \partial_s v_{b, T}(0, y) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où \square_T est C^∞ en $T \in [0, T_0]$, et est défini pour $s \in \mathbb{R}$ et $|y| \leq Cte/T$ par

$$\square_T = -\left(\frac{\partial}{\partial y_d}\right)^2 + \partial_s^2 + T^2 \mathcal{R}(Ty_d, Ty', T^{-1}D_{y'}). \quad (2.16)$$

L'opérateur \square_T est uniformément en T strictement hyperbolique, et est proche sur les compacts de l'équation des ondes à coefficients constants. De plus on a $\square_0 = \partial_s^2 - \Delta_y$. On a $hD_t = \frac{h}{T}D_s$. Posons $\hbar = h/T$. Puisque $T \geq h$, on a $\hbar \in]0, 1]$ et

$$|\psi_T(T)\chi(hD_t)(\varphi u_r)|(T, x) = T^{-d} |\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)v_{b, T})|(1, x/T). \quad (2.17)$$

Donc (2.7) sera conséquence de l'estimation au temps $s = 1$, avec C_0 indépendant de $\hbar \in]0, 1]$, $T \in [0, T_0]$, T_0 petit, $0 < b \leq 2$ et $|y| \leq 8$

$$|\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)v_{b, T})|(1, y) \leq C_0 \hbar^{-d} \hbar^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (2.18)$$

Par vitesse finie de propagation, la distribution $\varphi(s)v_{b, T}$ est définie pour $(s, y) \in \mathbb{R}^{1+d}$, $y_d > 0$, et son support en y est contenu dans $|y| \leq 8$ si T_0 est assez petit. Remarquer que T est un paramètre dans l'opérateur \square_T , et que le problème est de prouver que (2.18) est vrai pour $T \neq 0$: le changement d'échelle ayant pour effet de multiplier par T la courbure du bord, il est naturel de s'attendre à ce que la difficulté soit de prouver (2.18) pour $T = T_0$. Pour obtenir l'uniformité en x'_0 , il suffit d'introduire x'_0 comme paramètre dans l'opérateur \square_T .

Pour vérifier (2.18), on décompose la solution $v_{b, T}$ de (2.15), avec $0 < b \leq 2$, en plusieurs morceaux, en décomposant sa donnée de Cauchy en $s = 0$. On note $v_{b, T}^Q$ la solution de (2.15) avec donnée de Cauchy en $s = 0$

$$v_{b, T}^Q(0, y) = Q(T, y, \hbar D_y)(\delta_{y'=0, y_d=b}), \quad \partial_s v_{b, T}^Q(0, y) = 0, \quad (2.19)$$

où $Q(T, y, \hbar D_y)$ est un opérateur \hbar pseudodifférentiel en y respectant la condition aux limites. Avec $\eta = (\eta', \eta_d)$, ces opérateurs permettent de localiser en η' et en $|\eta_d|$ près de $y_d = 0$.

1. Localisation en fréquences

Soit $Q^1(T, y, hD_y)$ à support essentiel contenu dans $0.2 < |\eta| < 2.8$ et égal à Id dans $0.4 \leq |\eta| \leq 2.6$. Soit $v_{b,T} = v_{b,T}^1 + w_{b,T}^1$, $v_{b,T}^1 = v_{b,T}^{Q^1}$. Si $T_0 > 0$ est assez petit, pour tout N , il existe C_N , tel que pour tout $\hbar \in]0, 1]$, tout $T \in [0, T_0]$, tout $0 < b \leq 2$ et tout $s \in [-2, 2]$, on a

$$|\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)w_{b,T}^1)|(1, y) \leq C_N \hbar^N. \quad (2.20)$$

En effet, le front d'onde semiclassique de $w_{b,T}^1$ est contenu dans la variété caractéristique, et par le choix de Q^1 , dans $\{|\tau| \leq 0.6\} \cup \{|\tau| \geq 2.4\}$. Donc (2.20) est conséquence de $\chi \in C_0^\infty(]0.8, 2.2[)$. On est donc ramené à l'étude de $v_{b,T}^1$.

2. Réflexion transverse

Soit $Q^2(T, y, hD_y)$ à support essentiel contenu dans $|\eta_d| < 2c_1$, c_1 petit, et égal à Id dans $|\eta_d| \leq c_1$. Soit $v_{b,T}^1 = v_{b,T}^2 + w_{b,T}^2$, $v_{b,T}^2 = v_{b,T}^{Q^2Q^1}$. Si $T_0 > 0$ est assez petit, il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $\hbar \in]0, 1]$, tout $T \in [0, T_0]$, et tout $0 < b \leq 2$ on a

$$|\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)w_{b,T}^2)|(1, y) \leq C_0 \hbar^{-d} \hbar^{\frac{d-1}{2}}, \quad (2.21)$$

i.e, $w_{b,T}^2$ vérifie la dispersion libre. En effet, le front d'onde semiclassique de $w_{b,T}^2$ est contenu dans des rayons transverses au bord, et pour T_0 petit par rapport à c_1 , $w_{b,T}^2$ s'écrit comme somme d'une onde directe et d'une onde au plus une fois réfléchie ne présentant pas de caustiques, et on conclut comme dans le cas sans bord.

Ensuite, on microlocalise $v_{b,T}^2(s = 0)$ près d'une direction tangentielle $\eta' = \eta'_0$, et on utilise une transformation symplectique homogène j , $(x, \xi) = j(z, \zeta)$, dans laquelle Δ' s'écrit sous la forme

$$h^2 \Delta' \simeq (h\partial_{z_d})^2 + (1 + z_d)h^2 \partial_{z'}^2.$$

Les variables ζ' et la fonction $q = \zeta_d^2 + z_d |\zeta'|^2$ (voir (3.6)) sont alors invariants par le flot. Dans les variables symplectiques tangentielles $(|\zeta'|, r; \omega, \tilde{\omega})$, $\{|\zeta'|, r\} = 1$, $\{|\zeta'|, \omega\} = 0$, on peut alors démontrer un théorème de propagation L^2 précisé, avec localisation des variables $(\omega, \tilde{\omega})$ dans des boites de taille h^μ , $\mu < 1/2$, et localisation en $|\zeta_d|$ dans des boites de taille h^ν , $\nu < 1/3$. Comme les normes L^2 sont invariantes par transformation canonique quantifié, on en déduit un théorème de propagation L^2 dans les variables naturelles (y, η) . Cette étape est donc reliée au théorème de classification des hypersurfaces glancing de R. Melrose ([Mel76]). Toutefois, la transformation symplectique j n'étant pas un simple changement de variables en x , si $(z(t), \zeta(t))$ est le flot, il faut étudier la localisation en x de $\pi_x(z(t), \zeta(t))$ lorsque $(z(0), \zeta(0)) \in j^{-1}T_a^*$ est localisé dans une boite du calcul précédent, donc étudier la géométrie des sphères.

