Journées Équations aux dérivées partielles

Alain Bachelot

Solutions globales des systèmes de Dirac-Klein-Gordon

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A15_0>

Solutions globales des systèmes de Dirac-Klein-Gordon

ALAIN BACHELOT

INTRODUCTION

Considérons un système de n spineurs et p champs pseudo-scalaires en interaction quadratique dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$ muni de la métrique de Lorentz $g_{\mu,\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$:

(1) $$-i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\alpha + M_\alpha \psi_\alpha = \varphi_\beta V_\alpha^{\beta,\gamma} \psi_\gamma \ , \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n,$$

(2) $$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_\beta + m_\beta^2 \varphi_\beta = \overset{*}{\psi}_\alpha F_\beta^{\alpha,\gamma} \psi_\gamma \ , \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant p \ .$$

On fait la sommation sur les indices hauts et bas ; les matrices de Dirac γ^μ vérifient les relations :

(3) $$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu,\nu} I \ , \ \overset{*}{\gamma^\mu} = g^{\mu,\mu} \gamma^\mu \ ;$$

M_α et m_β sont des paramètres réels (masse des champs) ; $V_\alpha^{\beta,\gamma}$ et $F_\beta^{\alpha,\gamma}$ sont des matrices 4×4 à coefficients constants ; $\overset{*}{A}$ désigne la transposée conjuguée d'une matrice A .

On sait que le problème de Cauchy associé à (1),(2) admet une solution globale pour des données initiales petites dans les cas suivants :

(i) si aucune masse n'est nulle ($M_\alpha \neq 0$, $m_\beta \neq 0$), le système (1), (2) est équivalent à un système d'équations de Klein-Gordon à non linéarités quadratiques étudiées par S. KLAINERMAN [9]. Le point crucial est que les normes $L^\infty(\mathbb{R}_x^3)$ décroissent comme $|t|^{-1-\varepsilon}$, $0<\varepsilon$, si bien que l'énergie des seconds membres est intégrable sur $\mathbb{R}_t$;

(ii) si toutes les masses sont nulles ($M_\alpha = m_\beta = 0$), le système (1), (2) est conformément invariant et l'existence de solutions globales est établie par Y. CHOQUET-BRUHAT [2] (voir aussi [3] et [4]).

Dans le cas où :

(H_1) *pour tout* α, M_α *est un réel non nul* (m_β *est un réel quelconque*), il y a alors deux difficultés : le système n'est pas conformément invariant et $|\varphi_\beta(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)}$ décroît seulement comme $|t|^{-1}$ si m_β est nul. Nous montrons ici que le problème de Cauchy global pour des données initiales petites est aussi bien posé et que les solutions obtenues sont asymptotiquement libres, sous des conditions *algébriques* qui apparaissent naturellement dans les modèles de la Physique :

(H_2) *pour tout* α,β,γ, *on a* : $\overset{*}{V}{}^{\beta,\alpha}_{\gamma}\,\gamma^0 = \gamma^0 V^{\beta,\gamma}_{\alpha}$, $\overset{*}{F}{}^{\alpha,\gamma}_{\beta} = F^{\gamma,\alpha}_{\beta}$;

(H_3) *si* m_β *est nul*, $F^{\alpha,\gamma}_{\beta}$ *est proportionnel à* $\gamma^0\gamma^5$ *où* $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

(H_2) assure que les champs φ_β sont réels et que la charge totale des spineurs est conservée :

$$(4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^3_x} |\psi_\alpha(t,x)|^2 dx = \text{constante},\quad t=x^0,\quad x=(x^1,x^2,x^3) \;;$$

(H_3) exprime que le champ φ_β est pseudoscalaire et Lorentz-invariant.

<u>**EXEMPLE**</u>. - Dans le modèle de Yukawa, la force nucléaire entre le proton et le neutron, transmise par trois pions, est décrite par le lagrangien d'interaction :

$$\mathcal{L}_{int} = ig\{(\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_n+\overline{\psi}_n\gamma^5\psi_p)\varphi_1 - i(\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_n-\overline{\psi}_n\gamma^5\psi_p)\varphi_2 + $$
$$+ (\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_p-\overline{\psi}_n\gamma^5\psi_n)\varphi_3\},\quad \overline{\psi}=\overset{*}{\psi}\gamma^0 .$$

Nous utiliserons les estimations L^2-L^∞ de S. KLAINERMAN dans les espaces de Sobolev associés à la métrique de Lorentz [8]. On introduit les opérateurs $(\Gamma_\sigma)_{1\leq\sigma\leq 10}$

$$(5) \qquad \partial_\mu \;,\quad \Omega_{\mu,\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu,\quad 0\leq\mu,\nu,\leq 3 .$$

Pour u dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3_x)$ on définit les normes :

$$(6) \quad \|u(t)\|^2_N = \sum_{|\lambda|\leq N} \|\Gamma^\lambda u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \;,\quad |u(t)|_N = \sup_{|\lambda|\leq N} |\Gamma^\lambda u(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)}$$

où $\lambda\in\mathbb{N}^{10}$, $|\lambda|=\lambda_1+\ldots+\lambda_{10}$, $\Gamma^\lambda = \Gamma_1^{\lambda_1}\ldots\Gamma_{10}^{\lambda_{10}}$.

L'estimation fondamentale de [8] assure que :

(7) $$|u(t)|_N \leqslant C_N(1+|t|)^{-1} \sup_{s\in\mathbb{R}} \|u(s)\|_{N+3} .$$

La décroissance est plus rapide si u et solution de :

(8) $$\partial_\mu\partial^\mu u+m^2u = f(t,x),\ m\neq 0,\ \operatorname{supp} u\subset\{|x|\leqslant|t|+R\} ,$$

et on a :

(9) $$|u(t)|_N \leqslant C(1+|t|)^{-3/4}\Big(\|u(s)\|_{N+5}\Big|_{s=0} + \sup_{|s|\leqslant 2|t|}(1+|s|)^{1+\varepsilon}\|f(s)\|_{N+4}\Big), 0<\varepsilon$$

I - Estimations pour l'équation de Dirac avec un potentiel.

Nous considérons le système de Dirac :

(10) $$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = \varphi\psi ,\quad M\neq 0$$

où le potentiel φ est une matrice 4×4 à coefficients variables dans $\mathbb{C}$ et vérifiant :

(11) $$\overset{*}{\varphi}\gamma^0 = \gamma^0\varphi ;$$

cette condition assure la conservation de la charge :

(12) $$\int |\psi(t,x)|^2 dx = \text{constante} .$$

Un entier $k\geqslant 8$ étant donné, on note $\|\varphi\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|_k$ et on suppose que :

(13) $$\|\varphi\| < \infty .$$

EXEMPLE (champ électromagnétique libre). - On pose $\varphi=eA_\mu\gamma^\mu$ où $e\in\mathbb{R}$ et A_μ est un champ réel vérifiant : $\partial_\nu\partial^\nu A_\mu = 0$, $A_{\mu|t=0}\in H^k_{\text{compact}}$, $\partial_0 A_{\mu|t=0}\in H^{k-1}_{\text{compact}}$; alors φ vérifie (11) et (13).

On choisit $\delta\in]0,1/4[$ et on définit la norme :

(14) $$|||\psi||| = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{(1+\log(1+|t|))^{-8}\|\psi(t)\|_k + \|\psi(t)\|_{k-8} + (1+|t|)^{1+\delta}|\psi(t)|_{k-8}\}.$$

THEOREME 1 - *Soit* ψ *une solution de (10) supportée dans* $\{|x|\leqslant|t|+R\}$. *On suppose que* φ *vérifie (11) et (13). Alors il existe une constante* $C>0$ *ne dépendant que de* $k\geqslant 8$, R *et* δ *telle que :*

$$(15)\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|\psi(t)\|_{k-8}+(1+|t|)^{1+\delta}|\psi(t)|_{k-8}\}\leqslant C\|\psi(t)\|_k\Big|_{t=0}(1+\|\varphi\|)^{2k-4};$$

et si k *est supérieur ou égal à 15, on a :*

$$(16)\qquad |||\psi||| \leqslant C\|\psi(t)\|_{k\,|\,t=0}\,(1+\|\varphi\|)^{2k+12}\ .$$