On s'épare ensuite l'analyse en deux cas : $Tb \leq \hbar^{2\nu}$ ou $Tb \geq \hbar^{2\nu}$, en fonction de la distance de la source au bord ; l'exposant de coupure ν est choisit tel que $1/4 \leq \nu < 1/3$, avec ν proche de $1/4$. On étudie d'abord le cas $Tb \leq \hbar^{2\nu}$.

Soit $Q^3(h, y, hD_y)$ à support essentiel dans $|\eta_d| < 2\hbar^\nu$ égal à Id dans $|\eta_d| \leq \hbar^\nu$. Soit

$$v_{b,T}^2 = v_{b,T}^3 + v_{b,T}^4, \quad v_{b,T}^3 = v_{b,T}^{Q^3Q^2Q^1} \quad (2.22)$$

Ainsi, pour $v_{b,T}^3$, les directions initiales sont très tangentes au bord, et la fonction q (voir 3) vérifie, sur le microsupport de $v_{b,T}^3$, l'inégalité $q \leq C\hbar^{2\nu}$.

3. Étude de $v_{b,T}^3$

On décompose $v_{b,T}^3$ en une somme d'au plus $C \hbar^{-(d-2)\mu}$ termes $v_{b,T}^3 = \sum_{\alpha} v_{b,T}^{3,\alpha}$ où chaque $v_{b,T}^{3,\alpha}$ a une donnée de Cauchy localisée dans un petit ensemble de directions tangentielles $|\eta' - \eta'_{\alpha,\hbar}| \leq C\hbar^{\mu}$, $|\eta'| = 1$, avec $\mu < 1/2$. Alors la norme L^2 à l'instant initial de $v_{b,T}^{3,\alpha}$ sera bornée par

$$\|v_{b,T}^{3,\alpha}(s=0)\|_{L^2}^2 \leq C \hbar^{-d} \hbar^{\nu} \hbar^{(d-2)\mu}$$

et de sorte que le microsupport de $v_{b,T}^{3,\alpha}(s=1)$ soit contenu dans $\eta \in D_{\alpha}$ avec $\text{Vol}(D_{\alpha}) \leq C\hbar^{\nu+(d-2)\mu}$. On prouve que pour tout $\hbar \in]0, 1]$, et tout $0 < Tb \leq \hbar^{2\nu}$

$$|\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)v_{b,T}^3)|(1, y) \leq C_0 \hbar^{-d} \hbar^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (2.23)$$

En utilisant l'estimation de propagation L^2 précisée et la dispersion tangentielle, on se ramène à vérifier (2.23) indépendamment pour chaque $v_{b,T}^{3,\alpha}$. On conclut alors par l'estimation élémentaire

$$\|u\|_{\infty} \leq \hbar^{-d/2} |\text{Vol}(D)|^{1/2} \|u\|_{L^2}, \quad (2.24)$$

avec le choix $\nu + (d-2)\mu = \frac{1}{4} + \frac{d-2}{2}$. Cette étape utilise donc seulement l'injection de Sobolev en variable normale et la dispersion en variables tangentielles. Lorsque $d = 2$, la dispersion tangentielle est inutile, il n'y a pas de somme sur α , de sorte que (2.23) est juste l'injection de Sobolev en variable normale. Pour $d \geq 3$, il faut comprendre la dispersion géométrique tangentielle. Pour cela, on utilise les formules exposées dans la section (3). Si k est le nombre de réflexions au bord, on a $k = N + 1$ avec les notations de la section (3). Pour $N = 0$, on a $\beta = 0$ dans la formule (3.49), et la dispersion en ω résulte de (3.48) pour T petit. Pour $N \geq 1$, si θ est l'angle de réflexion, on a $\theta \simeq T/N$ et $|z| + \mathfrak{D} \leq C/N$, donc le terme \mathfrak{B} de la formule (3.48) qui donne la déviation de y'_N par rapport à la direction ω est $\mathcal{O}((T/N)^2) = \mathcal{O}(\theta^2)$. Comme $|\theta| \leq C\hbar^{\nu}$ et $\mu < 1/2 \leq 2\nu$, on obtient dans ce régime la dispersion géométrique des y'_N par rapport à ω uniformément par rapport à N .

4. Étude de $v_{b,T}^4$ ou du cas $Tb \geq \hbar^{2\nu}$

Dans ce cas, la fonction $q \simeq \eta_d^2 + T y_d$ de (3.6) vérifie $q \geq C\hbar^{2\nu}$, reste presque constante sur le flot d'après (3.9), et donc les angles θ de réflexion des rayons sont presque constants sur le flot et vérifient $\theta \geq C\hbar^{\nu}$. Le nombre total k_{max} de réflexions sur un rayon vérifie $(k_{max} - 1)|\theta| \leq Cte T$. On utilise alors un calcul de réflexion transverse, itéré au plus k_{max} fois pour écrire $v_{b,T}^4$ ou $v_{b,T}^2$ comme une somme d'ondes réfléchies, qui sont des intégrales de phase associées à la strate $S_{a,T}^k$ de la sphère. Il est commode d'écrire d'abord ce calcul dans les coordonnées (z, ζ) associées à la transformation symplectique j , puis d'utiliser l'étude géométrique pour étudier la dégénérescence des phases en coordonnées (y, η) . Toutefois, même entre la première et la deuxième réflexion, il apparaîtra toujours une caustique de type queue d'aronde dans la projection du microsupport de $v_{b,T}^*$, ce qui explique le facteur 1/4 dans la dernière estimation : il existe C_0 tel que pour tout $\hbar \in]0, 1]$, on a

$$|\chi(\hbar D_s)(\varphi(s)v_{b,T}^*)|(1, y) \leq C_0 \hbar^{-d} \hbar^{\frac{d-1}{2} - \frac{1}{4}}. \quad (2.25)$$

On conclut alors en mettant bout à bout les estimations (2.20), (2.21), (2.23) et (2.25).