Sous l'hypothèse (13), l'estimation (7) implique seulement que $|\varphi(t)|_{k-3} = O(|t|^{-1})$, on ne peut donc pas utiliser le lemme de Gronwall pour estimer $\|\psi(t)\|_N$; l'idée est alors de faire une récurrence sur N en remarquant que (12) assure que $\|\psi(t)\|_0=\mathrm{cste}$. La difficulté technique est que les opérateurs $\Omega_{\mu,\nu}$ ne commutent pas avec le système de Dirac $\mathscr{L}_M = -i\gamma^\mu\partial_\mu+M$. On introduit alors les opérateurs pseudodifférentiels $\tilde\Omega_{\mu,\nu} = P^{-1}(\partial)\Omega_{\mu,\nu}P(\partial)$ où $P(\partial)$ diagonalise $\mathscr{L}_M$. On note $\mathscr{O}_N$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant N$ engendré par $(\Gamma_\sigma)_{1\leqslant\sigma\leqslant 10}$.

PROPOSITION 1 - *Il existe des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels p-régularisants sur* $\mathbb{R}^3_x$, Σ_{-p} *telles que :*

$$(17)\qquad \forall\Omega_N\in\mathscr{O}_N\ ,\ P^{-1}(\partial)\Omega_NP(\partial)-\Omega_N\in\ <\Sigma_0\,\mathscr{O}_{N-1}+\Sigma_{-1}\,\mathscr{O}_{N-1}\partial_t>$$

$$(18)\qquad [P^{-1}(\partial)\Omega_NP(\partial),\mathscr{L}_M]\in\ <\Sigma_0\,\mathscr{O}_{N-1}\,\mathscr{L}_M>$$

$$(19)\qquad \forall N,\ \forall T_0\in\Sigma_0,\ \exists C_0>0,\ \forall u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^4),\ \forall t\in\mathbb{R}\quad \|T_0u(t)\|_N\leqslant C_0\|u(t)\|_N,$$

où $<E>$ *désigne l'espace vectoriel engendré par* E .

On évalue $\|\psi(t)\|_N$ par $\|\tilde\Omega_N\psi(t)\|_{L^2}$ où $\tilde\Omega_N=P^{-1}(\partial)\Omega_NP(\partial)$ en remarquant que $\mathscr{L}_M\,\tilde\Omega_N\psi-\varphi\tilde\Omega_N\psi$ ne dépend que des dérivées de ψ d'ordre $\leqslant N-1$. On obtient une estimation logarithmique de $\|\psi(t)\|_N$ qu'on utilise avec (9) et (13) pour montrer la décroissance de $|\psi(t)|_N$.

On peut déduire du théorème 1, l'existence et la complétude des opérateurs d'onde pour (10). Le problème a été étudié dans [7] pour des systèmes plus généraux, mais sous la condition que le potentiel se stabilise suffisamment vite à l'infini :

$\int |\varphi(t)-\varphi(\infty)|_{L^\infty} dt < \infty$, ce qui ne permet pas de considérer deux cas physiquement intéressants : i) le potentiel périodique en temps [1], ii) le champ électromagnétique libre pour lequel on a seulement $|\varphi(t)|_{L^\infty} = O(|t|^{-1})$. On note $U(t,s)$ le propagateur associé à (10) : $\psi(t)=U(t,s)\psi(s)$ et $U_0(t)$ désigne le groupe unitaire associé au système libre ($\varphi=0$). On introduit :

$$W_-\psi = \lim_{t\to+\infty} U(0,-t)U_0(t)\psi, \quad W\psi = \lim_{t\to+\infty} U_0(-t)U(t,0)\psi .$$

THEOREME 2 - *Sous les hypothèses (11) et (13) avec* $k=8$, *les opérateurs* W_- *et* W *sont des isométries définies sur tout* $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$.

II - Formes compatibles et condition nulle.

Pour obtenir une solution globale d'un système symétrique semi-linéaire $Lu=f(u)$, $f(u)=O(|u|^d)$ comme perturbation de la solution nulle, on est amené à établir une estimation du type :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(u(t))\|_{L^2} dt < \infty .$$

Or, la solution u_0 de $Lu_0=0$ décroît uniformément comme $|t|^{-(n-1)/2}$ et ainsi $\|f(u_0(t)\|_{L^2} = O(|t|^{-(n-1)(d-1)/2})$. Le cas $n=3$, $d=2$ est donc critique et il est intéressant de distinguer les interactions quadratiques pour lesquelles $\|f(u_0(t))\|_{L^2}$ soit intégrable. Une condition suffisante est que f s'annule sur le noyau du symbole de L : c'est la notion de compatibilité introduite par B. HANOUZET et J.L. JOLY [5] et pour l'équation des ondes, la condition nulle de S. KLAINERMAN [10]. Dans le cas des systèmes de Dirac ces conditions sont liées à l'invariance de Lorentz. On note $L\in O(3,1) \to \pm\Lambda\in SL(4,\mathbb{C})$ la représentation spinorielle du groupe de Lorentz.

THEOREME 3 - *Soit* Q *une forme sesquilinéaire sur* $\mathbb{C}^4$; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Q *est invariante sous l'action du sous-groupe orthochrone propre de Lorentz* $DO(3,1)$: $\forall \psi_i \in \mathbb{C}^4$, $\forall L \in DO(3,1)$, $Q(\Lambda\psi_1, \Lambda\psi_2) = Q(\psi_1, \psi_2)$;

2) Q *est compatible avec le système de Dirac sans masse* $\mathscr{L}_0 = -i\gamma^\mu \partial_\mu$: $\forall \xi \in \mathbb{R}^4 \backslash 0$, $\forall V \in \mathrm{Ker}\, \xi_\mu \gamma^\mu$, $Q(V,V) = 0$;

3) *la forme* $N(\psi_1, \psi_2) = Q(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2)$, $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$, *satisfait la condition nulle : si* $\psi_i = (\psi_i^h)_{1 \leqslant h \leqslant 4}$, *on a :*

$$(20) \quad \forall X \in \mathbb{R}^4,\ g^{\mu,\nu} X_\mu X_\nu = 0 \Rightarrow \forall h,k,\ \sum_{0 \leqslant \mu,\nu \leqslant 3} \frac{\partial^2 N}{\partial(\partial_\mu \overset{*}{\psi_1^h})\, \partial(\partial_\nu \psi_2^k)} X_\mu X_\nu = 0 \ ;$$

4) *il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* ψ_i *dans* $C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$

$$(21) \quad |Q(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2)(t,x)| \leqslant C(1+|t|+|x|)^{-1} \sup_{0 \leqslant \sigma,\tau \leqslant 10} |\Gamma_\sigma \psi_1(t,x)|\, |\Gamma_\tau \psi_2(t,x)|$$

où $\Gamma_0 = x^\mu \partial_\mu$, $t = x^0$, $x = (x^1, x^2, x^3)$;

5) *la matrice de* Q *est combinaison linéaire de* γ^0 *et* $\gamma^0\gamma^5$.

THEOREME 4 - *Soit* Q *une forme sesquilinéaire sur* $\mathbb{C}^4$; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *pour tout* ψ_i *dans* $\mathbb{C}^4$ *et tout* L *dans* $O(3,1)$ *on a :* $Q(\Lambda\psi_1, \Lambda\psi_2) = (\det L)\, Q(\psi_1, \psi_2)$;

2) Q *est compatible avec le système de Dirac* $\mathscr{L}_M = -i\gamma^\mu \partial_\mu + M$, $M \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^4$, $\forall V \in \mathrm{Ker}(\xi_\mu \gamma^\mu + M)$, $Q(V,V) = 0$;

3) *la forme* $N(\psi_1, \psi_2) = Q(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + g^{\mu,\nu} Q(\partial_\mu\psi_1, \partial_\nu\psi_2)$ *satisfait la condition nulle (20) et il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* ψ_i *de* $C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$:

$$(22) \quad |N(\psi_1, \psi_2)(t,x)| \leqslant C(1+|t|+|x|)^{-1} \sup_{1 \leqslant \tau,\sigma \leqslant 10} |\Gamma_\sigma \psi_1(t,x)|\, |\Gamma_\tau \psi_2(t,x)|$$

4) *la matrice de* Q *est proportionnelle à* $\gamma^0\gamma^5$.