3. Géométrie

Dans cette section, nous décrivons la géométrie dans l'espace de phase du microsupport $\Lambda_{b,T}$ de $v_{b,T}$. Comme on a, par (2.14), $v_{b,T}(s, y) = T^d u_r(Ts, Ty)$, il est équivalent de décrire le microsupport $\Lambda_{[r]}$ de $u_r = u_{x'_0, r}$, solution de (2.13), avec $0 < r < 2T$, $r = bT$, et pour $0 \leq t \leq T$. La projection de $\Lambda_{[r, T]} = \Lambda_{[r]} \cap (t = T)$ sur l'espace des x est la sphère $S_{a, T}$. Soit $x = (x', x_d)$ les coordonnées géodésiques normales, et $x'_0 = 0$. Le symbole principal de $-\square$ est

$$\begin{aligned} p(t, x; \tau, \xi) &= -|\xi|^2 + \tau^2, \\ |\xi|^2 &= \xi_d^2 + \sum_{i, j \leq d-1} g^{i, j}(x', x_d) \xi_i \xi_j = \xi_d^2 + R(x_d, x', \xi'). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pour $\xi_0 \in T_{(0, r)}^*(\mathbb{R}^d)$, $|\xi_0| \neq 0$, soit $\rho(s; \xi_0; r)$ le rayon contenu dans $\tau > 0$ issu en $s = 0$ de $t = 0$, $x = (0, r)$, $\xi = \xi_0$. Soit $(t, x; \tau, \xi)$ les coordonnées de $\rho(s; \xi_0; r)$. Alors $t, x, \tau, \xi', \xi_d^2$ sont des fonctions continues de $s, \xi_0, r \geq 0$, et on a

$$\begin{aligned} \tau(s; \xi_0; r) &= \tau(0, \xi_0; r) = |\xi_0|, \\ t(s; \xi_0; r) &= 2\tau(0, \xi_0; r)s = 2|\xi_0|s, \\ |\xi_0|^2 &= \xi_d^2(s; \xi_0; r) + R(x_d(s; \xi_0; r), x'(s; \xi_0; r), \xi'(s; \xi_0; r)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les fonctions x', ξ' sont dérivables en s , et vérifient

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{ds} &= -\partial_{\xi'} R(x, \xi'), \quad x'(0; \xi_0; r) = 0, \\ \frac{d\xi'}{ds} &= \partial_{x'} R(x, \xi'), \quad \xi'(0; \xi_0; r) = \xi'_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De plus, ξ_d est continue dans $x_d > 0$, et admet pour $x_d = 0$ des dérivées à gauche et à droite $(\xi_d)_{+, -}$ en s , telles que $(\xi_d)_- = -(\xi_d)_+ = \sqrt{\xi_0^2 - R(0, x', \xi')}$. La fonction x_d est lipschitzienne, dérivable à gauche et à droite et vérifie

$$\left(\frac{dx_d}{ds}\right)_{+, -} = -2\xi_d(s; \xi_0; r)_{+, -}, \quad x_d(0; \xi_0; r) = r. \quad (3.4)$$

On a l'homogénéité pour $\lambda > 0$

$$(t, x)(\lambda^{-1}s; \lambda\xi_0; r) = (t, x)(s; \xi_0; r), \quad (\tau, \xi)(\lambda^{-1}s; \lambda\xi_0; r) = \lambda(\tau, \xi)(s; \xi_0; r), \quad (3.5)$$

de sorte qu'on peut supposer $|\xi_0| = 1$. Comme $|t| \leq 2T_0$, on peut aussi supposer $s \in [-T_0, T_0]$, avec $T_0 > 0$ petit. Soit $q(x, \xi)$ la fonction

$$q(x, \xi) = \xi_d^2 + R(x_d, x', \xi') - R(0, x', \xi'). \quad (3.6)$$

Alors pour $x_d \in [0, r_1]$ avec $r_1 > 0$ petit, on a par (2.11), avec $c_1, c_2 > 0$

$$0 \leq \xi_d^2 + c_1 x_d R(x, \xi') \leq q(x, \xi) \leq \xi_d^2 + c_2 x_d R(x, \xi'). \quad (3.7)$$

Par (3.2) et (3.3), la fonction

$$q(s; \xi_0; r) = q(x(s; \xi_0; r), \xi(s; \xi_0; r)) = |\xi_0|^2 - R(0, x'(s; \xi_0; r), \xi'(s; \xi_0; r))$$

est dérivable et vérifie

$$\frac{dq}{ds} = \partial_{x'} R(0, x', \xi') \partial_{\xi'} R(x, x', \xi') - \partial_{\xi'} R(0, x', \xi') \partial_{x'} R(x, x', \xi'),$$

d'où, par (3.7),

$$\left| \frac{dq}{ds} \right| \leq C' x_d R(x, \xi')^{3/2} \leq C q R(x, \xi')^{1/2}. \quad (3.8)$$

Comme $|\xi_0| = 1$, on a $R(x, \xi') \leq 1$ sur les rayons, donc

$$q(0; \xi_0; r) e^{-C|s|} \leq q(s; \xi_0; r) \leq q(0; \xi_0; r) e^{C|s|}. \quad (3.9)$$

Par (3.7), on a la stabilité du flot géodésique brisé près des rayons tangents pour un bord strictement convexe. On obtient aussi une borne sur le nombre de réflexions au bord. Comme $r > 0$, les zéros de $s \mapsto x_d(s; \xi_0; r)$ sont isolés. Soit $s_k(\xi_0; r)$ le k -ième zéro de $x_d(s; \xi_0; r)$ pour $s \in [0, T_0]$.

Lemme 3.1. *Soit $|\xi_0| = 1$, et $r \in]0, 2T_0]$. Il existe C , indépendant de ξ_0, r et k , telle que*

$$\begin{aligned} s_1(\xi_0; r) &\geq C r q^{-1/2}(0; \xi_0; r), \\ s_{k+1}(\xi_0; r) - s_k(\xi_0; r) &\geq C q^{1/2}(0; \xi_0; r). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour $r, T_0 > 0$ petits, les ensembles $\Lambda_{[r]}$ et $\Lambda_{[r, T]}$ pour $T \in]0, T_0]$ sont définis par

$$\Lambda_{[r]} = \{(t, x, \tau, \xi) = \rho(s; \xi_0; r); \quad 0 < s|\xi_0| < T_0\}, \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{[r, T]} = \{(x, \xi); \quad x = x\left(\frac{T}{2|\xi_0|}; \xi_0; r\right), \xi = \xi\left(\frac{T}{2|\xi_0|}; \xi_0; r\right); \quad |\xi_0| \neq 0\}. \quad (3.12)$$

Soit $\mathbb{S}_r \subset T_{(0, r)}^* \mathbb{R}^d$ la sphère unité $|\xi_0| = 1$, et i l'application de \mathbb{S}_r dans $\Lambda_{[r, T]}$ donnée par (3.12). Pour $\xi_0 \in \mathbb{S}_r$, soit $N(T; \xi_0; r)$ le nombre de zéros de la fonction $x_d(s; \xi_0; r)$ dans l'intervalle $s \in [0, T/2]$. On stratifie \mathbb{S}_r et $\Lambda_{[r, T]}^1 = \Lambda_{[r, T]} \cap |\xi| = 1$ par les valeurs de N :

$$\mathbb{S}_r = \sqcup_{k \geq 0} \mathbb{S}_r^k, \quad \mathbb{S}_r^k = \{\xi_0; \quad N(T; \xi_0; r) = k\} \quad \Lambda_{[r, T]}^1 = \sqcup_{k \geq 0} \Lambda_{[r, T]}^{1, k}, \quad \Lambda_{[r, T]}^{1, k} = i(\mathbb{S}_r^k). \quad (3.13)$$

Soit $L(r, T)$ le nombre de strates dans (3.13). On a $L(r, T) = 1$ si et seulement si $r < T \Leftrightarrow \text{dist}((x'_0, r), \partial\Omega) < T$. Par (3.7) on a $\min_{(\xi_0 \in \mathbb{S}_r)} q(0; \xi_0; r) \geq Cr$, et du Lemme 3.1 on obtient qu'il existe $C > 0$ indépendant de r, T tel que

$$L(r, T) \leq 1 + C T r^{-1/2}. \quad (3.14)$$

Soit π la projection, $\pi(t, x, \tau, \xi) = (t, x)$. Alors la "sphère" $S_{r, T} = \pi(\Lambda_{[r, T]}^1)$ est stratifiée par

$$S_{[r, T]} = \sqcup_{k \geq 0} S_{[r, T]}^k, \quad S_{[r, T]}^k = \pi(\Lambda_{[r, T]}^{1, k}). \quad (3.15)$$

Soit R_0, R_1 les fonctions

$$R_0(x', \xi') = R(0, x', \xi'), \quad R_1(x', \xi') = \partial_{x_d} R(0, x', \xi'). \quad (3.16)$$

Soit $V = T^* \mathbb{R}^d|_{\partial\Omega} \setminus T_{\partial\Omega}^*$ et $V_0 = T^* \partial\Omega \setminus 0$. Pour $v \in V$, soit $u = \pi(v) \in V_0$ la projection

$$v = (x', 0, \xi) \rightarrow \pi(v) = u = (x', \xi|_{T\partial\Omega}).$$

Si n est le vecteur normal unitaire au bord, on a $\xi_d(v) = \xi(n)$. L'application

$$V \rightarrow V_0 \times \mathbb{R}; \quad v \rightarrow (\pi(v), \xi_d(v)) \quad (3.17)$$

identifie V et $V_0 \times \mathbb{R}$, et V_0 s'injecte dans V par

$$u \in V_0 \rightarrow v : \pi(v) = u, \quad \xi_d(v) = 0. \quad (3.18)$$

On note $\tau(v)$ la fonction positive sur V

$$\tau^2(v) = R_0(u) + \xi_d^2.$$

Pour $v = (u, \xi_d) \in V$, soit $\rho_f(s; v)$ le rayon dans l'espace libre issu en $s = 0$ de $t = 0$, $\tau = \tau(v)$, $x_d = 0$, $(x', \xi) = v$. Les coordonnées de $\rho_f(s; v)$ vérifient $t(s) = 2\tau(v)s$, $\tau(s) = \tau(v)$ et

$$\begin{aligned} \xi_d(s) &= \xi_d + sR_1(u) - \frac{s^2}{2}\{R_0, R_1\}(u) + \mathcal{O}(|\xi_d|s^2 + s^3), \\ x_d(s) &= -2s\xi_d - s^2R_1(u) + \frac{s^3}{3}\{R_0, R_1\}(u) + \mathcal{O}(|\xi_d|s^3 + s^4), \\ (x'(s), \xi'(s)) &= \exp(-sH_{R_0})(u) + \mathcal{O}(|\xi_d|s^2 + s^3), \end{aligned} \quad (3.19)$$

où H_{R_0} est le champ hamiltonien de R_0 . Dans la suite, on note \mathcal{O}^k toute fonction sur V définie près de V_0 , et nulle à l'ordre k sur V_0 . Par (3.19), il existe C indépendant de $T_0 > 0$ petit tel que si la fonction $x_d(s)/s$ admet un zéro $t(s) \in [-T_0, T_0]$, alors

$$|\xi_d| \leq CT_0R_0^{1/2}(u). \quad (3.20)$$

De plus, ce zéro $s_0(v)$ est unique, dépend C^∞ de v (stricte convexité), est homogène en v de degré -1 , et

$$s_0(v) = \frac{-2\xi_d}{R_1(u)} + \frac{4\xi_d^2}{3R_1^3(u)}\{R_0, R_1\}(u) + \mathcal{O}^3. \quad (3.21)$$

On a

$$\rho_f(s_0(v); v) = (t(s_0(v)), x'^1, x_d = 0; \tau = \tau(v), \xi'^1, -\xi_d^1),$$

où le signe $-$ devant ξ_d^1 tient compte de la réflexion. De (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} (x'^1, \xi'^1) &= \exp(-s_0(v)H_{R_0})(u) + \mathcal{O}^3, \\ \xi_d^1 &= \xi_d + \frac{2\xi_d^2}{3R_1^2(u)}\{R_0, R_1\}(u) + \mathcal{O}^3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'application

$$v = (u, \xi_d) \rightarrow F(v) = (x'^1, \xi'^1, \xi_d^1) \quad (3.23)$$

est l'application de billard associé au bord. F est définie près de V_0 , envoie V dans V et $F(v) = v$ ssi $\xi_d = 0$, i.e V_0 est le lieu des points fixes de F . On note $T(v)$ la fonction

$$T(v) = t(s_0(v)),$$

qui est le temps qu'il faut pour connecter v et $F(v)$ dans l'espace libre.

On utilise plusieurs fonctions de définition pour V_0 . La première est ξ_d . La deuxième est $\zeta(v) = \xi_d R_1^{-1/3}(u)$. La troisième est $s_0(v)$ qui a un zéro simple sur V_0 par (3.21). Enfin, soit $d\sigma$ la 1-forme sur les courbes intégrales de H_{R_0} dans V_0 telle que $\langle d\sigma, H_{R_0} \rangle = R_1^{2/3}$. On définit la fonction σ sur V par

$$\sigma(v) = - \int_u^{u'} d\sigma; \quad u' = \exp(-s_0(v)H_{R_0})(u). \quad (3.24)$$

Si Y_0 est le champ de vecteurs

$$Y_0 = R_1^{-2/3}H_{R_0},$$

on a pour $v = (u, \xi_d)$ près de V_0

$$\exp(-\sigma(v)Y_0)(u) = \exp(-s_0(v)H_{R_0})(u), \quad (3.25)$$

$$2sR_0^{1/2}(u) = \int_0^s 2R_0^{1/2}(\exp(-yH_{R_0})(u))dy = \int_0^\sigma 2R_0^{1/2}R_1^{-2/3}(\exp(-xY_0)(u))dx. \quad (3.26)$$

Dans les coordonnées $(u = \pi(v), s = s_0(v))$, on a $\frac{\partial\sigma(v)}{\partial s} = R_1^{2/3}(\exp(-sH_{R_0})(u))$, donc, par (3.21),

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= sR_1^{2/3}(u)\left(1 - \frac{s\{R_0, R_1\}(u)}{3R_1(u)}\right) + \mathcal{O}^3, \\ \sigma(v) &= -2\xi_d R_1^{-1/3}(u) + \mathcal{O}^3 = -2\zeta(v) + \mathcal{O}^3. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les fonctions σ et ζ sont homogènes de degré $1/3$. Le lemme qui suit est juste un développement de Taylor du billard et de $T(v)$ près de V_0 .

Lemme 3.2. *En coordonnées $(u = \pi(v), \sigma = \sigma(v))$, $F(u, \sigma) = (u^1, \sigma^1)$ vérifie*

$$\begin{aligned} u^1 &= \exp(-\sigma Y_0)(u) + w + \mathcal{O}^5, \quad w \in T_{u[\sigma]}V_0, \quad u[\sigma] = \exp(-\sigma Y_0)(u), \\ w &= -\frac{\sigma^3}{6R_1(u)}\left(1 + \frac{\sigma}{2}R_1^{-5/3}\{R_0, R_1\}(u)\right)H_{R_1}(u[\sigma]), \\ &\quad -\frac{\sigma^4}{12}R_1^{-5/3}(u)H_{\{R_0, R_1\}}(u[\sigma]), \\ \sigma^1 &= \sigma + \mathcal{O}^4. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La fonction $T(v)$ vérifie

$$T(v) = \int_0^\sigma 2R_0^{1/2}R_1^{-2/3}(\exp(-xY_0)(u))dx + \frac{\sigma^3}{4R_0^{1/2}(u)} + \frac{\sigma^4\{R_0, R_1\}(u)}{12R_0^{1/2}R_1^{5/3}(u)} + \mathcal{O}^5. \quad (3.30)$$

Le lemme suivant met F sous forme normale, et permettra le calcul des itérés $F^N = F \circ \dots \circ F$ (N fois). Sa preuve est bien sûr très proche de celle du théorème de R. Melrose d'équivalence des hypersurfaces glancing [Mel76]. Le fait que J est définie près de $V_{0,0}$ est dû au fait crucial, mais trivial, que le champ Y_0 est transverse à $V_{0,0}$, ce qui est juste la dispersion géométrique dans le bord.

Lemme 3.3. *Soit $x'_0 \in \partial\Omega$ et $V_{0,0} = T_{x'_0}^*\partial\Omega \setminus 0 \subset V_0$. Il existe un difféomorphisme C^∞ , $J(u, \sigma) = (u', \sigma')$ de V , défini pour $v = (u, \sigma)$ près de $V_{0,0}$, tel que*

$$JFJ^{-1}(u', \sigma') = (\exp(-\sigma'Y_0)(u'), \sigma'). \quad (3.31)$$

De plus, si Z est une hypersurface de V_0 transverse à Y_0 , telle que $V_{0,0} \subset Z$, on peut supposer

$$J(u, \sigma) = (u, \sigma) \text{ pour tout } \sigma \text{ et tout } u \in Z,$$

et il existe un champ Y et une fonction c tels que

$$\begin{aligned} u' &= \exp(-\sigma^2 Y)(u) + \mathcal{O}^3, \quad Y|_Z = 0, \quad [Y, Y_0]|_Z = \frac{H_{R_1}}{6R_1}, \\ \sigma' &= \sigma + \sigma^3 c(u) + \mathcal{O}^4, \quad c|_Z = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En coordonnées $v = (u', \sigma')$, la fonction $T(v)$ vérifie

$$T(v) = \int_0^{\sigma'} 2R_0^{1/2}R_1^{-2/3}(\exp(-xY_0)(u'))dx + \frac{\sigma'^3}{4R_0^{1/2}(u')} + \mathcal{O}(\sigma'^4 + \sigma'^3 \mathcal{I}_0), \quad (3.33)$$

où \mathcal{I}_0 denote une fonction nulle sur $Z \times \{\sigma' = 0\}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, et $v = v_0 = (u, \sigma) \in V$ avec $N|\sigma|\tau(v)^{-1/3}$ petit. Soit $v_j = F^j(v) = (u_j, \sigma_j)$ pour $0 \leq j \leq N$. Soit α la fonction homogène de degré $1/3$, $\alpha = N\sigma$. On note $f \in \mathcal{O}_N(g)$ si $f = gh_N(u, \alpha)$ sur $\tau(v) = 1$, avec h_N une famille bornée en N de fonctions lisses de α, u . Le lemme suivant permet de calculer les itérés du billard.

Lemme 3.4. *On a*

$$u_N = \exp(-\alpha Y_0)(u) - \alpha\sigma^2 \frac{H_{R_1}}{6R_1}(\exp(-\alpha Y_0)(u)) + \mathcal{O}_N(\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2\mathcal{I}_0), \quad (3.34)$$

$$\sigma_N = \sigma + \mathcal{O}_N(\alpha\sigma^3), \quad (3.35)$$

$$\sum_{0 \leq j < N} T(v_j) = \int_0^\alpha g(\exp(-xY_0))(u)dx + \alpha\sigma^2 \frac{R_0^{-1/2}(u)}{4} + \mathcal{O}_N(\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2\mathcal{I}_0). \quad (3.36)$$

Soit $R_f(x, \xi) = \xi_d^2 + R(x, \xi')$ l'hamiltonien libre. Pour $x' \in \partial\Omega$, on définit $D_r(x')$ et $D(x')$ par

$$\exp(-sH_{R_f})\left(\left(x', 0; \frac{D_r(x')}{2s}\right)\right) \in T_{(x'_0, r)}^*\Omega, \quad D_r(x') \in T_{(x', 0)}^*\bar{\Omega}, \quad (3.37)$$

$$\exp(-sH_{R_0})\left(\left(x'; \frac{D(x')}{2s}\right)\right) \in T_{x'_0}^*\partial\Omega, \quad D(x') \in T_{x'}^*\partial\Omega, \quad (3.38)$$

et $T_0(x', r)$ par

$$T_0(x', r) = -2sR_f^{1/2}\left(x', 0; \frac{D_r(x')}{2s}\right) = |D_r(x')|. \quad (3.39)$$

On choisit des coordonnées géodésiques dans le bord $\partial\Omega$ centrées en x'_0 . On a alors $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x'_0 = 0$, et la métrique sur le bord $g_0 = g(\cdot, x'_d = 0)$ vérifie

$$g_{0,j,k}(x')x'_k = x'_j, \quad R_0(x', \xi') = \|\xi'\|^2 + \mathcal{O}(x'^2\xi'^2), \quad (3.40)$$

de sorte que $D(x') = x'$. Pour tout entier $N \geq 0$ on définit la lagrangienne $\Lambda_{b,T,N}$ comme suit. On part d'un point de $T_{x'_0, r}^*$ à l'instant $t = 0$, on suit alors le rayon avec exactement $N + 1$ réflexions au bord, puis on suit le rayon dans l'espace libre jusqu'au temps T . Bien sûr, $\Lambda_{b,T,N}$ peut avoir des points dans $x_d < 0$.

Soit v_0 le point de première réflexion au bord, et $x' = \pi(v_0)$. Pour $j \geq 0$, soit $v_j = F^j(v_0) = (u_j, \eta_{d,j})$. Soit $\rho_f(s, v_N)$ le rayon dans l'espace libre issu de v_N à l'instant $T_0(x', r) + T(v_0) + \dots + T(v_{N-1})$. Comme la fonction τ est constante sur les rayons, on a

$$T_0(x', r) = 2\tau(v_0) = \dots = 2\tau(v_{N-1}). \quad (3.41)$$

Soit s tel que

$$T_0(x', r) + T(v_0) + \dots + T(v_{N-1}) + 2\tau(v_{N-1})s = T. \quad (3.42)$$

Alors $\rho_f(s, v_N)$ décrit $\Lambda_{b,T,N}$. Comme on calcule la propagation près des rayons tangents, et $\sum_{0 \leq j < N} T(v_j) \leq CT$, il existe C, c indépendants de N tels que, avec $x = Ty$ et $r = bT$,

$$0 < b \leq c|y'|, \quad \frac{Nb}{T|y'|} + (1 + N)|y'| \leq C. \quad (3.43)$$

On choisit des coordonnées polaires en y' , $y' = |y'|\omega$, $\omega \in S^{d-2}$ et on pose

$$\kappa(\omega) = R_1(0, \omega/2) > 0, \quad \kappa_{(1)}(\omega) = \frac{\partial R_1}{\partial \xi'}(0, \omega/2). \quad (3.44)$$

Soit $\mathfrak{D}(b, T; y') > 0$ la fonction définie par

$$T_0(x', r)^2 = T^2 \mathfrak{D}^2(b, T; y').$$

On pose $\nu = \frac{b}{\mathfrak{D}} \leq c$, $\lambda = 1/|x'|$, $u_\lambda = \lambda u_0$, et $\alpha = T^{4/3} \beta |y'|^{1/3} = N\sigma(v_0)$. On a alors avec les notations $\mathbf{1}_\sim = 1 + \mathcal{O}(\nu^2 + T\mathfrak{D})$, $\mathbf{1}_{\sim, \beta} = \mathbf{1}_\sim + \mathcal{O}(T\beta)$, $\mathbf{1}_* = 1 + \mathcal{O}(\nu + T)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^2 &= |y'|^2 + b^2 - 2\kappa(\omega)T|y'|^2(b + \kappa(\omega)T|y'|^2/6) + \mathcal{O}(T^2 \mathfrak{D}^3(b + T\mathfrak{D}^2)), \\ T\beta &= \alpha|x'|^{-1/3} = N\sigma(v_0)|x'|^{-1/3} = N\kappa^{-1/3}(b/\mathfrak{D}\mathbf{1}_\sim + T\mathfrak{D}\kappa\mathbf{1}_\sim) \leq CT. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Soit G la fonction définie par

$$\sum_{0 \leq j < N} T(v_j) = \alpha|x'|^{-1/3}G.$$

En utilisant le Lemme 3.4, on obtient

$$G(N, T\beta, u_\lambda) = G_1(T\beta, u_\lambda) + (T\beta/N)^2 G_2(N, T\beta, u_\lambda) = \kappa^{-2/3}(1 + T\mathcal{O}(\beta + \mathfrak{D})). \quad (3.46)$$

On pose alors $z = s\mathfrak{D}$. Les variables \mathfrak{D}, β, z sont bornées et vérifient d'après (3.42)

$$\mathfrak{D} + \beta G(N, T\beta, u_\lambda) + z = 1. \quad (3.47)$$

Notons $y_{d,N}, y'_N$ les coordonnées de la projection sur la base de $\Lambda_{b,T,N}$ en coordonnées $y = x/T$. En utilisant les lemmes précédents, on obtient après calculs la proposition suivante, qui permet de contrôler la stratification de la sphère, de comprendre la géométrie de la dispersion tangentielle et la structure des caustiques

Proposition 3.5.

$$\begin{aligned} y_{d,N} &= z(b/\mathfrak{D}\mathbf{1}_{\sim, \beta} + T\mathfrak{D}\kappa\mathbf{1}_{\sim, \beta}) - Tz^2\kappa\mathbf{1}_\sim + \mathcal{O}(T^2z^2), \\ y'_N &= \omega + \mathcal{A}\omega + \mathcal{B}\kappa_{(1)} + \mathcal{O}(*), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (1 - \beta\kappa^{-2/3})(\kappa T\mathfrak{D}(b/\mathfrak{D} + \kappa T\mathfrak{D}/6) - \nu^2/2) - \frac{T^2\beta^3}{2N^2} + 8\beta\Theta\kappa^{1/3}, \\ \mathcal{B} &= \beta\kappa^{-5/3}(b/\mathfrak{D}\mathbf{1}_\sim + T\mathfrak{D}\kappa\mathbf{1}_\sim)^2/6 - 2\beta\kappa^{-2/3}\Theta \\ &\quad + (b/\mathfrak{D}\mathbf{1}_{\sim, \beta} + T\mathfrak{D}\kappa\mathbf{1}_{\sim, \beta})Tz^2/2 - \frac{\kappa T^2 z^3}{3}\mathbf{1}_\sim, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\Theta = T\mathfrak{D}\left(\frac{b}{4\mathfrak{D}}\mathbf{1}_\sim + \frac{T\mathfrak{D}\kappa}{12}\mathbf{1}_\sim\right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(*) &= \mathcal{O}(T\beta(\nu + T\mathfrak{D})^2 + T^2z(z + \mathfrak{D})(\nu + T\mathfrak{D})) \\ &\quad + \omega\mathcal{O}(\nu^4 + T\nu^2(\beta + \mathfrak{D}) + T\mathfrak{D}(\nu + T\mathfrak{D})^2 + T^2\beta(\mathfrak{D}(\nu + T\mathfrak{D}) + T(\beta/N)^2)) \\ &\quad + \mathcal{O}(T^3z^3 + T^2z^3(\nu + T\mathfrak{D}) + T(\nu + T\mathfrak{D})^2(\beta + \mathfrak{D})(\beta + Tz\mathfrak{D} + Tz^2)). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Terminons par énoncer les lemmes qui permettent de contrôler les caustiques. D'après la proposition (3.5), on a

$$\begin{aligned} y_{d,N} &= T\kappa(1 - f_N^-)(f_{N+1}^+ - 1), \\ 1 - f_N^- &= z = 1 - \mathfrak{D} - \beta G(N, T\beta, u_\lambda), \\ f_{N+1}^+ - 1 &= \frac{b}{T\kappa\mathfrak{D}}\mathbf{1}_{\sim, \beta} + \mathfrak{D}\mathbf{1}_{\sim, \beta} - z\mathbf{1}_\sim + \mathcal{O}(Tz), \end{aligned} \quad (3.51)$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} f_N^- &= \frac{Nb}{T\kappa\mathfrak{D}}\mathbf{1}_{\sim,\beta} + (N+1)\mathfrak{D}\mathbf{1}_{\sim,\beta}, \\ f_{N+1}^+ &= \frac{(N+1)b}{T\kappa\mathfrak{D}}\mathbf{1}_* + (N+2)\mathfrak{D}\mathbf{1}_* + \mathcal{O}(T). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pour expliquer la géométrie, on néglige les \mathcal{O} et on pose $p = p(b, T, \omega) = \frac{b}{\kappa T} > 0$. On introduit la fonction de référence

$$f_N^0 = \frac{Nb}{T\kappa\mathfrak{D}} + (N+1)\mathfrak{D} = \frac{Np}{\mathfrak{D}} + (N+1)\mathfrak{D}. \quad (3.53)$$

L'équation $f_N^0 = 1$ admet des solutions ssi $4N(N+1)p \leq 1$; elles sont données par

$$\mathbb{D}_{\pm,N}^0(b, T, \omega) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pN(N+1)}}{2(N+1)}. \quad (3.54)$$

On a

$$f_N^0 \leq 1 \iff \mathfrak{D} \in [\mathbb{D}_{-,N}^0, \mathbb{D}_{+,N}^0], \quad (3.55)$$

$$\mathbb{D}_{-,N}^0 < \mathbb{D}_{-,N+1}^0 \leq \mathbb{D}_{+,N+1}^0 < \mathbb{D}_{+,N}^0, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{-,N}^0 &\geq 2pN = \frac{2N}{\kappa T}b > 0, \\ \mathbb{D}_{+,N}^0 &\leq \frac{1}{N+1} < 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_N^0 &= (1 - f_N^0)(f_{N+1}^0 - 1), \\ y_{d,N} &\simeq T\kappa\mathbb{L}_N^0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Le lemme suivant est crucial pour vérifier que la pire caustique intervenant dans $\Lambda_{b,T}$ est une queue d'aronde. On a $[\mathbb{D}_{-,N}^0, \mathbb{D}_{+,N}^0] \subset [0, \frac{1}{N+1}]$.

Lemme 3.6. *Il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$, tout $p > 0$ tel que $4pN(N+1) \leq 1$, et tout $\mathfrak{D} \in]0, \frac{1}{N+1}]$ on a*

$$\langle N \rangle^{-1} |\mathbb{L}_N^{0,(1)}|_+ \langle N \rangle^{-2} |\mathbb{L}_N^{0,(2)}|_+ \langle N \rangle^{-3} |\mathbb{L}_N^{0,(3)}| \geq c_1. \quad (3.59)$$

Les deux derniers lemmes donnent la localisation des points critiques de \mathbb{L}_N^0 . L'indice S réfère à une queue d'aronde et l'indice C à un cusp dans la projection sur la base de $\Lambda_{b,T}$.

Lemme 3.7. *Pour tout $N \geq 0$, il existe une unique valeur $p_{S,N}$ de p , avec $4pN(N+1) \leq 1$, telle que l'équation*

$$\mathbb{L}_N^{0,(1)}(\mathfrak{D}) = \mathbb{L}_N^{0,(2)}(\mathfrak{D}) = 0 \quad (3.60)$$

admet une solution $\mathbb{D}_{S,N}^0$ dans l'intervalle $[\mathbb{D}_{-,N}^0, \mathbb{D}_{+,N}^0]$. Cette solution est unique et on a

$$4p_{S,N}N(N+1) < 1 < 4p_{S,N}(N+1)(N+2). \quad (3.61)$$

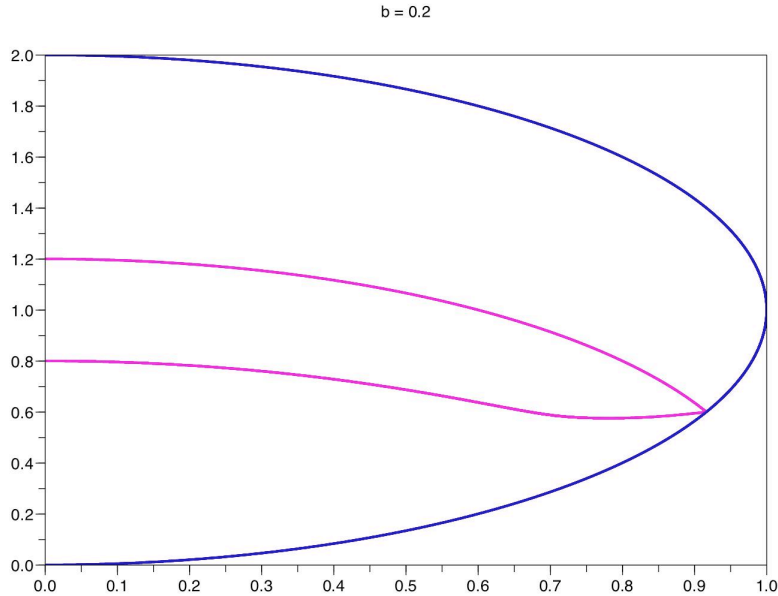
Lemme 3.8. *Pour $N = 0$, l'équation $\mathbb{L}_0^{0,(1)}(\mathfrak{D}) = 0$ avec $\mathfrak{D} \in]0, 1]$, n'a pas de solution pour $p > p_{S,0}$, deux solutions $\mathbb{D}_{C,e,0}^0(p), \mathbb{D}_{C,r,0}^0(p)$ pour $p < p_{S,0}$:*

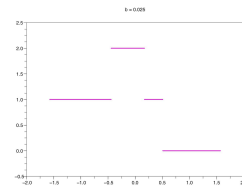
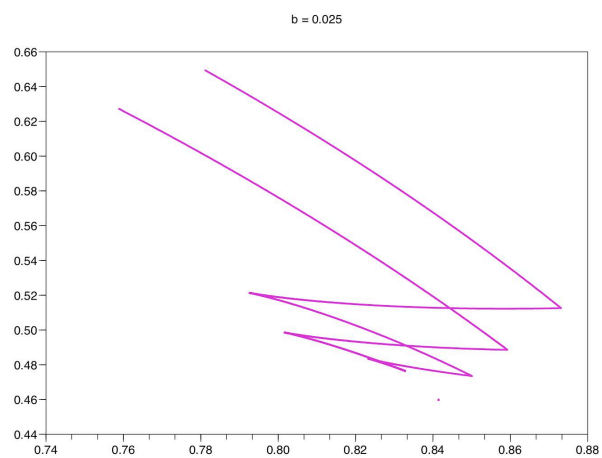
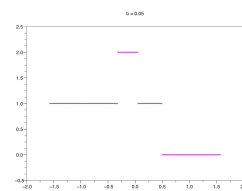
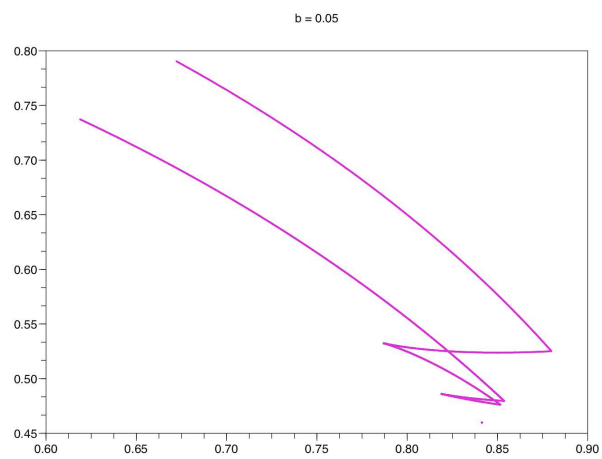
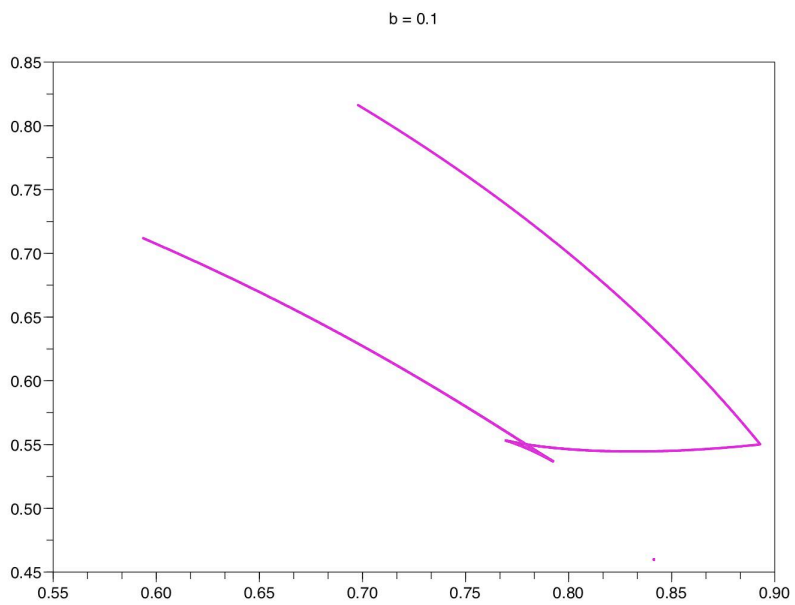
$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{D}_{C,e,0}^0 < \mathbb{D}_{C,r,0}^0 < 1, \\ \mathbb{L}_0^0(\mathbb{D}_{C,r,0}^0) &> 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

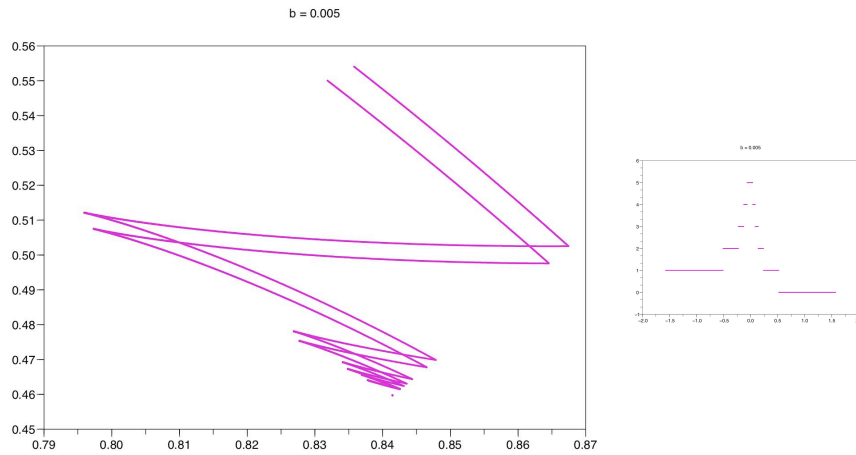
Pour $N \geq 1$, l'équation $\mathbb{L}_N^{0,(1)}(\mathfrak{D}) = 0$ avec $\mathfrak{D} \in [\mathbb{D}_{-,N}^0, \mathbb{D}_{-,N}^0]$ admet une solution $\mathbb{D}_{C,l,N}^0(p)$ pour $p > p_{S,N}$, et trois solutions $\mathbb{D}_{C,l,N}^0(p), \mathbb{D}_{C,c,N}^0(p), \mathbb{D}_{C,r,N}^0(p)$ pour $p < p_{S,N}$, avec $\mathbb{D}_{C,l,N}^0(p)$ lisse en p et

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{C,l,N}^0(p_{S,N}) &< \mathbb{D}_{S,N}^0, \\ \mathbb{D}_{-,N}^0 &< \mathbb{D}_{C,l,N}^0 < \mathbb{D}_{C,c,N}^0 < \mathbb{D}_{C,r,N}^0 < \mathbb{D}_{-,N}^0, \\ \mathbb{L}_0^0(\mathbb{D}_{C,l,0}^0) &> 0, \quad \mathbb{L}_0^0(\mathbb{D}_{C,r,0}^0) > 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Enfin, terminons par des figures pour visualiser les calculs précédents. On a tracé la sphère $S_{b,t=1}$ dans le cas où Ω est le disque unité du plan \mathbb{R}^2 , pour différentes valeurs de b . D'après le Lemme 3.3, cette situation géométrique simple est un modèle microlocal pour le cas général. Les formules de la Proposition 3.5 sont toutefois nécessaires pour comprendre la dispersion tangentielle, les fonctions κ, κ_1 dépendant en général de la direction tangentielle ω . Le premier dessin illustre la première réflexion et l'inversion de courbure de la sphère réfléchie. Le deuxième dessin montre les cusps juste après la première queue d'aronde, qui apparaît avant la deuxième réflexion. Enfin les trois dernières figures illustrent l'accumulation des caustiques. Les dessins de droite donnent le découpage de la stratification.







Références

- [AM77] K.G. Andersson and R. Melrose. The propagation of singularities along gliding rays. *Invent.Math.*, 41 :197–232, 1977.
- [Esk77] G.I Eskin. Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem. *J. Analyse Math.*, 32 :17–62, 1977.
- [Leb06] G. Lebeau. Small time dispersion for waves in a strictly convex domain. *To appear*, 2006.
- [Mel76] R. Melrose. Equivalence of glancing hypersurfaces. *Invent. Math.*, 37 :165–191, 1976.
- [SS95] H. Smith and C. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles. *J. Amer. Math. Soc.*, 8 :879–916, 1995.
- [SS06] H. Smith and C. Sogge. On the l^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary. *arXiv*, 2006.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS,
 PARC VALROSE 06108 NICE CEDEX 02, FRANCE
 lebeau@math.unice.fr