Un point crucial est que l'opérateur de radiation Γ_0 qui intervient dans (21) n'apparaît pas dans (22) ; en effet, on a $[\mathcal{L}_0,\Gamma_0]=\mathcal{L}_0$ et donc $[\mathcal{L}_M,\Gamma_0]=\mathcal{L}_0$ et on ne peut utiliser Γ_0 dans le cas de champs massifs.

III - Le problème non linéaire.

Une façon d'obtenir des solutions globales dispersives de l'équation $\partial_\mu\partial^\mu u = \partial_\mu u.\partial^\mu u$ est de la transformer en une équation à second membre cubique : $\partial_\mu\partial^\mu(u-\frac{1}{2}u^2)=u\partial_\mu u\partial^\mu u$. De manière analogue, l'équation :

(23) $$\partial_\mu\partial^\mu\varphi = Q(\psi_1,\psi_2),\ Q \text{ compatible avec } \mathcal{L}_M,\ M\neq 0$$

est équivalente à :

(24) $$\partial_\mu\partial^\mu(\varphi+(M_1+M_2)^{-2}Q(\psi_1,\psi_2))=N(\psi_1,\psi_2)+\mathcal{R}$$

où N satisfait la condition nulle et (22) et $\mathcal{R}$ est cubique si $\mathcal{L}_{M_i}\psi_i = g_i\varphi\psi_i$, $M_i\neq 0$. On introduit pour $k\geq 16$ la norme $[\psi_i]$:

$$[\psi_i]= |||\psi_i||| + \sup_{t\in\mathbb{R}}\{(1+\log(1+|t|))^{-8}(1+|t|)\|\mathcal{L}_{M_i}\psi(t)\|_k + (1+|t|)^{2+\delta}|\mathcal{L}_{M_i}\psi(t)|_{k-8}\} ;$$

on applique à (24) l'estimation d'énergie de [10] qui assure que la solution u de $\partial_\mu\partial^\mu u=f$, $\text{supp}\,u\subset\{|x|\leq|t|+R\}$ vérifie :

(25) $$\|u(t)\|_1 \leq C_R(\|u(t)\|_1\Big|_{t=0} + \Big|\int_0^t (1+|s|)\|f(s)\|_{L^2}\,ds\Big|) .$$

L'estimation (22) permet d'absorber le poids $(1+|s|)$ qui apparaît dans (25) et on obtient la :

PROPOSITION 2 - *Soit* φ *une solution de (23) supportée dans* $\{|x|\leq|t|+R\}$. *Il existe* $C>0$ *ne dépendant que de* $k\geq 16$, R *et* δ *telle que :*

(26) $$\|\varphi\|= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|_k \leq C(\|\varphi(t)\|_k\Big|_{t=0} + [\psi_1][\psi_2]) .$$

Maintenant, on peut résoudre par une méthode classique le problème de Cauchy pour (1) (2) à l'aide des estimations (16) et (26).

THEOREME 5 - *On suppose que* (H_1) (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées et on donne* $\psi_{\alpha,0}$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$, $\varphi_{\beta,0}$ *et* $\varphi_{\beta,1}$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. *Alors si ces données sont suffisamment petites dans* $H^{16}(\mathbb{R}^3)$, *le système (1) (2) admet une unique solution globale* C^∞ *vérifiant :*

$$1\leqslant\alpha\leqslant n,\ 1\leqslant\beta\leqslant p,\ \psi_\alpha(0,x)=\psi_{\alpha,0}(x),\varphi_\beta(0,x)=\varphi_{\beta,0}(x),\partial_t\varphi_\beta(0,x)=\varphi_{\beta,1}(x).$$

On montre facilement que cette solution est asymptotiquement libre.

THEOREME 6 - *Sous les conditions précédentes, il existe des solutions libres* $\psi_\alpha^\pm$, $\varphi_\beta^\pm$ *vérifiant :*

$$1\leqslant\alpha\leqslant n, 1\leqslant\beta\leqslant p,\ -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_\alpha^\pm+M_\alpha\psi_\alpha^\pm = 0,\ \partial_\rho\partial^\mu\varphi_\beta^\pm+m_\beta^2\varphi_\beta^\pm = 0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\|\psi_\alpha(t)-\psi_\alpha^\pm(t)\|_{H^8}+\|\varphi_\beta(t)-\varphi_\beta^\pm(t)\|_{H^9}+\|\partial_t\varphi_\beta(t)-\partial_t\varphi_\beta^\pm(t)\|_{H^8}) = 0 .$$

Remarque : On peut aisément généraliser ces résultats aux cas de couplages d'ordre plus élevé : on considère l'équation :

$$\text{(2 bis)}\qquad \partial_\mu\partial^\mu\varphi_\beta+m_\beta^2\varphi_\beta = \overset{*}{\psi}_\alpha F_\beta^{\alpha,\gamma}\psi_\gamma+f_\beta(\tilde\Psi,\tilde\Phi),1\leqslant\beta\leqslant p,$$

où $\tilde\Psi=(\psi_\alpha,\partial_\mu\psi_\alpha)_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant n\\ 0\leqslant\mu\leqslant 3}}$, $\tilde\Phi=(\varphi_\beta,\partial_\mu\varphi_\beta)_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant p\\ 0\leqslant\mu\leqslant 3}}$, et f_β vérifie l'hypothèse

(H_4)

f_β *est une fonction* C^∞ *à valeur réelle vérifiant :*

$$|f_\beta(\tilde\Psi,\tilde\Phi)| \leqslant C(|\tilde\Psi|+|\tilde\Phi|)^3$$

et si $m_\beta=0$ *on a :*

$$|f_\beta(\tilde\Psi,\tilde\Phi)| \leqslant C|\tilde\Psi|(|\tilde\Phi|+|\tilde\Psi|)^2 .$$

Sous les hypothèses (H_1) (H_2) (H_3) et (H_4) les énoncés des théorèmes 5 et 6 s'étendent aux systèmes (1)-(2 bis).

[1] A. BACHELOT, V. PETKOV, *Existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en temps*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.303, série I, n°14, 1986 p.671-673.

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Solutions globales des équations de Maxwell-Dirac-Klein-Gordon (masses nulles)*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.292, 1981, p.153-158.

[3] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, *Existence of global solutions of the Yang-Mills, Higgs and spinor field equations in 3+1 dimensions*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^e^ série, t.14, 1981, p.481-500.

[4] D. CHRISTODOULOU, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure and Appl. Math. vol.34, 1986, p.267-282.

[5] B. HANOUZET, J.L. JOLY, *Applications bilinéaires compatibles sur certains sous-espaces de type Sobolev*, C.R. Acad. Sc. Paris, t.294, 1982, p.745-747 et *Applications bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t.301, n°10, 1985, p.491-494 et article à paraître in Ann. Inst. Henri Poincaré - Analyse non linéaire.

[6] B. HANOUZET, J.L. JOLY, *Explosion pour des problèmes hyperboliques semilinéaires avec second membre non compatible*, C.R. Acad. Sc. Paris, t.301, n°11, 1985, p.581-584 et Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux I, n° 8518.

[7] A. INOUE, *Wave and scattering operators for an evolving system* $\frac{d}{dt} - iA(t)$, J. Math. Soc. Japan, 26, n°4, 1974, p.608-624.

[8] S. KLAINERMAN, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure and Appl. Math. 38, 1985, p.321-332.

[9] S. KLAINERMAN, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein Gordon equations in four space-time dimensions,* Comm. Pure and Appl. Math. 38, 1985, p.631-641.

[10] S. KLAINERMAN, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warszawa 1983* et *The null condition and global existence to nonlinear wave equations,* Lectures in Appl. Math. vol.23, 1986, p.293-326.

UNIVERSITE DE BORDEAUX I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
Unité associée au CNRS n°226
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX