

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-YVES CHEMIN

Interactions totalement non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERACTIONS TOTALEMENT NON LINEAIRES

par J.Y. CHEMIN

Introduction :

On cherche à décrire les singularités d'une solution réelle assez régulière de l'équation

$$(E) \quad F(x, u, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m} = 0$$

sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^n , F étant une fonction C^∞ de ses arguments.

Soit p (resp p_m)(x, ξ) = $\sum_{|\alpha| \leq m}$ (resp $\sum_{|\alpha|=m}$) $\partial F / \partial u_\alpha \cdot \xi^\alpha$, on fait les hypothèses suivantes :

(H_1) p_m est strictement hyperbolique par rapport à ξ_1 .

(H_2) toute bicaractéristique (i.e. courbe intégrale de H_{p_m} , le champ hamiltonien de p_m) issue d'un point (x, ξ) de $T^*\Omega \cap (x_1 > 0)$, tel que $p_m(x, \xi) = 0$, rencontre $T^*\Omega \cap (x_1 < 0)$.

On cherche à décrire les singularités d'une solution u de (E) dans l'avenir, à partir, soit de leur connaissance dans le passé, soit de la connaissance de la régularité des traces de u sur l'hyperplan $(x_1 = 0)$.

Théorème fondamental (J-M. Bony [4]) : Soit $u \in H_{loc}^s(\Omega)$, $s > \frac{n}{2} + m + 1$ réelle solution de (E) :

- $WF_{2s - \frac{n}{2} - m}(u) \subset \text{Carp}_m = \{(x, \xi) / p_m(x, \xi) = 0\}$.
- Soit F_σ la réunion des bicaractéristiques issues des points de $WF_\sigma(u) \cap \text{Carp}_m \cap (x_1 < 0)$, pour tout $\sigma \leq 2s - \frac{n}{2} - m - 1$, $WF_\sigma(u) \subset F_\sigma$.

Ce théorème signifie que le comportement des singularités microlocales H^σ de u est, pour $\sigma \leq 2s - \frac{n}{2} - m - 1$, linéaire vis-à-vis du symbole principal du linéarisé.

On cherche, soit à obtenir des comportements de singularités de type linéaire, soit à contrôler l'apparition des singularités nées d'interaction non linéaires, pour un niveau de singularités allant au delà du seuil $2s - s_0$. On présentera ici, d'une part des résultats relatifs à la dimension un d'espace (i.e. $n = 2$), ainsi qu'à l'ordre 1, d'autre part, des résultats relatifs au cas de données initiales conormales par rapport à un point.

Le lien entre ces deux types de résultats provient des outils utilisés pour leur démonstration ; à savoir le calcul paradifférentiel précisé, et l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers.

Le plan sera le suivant :

1. Résultat en dimension 2 ou à l'ordre 1.
2. Calcul paradifférentiel précisé.
3. Action itérée de champs de vecteurs peu réguliers.
4. Problème de Cauchy à données singulières en un point.

Pour les détails relatifs aux paragraphes 1, 2 et 3, nous renvoyons le lecteur à [5].

1. Résultats en dimension 2 ou à l'ordre 1 .

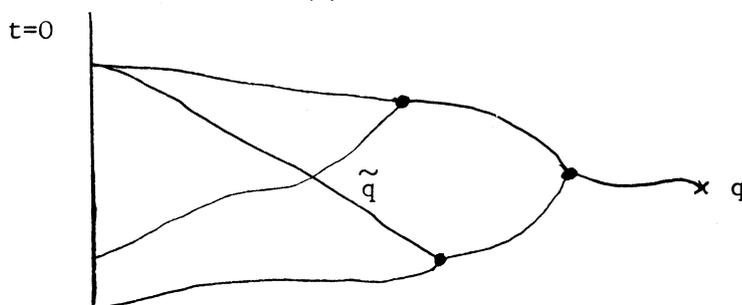
On suppose que u est une solution réelle $C^r_{loc}(\Omega)$, $r > m + 1$, de l'équation (E) dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^2 vérifiant (H_1) et (H_2) .

La dimension 2 et (H_1) assure que $p_m = \prod_{i=1}^m z_i$, les z_i étant des champs de vecteurs dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de la solution u .

On va maintenant définir un indice de régularité pour u ; soit q un point de Ω , $\mathcal{A}_i(q)$ désigne l'ensemble des graphes A formés de points et de courbes intégrales des z_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, joignant ces points, et tels que

- . q est un point de A ,
- . la courbe intégrale de z_i passant par q est la courbe de A passant par q ,
- . de tout point du graphe autre que q , il arrive les courbes intégrales de z_j et z_k avec $j \neq k$, et il en repart z_l avec $l \neq k$ et $l \neq j$.

Un exemple d'élément de $\mathcal{A}_i(q)$ est donné par le schéma suivant :



Les points du type \tilde{q} ne sont pas des points du graphe d'interaction, car ils ne rendent pas compte d'interaction au niveau de régularité où l'on va se placer.

Définition 1 : Soit u une solution de (E) sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^2 , $u \in C^r_{loc}(\Omega)$, $r > m + 1$, vérifiant (H_1) et (H_2) ; soit τ une fonction de $\Omega \cap (x_1 = 0)$ dans $[\tau, +\infty[$ telle que, pour tout $q' \in \Omega \cap (x_1 = 0)$, $u \in C^{\tau(q')}$ en q' .

- (i) $\rho_i(q) = \inf_{A \in \mathcal{A}_i(q)} \left(m + 1 + \sum_{q' \in A \cap (x_1 = 0)} \tau(q') - m - 1 \right)$, les points de $A \cap (x_1 = 0)$ étant comptés avec multiplicité.
- (ii) $\rho(q) = \inf_{1 \leq i \leq m} \rho_i(q)$.

Théorème 1.1 : Sous les hypothèses de la Définition 1 , pour tout $q \in \Omega$, $u \in C^{\rho(q)}$ près de q .

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, u est microlocalement $C^{\rho_i(q)}$ en $(q, \text{Car}z_i|_q)$.

Remarques :

1. On a le même théorème en remplaçant les espaces C^σ par $H^{\sigma + \frac{n}{2}}$.

2. J. Rauch et M. Reed ont démontré ce théorème dans [11], lorsque (E) est semi linéaire ; les champs de vecteurs $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont alors C^∞ .

3. P. Godin a démontré ce résultat lorsque $m = 2$, dans [9] ; le comportement des singularités est alors linéaire vis-à-vis de p_2 .

Théorème 1.2 :

(i) Soit $\sigma \in]0, 1[$ tel que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\sigma \neq \frac{m}{m+2}$, soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , et soit u solution réelle $C_{\text{loc}}^{1+\sigma}(\Omega)$ (resp $H_{\text{loc}}^{\frac{n}{2}+1+\sigma}(\Omega)$) de $(E_1) F(x, u, \text{gradu})$, sur Ω .

Si $(x, \xi) \in T^*\Omega$ est un point elliptique du linéarisé, i.e. $\sum_{i=1}^n \partial F / \partial u_i \cdot \xi \neq 0$ alors u est microlocalement $C^{1+2\sigma+k_0\sigma}$ (resp $H^{\frac{n}{2}+1+2\sigma+k_0\sigma}$) en (x, ξ) , avec $k_0 = \left[\frac{2\sigma}{1-\sigma} \right]$.

(ii) On a le même résultat si u est complexe et f holomorphe en (u, gradu) .

Corollaire : Si u est une solution réelle (resp complexe) de $F(x, u, \text{gradu}) = 0$ sur Ω , avec $u \in \bigcap_{\epsilon > 0} C_{\text{loc}}^{2-\epsilon}(\Omega)$, $f \in C^\infty$ (resp et holomorphe en (u, gradu)), alors u est C^∞ microlocalement en tout point elliptique du linéarisé.

2. Calcul paradifférentiel précisé

Pour démontrer le théorème de J-M. Bony, il faut transformer l'équation (E) en l'équation paradifférentielle linéaire suivante : $T_p u \in H^{2s - \frac{n}{2} - 2m}$, où T_p est l'opérateur paradifférentiel de symbole p , (voir [4]). La limitation à $2s - s_0$ des singularités traitées par ce théorème provient des deux faits suivants :

. T_p est défini modulo un opérateur $s - \frac{n}{2} - m$ -régularisant, i.e. envoyant H^σ dans $H^{s - \frac{n}{2} - 2m + \sigma}$.

. Le reste est dans $H^{2s - \frac{n}{2} - 2m}$.

Le calcul différentiel précisé a pour but de fournir une méthode relativement générale pour contourner ces deux obstacles :

Définition 2.1 : Une fonction $T \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}; \mathbf{R})$ telle que :

(i) $\text{Supp} T \subset \{(\xi, \eta) / |\xi| \leq \epsilon |\eta|\}$

(ii) $\text{Supp}(1 - T) \setminus B(0, c) \subset \{(\xi, \eta) / |\xi| \geq \epsilon_1 |\eta|\}$

(ϵ et ϵ_1 étant deux réels tels que $0 < \epsilon_1 < \epsilon < 1$)

$$(iii) |\partial^\alpha T(\xi, \eta)| \leq C_\alpha (1 + |\xi, \eta|)^{-|\alpha|} ,$$

étant supposée donnée, on appelle paraproduit, et on note encore T , l'opérateur envoyant $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ dans \mathcal{S}' défini par :

$$(2.1) \quad T_v w(x) = (2\pi)^{-2n} \int e^{ix(\xi+\eta)} T(\xi, \eta) \hat{v}(\xi) \hat{w}(\eta) d\xi d\eta$$

Pour les propriétés opératoires de T dans les H^σ et les C^σ , nous renvoyons à [4]. A l'aide d'intégration par parties, on démontre, dans [5], que $\text{Supp Sing } T_v w \subset \text{Supp } v \cap \text{Supp Sing } w$; ceci permet de localiser T sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^n modulo un opérateur infiniment régularisant. Soit $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha$, avec $a_\alpha \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, on notera encore T_a l'opérateur défini par $T_a v = \sum_{|\alpha| \leq m} T_{a_\alpha} D^\alpha v$.

Etudions maintenant le reste R ; il provient de la paralinéarisation d'une fonction non linéaire. Le théorème de paralinéarisation de Bony-Meyer (voir [4] et [10]) dit que si $v \in C^r$, $f(v) \equiv T_{f'(v)} \cdot v(C^r)$.

Soit k un entier strictement positif ; la donnée d'une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, réalisant une partition de l'unité dyadique, permet de construire dans [5], explicitement et de manière récurrente, une suite d'opérateurs $(M^{\beta, k}(a, v))_{1 \leq \beta \leq k}$, linéaires en a , β -linéaires en v tels que : $M^{\beta, k}(a, v)$ envoie $C^{\rho_0} \times C^\sigma$ (resp $C^{\rho_0} \times H^{\frac{n}{2} + \sigma}$) dans $C^{\beta\sigma + \text{Inf}(\rho_0, 0)}$ (resp $H^{\frac{n}{2} + \beta\sigma + \text{Inf}(\rho_0, 0)}$) pour $\sigma + \text{Inf}(\rho_0, 0) > 0$. L'intérêt de ces opérateurs apparaît dans le théorème suivant :

Théorème d'approximation 2.1 :

(i) Soit $v \in C^r$ (resp $H^{\frac{n}{2} + r}$), $r > 0$, réelle et $f \in C^\infty$, pour tout $k' \leq k$:

$$\left\| f(v) - \sum_{\beta=1}^{k'} M^{\beta, k} (f^{(\beta)}(v), v) \right\|_{C^r \text{ (resp } H^{\frac{n}{2} + r})} \leq C$$

la constante C ne dépendant que de $\|v\|_{C^r \text{ (resp } H^{\frac{n}{2} + r})}$.

(ii) On a le même résultat avec v complexe et f holomorphe près des valeurs de v .

Remarques :

1. Si $v \in C^\sigma$, $a \in C^{\rho_0}$ avec $\sigma + \text{inf}(\rho_0, 0) > 0$

$$\begin{aligned}
 M^{1,k}(a, v) &= \sum_{p \leq q + N_k} \varphi(2^{-p}D) a \varphi(2^{-q}D) v \\
 &\equiv T_a v \left(C^{\sigma + \text{Inf}(\rho_0, 0)} \right)
 \end{aligned}$$

2. Pour des applications à l'interaction contrôlée, voir [6] et [7].

3. Action itérée des champs de vecteurs peu réguliers.

Définition 3.1 : Soient $Z = (z_1, \dots, z_N)$ une famille de N champs de vecteurs sur \mathbf{R}^n , à coefficients C^σ , et T un paraproduit sur \mathbf{R}^n , $C^{r,k}(Z)$ (resp $H^{r,k}(Z)$) est l'ensemble des v dans C^r (resp H^r) tels que, pour tout $I = (i_1, \dots, i_l)$, $l \leq k$, $i_j \in \{1, \dots, N\}$ $T_{z_{i_1}} \dots T_{z_{i_l}} v \in C^{r+(\delta-1)l}$ (resp $H^{\frac{n}{2}+r+(\delta-1)l}$), avec $\delta = \text{Inf}(r, 1)$.

Des espaces de ce type ont été également introduits par S. Alinhac dans [1] pour l'étude d'interaction d'ondes simples dans les équations non semi-linéaires.

En supposant (H_{k-1}) : les coefficients des champs sont $C^{\sigma, k-1}(Z)$, on démontre, dans [5], des inégalités disant que ces "parachamps" se comportent vis-à-vis des produits d'une manière pas trop éloignée de celle des champs de vecteurs à coefficients C^∞ ; une modification formelle mineure laissée au lecteur permet d'adapter le cas d'un seul champ, traité dans [5], à celui de plusieurs traités ici. On peut alors démontrer, sous cette hypothèse, que les espaces $C^{r,k}(Z)$ et $H^{r,k}(Z)$ sont indépendants d'un paraproduit T utilisé pour les définir. De plus, notamment grâce à l'étude de l'opérance des opérateurs $(M^{\beta,k})_{1 \leq \beta \leq k}$ dans les $C^{\sigma,k}(Z)$, on construit, pour $k \leq \left\lfloor \frac{2\sigma}{1-\sigma} \right\rfloor$, un calcul paradifférentiel analogue à celui construit par J-M. Bony dans [4].

Illustrons maintenant l'intérêt de cette méthode par la démonstration du Théorème 1.2 :

Ce théorème est trivial dans le cas semi-linéaire ; en effet, soit z un champ de vecteurs à coefficients C^∞ , soit $f \in C^\infty$ et $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, si $z(x, D)u = f(x, u)$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $Z^k u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, d'où le théorème.

Dans le cas non semi-linéaire, on peut commencer par supposer $f(x, 0) = 0$. Soient alors φ et χ deux fonctions de $C^\infty_0(\Omega)$ et (x, ξ) un point elliptique du linéarisé tel que χ vaille 1 près de $\text{Supp}\varphi$, et φ vaille 1 près de x :

$$\varphi f(x, u(x), \partial u(x)) = \varphi f(x, \chi u(x), \partial \chi u(x))$$

Dans la suite on note encore f la fonction φf , et u la fonction χu .

Posons $z = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x, u, \partial_j u) \cdot \xi_i$ et, T étant un paraproduit sur \mathbf{R}^n , $Z = T_z$. On va démontrer $(R_{k_0+1}) u \in C^{1+\sigma, k_0+1}(Z)$ et que les coefficients de z sont dans $C^{\sigma, k_0}(Z)$.

(R_1) est clairement vraie. Supposons (R_j) avec $j \leq k_0$.
 Les coefficients de Z sont des fonctions C^∞ de u et des $\partial_j u$, donc sont dans $C^{\sigma,j}(Z)$. Il vient alors

$$Zu + T_{\partial_0 f(x,u,\partial u)} \cdot u \in C^{2\sigma,j}(Z).$$

Vu que $\partial_0 f(x,u,\partial u) \in C^{\sigma,j}(Z)$, on a $T_{\partial_0 f(x,u,\partial u)} u \in C^{1+\sigma,j}(Z)$, qui est inclus dans $C^{2\sigma,j+1}(Z)$, d'où : $Zu \in C^{2\sigma,j}(Z)$, or $u \in C^{1+\sigma,j+1}(Z)$, ce qui démontre (R_{j+1}) . D'où il vient (R_{k_0+1}) et le théorème par un analogue, dans ce cadre, de l'ellipticité microlocale pour le champ Z .

Pour le Théorème 1.1, on utilise, à l'instar de J. Rauch et M. Reed dans [11], des espaces $\sum_{i=1}^m C^{\rho_i, k_i}(Z_i)$; le mécanisme est le même, en plus lourd techniquement.

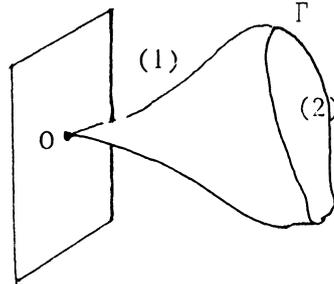
4. Problème de Cauchy d'ordre 2 à données singulières en un point

On suppose que u est une solution réelle $H_{loc}^s(\Omega)$, $s > \frac{n}{2} + 3$, de l'équation (E) lorsque $m = 2$, et que $\gamma_0(u)$ et $\gamma_1(u)$ sont très régulières, sauf en l'origine.

Définition 4.1 : Γ désigne la projection sur Ω de la réunion des bicaractéristiques nulles passant par 0.

On appellera, par abus, Γ le cône d'onde issu de 0.

On sait, d'après les résultats de M. Sablé-Tougeron démontrés dans [13], d'une part, et d'autre part, de ceux démontrés par l'auteur dans [6] et [7], que, localement près de H , la régularité de u est la suivante :



- (1) u est C^∞
- (2) u est H^{3s-s_1}

On cherche à s'affranchir de la limitation à $3s - s_1$ concernant la zone (2), c'est-à-dire à obtenir un comportement des singularités, analogue au cas linéaire.

Lorsque $n = 2$, H. Bahouri et B. Dehman dans [2], et P. Godin dans [3], et le Théorème 1.1, mettent en évidence le comportement linéaire des singularités de u : u est très régulière en dehors de Γ qui est, dans ce cas, la réunion de deux courbes.

Nous supposerons désormais $n \geq 3$. Dans ce cas, M. Beals prouve, dans

[3], l'existence d'une solution u de l'équation $\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{x_i}^2 u = \beta u^3$, avec $\beta \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1})$, telle que, pour $i \in \{0, 1\}$, $\gamma_i u$ soit H^{s-i} , et C^∞ en dehors de l'origine, et telle que u ne soit pas H^{3s+s_2} dans la zone (2)

Il convient donc de faire des hypothèses sur la nature de la singularité des traces de u si l'on veut obtenir un comportement de type linéaire. L'hypothèse que nous ferons ici est que les traces sont conormales par rapport à 0. Plus précisément :

Définition 4.2 : Soit Σ une sous-variété lisse d'un ouvert Ω' de \mathbf{R}^n ; on dit qu'une distribution H^s est conormale (d'ordre k) par rapport à Σ si elle appartient à l'ensemble $H^{s,k}(\Sigma)$ des v dans $H_{\text{loc}}^s(\Omega')$ tels que, si z_1, \dots, z_l sont $l \leq k$ champs de vecteurs tangents à Σ , à coefficients C^∞ , alors $z_1(x, D) \dots z_l(x, D)v \in H_{\text{loc}}^s(\Omega')$.

Remarques :

(i) Si $v \in H^{s,k}(\Sigma)$, alors le front d'onde H^{s+k} de v est inclus dans $N^*\Sigma$, le conormal à Σ .

(ii) Si $\Sigma = \{0\}$, $H^{s,k}(\Sigma)$ est l'ensemble des v telles que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, $x^\alpha v \in H^{s+|\alpha|}$.

Théorème 4.1 : Soit u solution $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ de (E), u réelle, $s > \frac{n}{2} + 8$; si, pour $i \in \{0, 1\}$, $\gamma_i u \in H^{s-i, \alpha}(0)$, alors, localement près de 0, on a :

(i) $\Gamma \setminus \{0\}$ est une hypersurface lisse.

(ii) $u \in H^{s, \alpha}(\Gamma \setminus \{0\})$; en particulier, u est C^∞ en dehors de Γ .

Ce théorème a été démontré par N. Ritter dans [12], lorsque l'équation (E) est semi-linéaire, pour $s > \frac{n}{2} + 1$. L'idée essentielle de la démonstration dans ce cadre est de redresser le cône d'onde Γ en le cône $\Gamma_0 = \{(t, x') / t^2 = |x'|^2\}$ par l'application exponentielle associée à la gerbe des bicaractéristiques, qui est un C^∞ difféomorphisme. Cette technique est typique de l'ordre 2.

Dans le cadre non semi-linéaire, la difficulté provient de ce que l'application exponentielle est a priori peu régulière, et donc $\Gamma \setminus \{0\}$ aussi. Ainsi les champs de vecteurs tangents à $\Gamma \setminus \{0\}$, nuls en 0, que l'on est amené à utiliser sont, a priori, peu réguliers. On démontre pas à pas qu'ils vérifient une hypothèse du type (H_{k-1}) , ce qui permet d'énoncer, dans [8], un théorème plus précis décrivant le cas où $\gamma_i u \in H^{s-j, k}(0)$, $j \in \{0, 1\}$. La démonstration détaillée est faite dans [8].

Bibliographie

[1] S. Alinhac: Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique(1985-1986).

- [2] H. Bahouri et B. Dehman : Propagation des singularités höldériennes de solutions d'équation non linéaire. Preprint Orsay.
- [3] M. Beals : Self spreading and strength of singularities for solutions of semi-linear wave equations. *Annals of Math.* 118 (1983).
- [4] J-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. E.N.S. 4ème série* 14 (1981).
- [5] J-Y. Chemin : Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non semi-linéaires. Preprint Ecole Polytechnique, à paraître au *Duke Math. Journal*.
- [6] J-Y. Chemin : Onde lente et interaction contrôlée pour les équations strictement hyperboliques non linéaires. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique (1986-1987).
- [7] J-Y. Chemin : Calcul symbolique bilinéaire et interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires. Preprint, à paraître au *Bull. Soc. Math. France*.
- [8] J-Y. Chemin : Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point. Preprint de l'Ecole Polytechnique.
- [9] P. Godin : Propagation of C^∞ regularity for fully non linear second order strictly hyperbolic equations in two variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 290 (1985).
- [10] Y. Meyer : Remarque sur un théorème de J. M. Bony. *Supp. Rend. Cir. Math. Palermo* N°1 (1981).
- [11] J. Rauch et M. Reed : Non linear microlocal analysis of semi linear hyperbolic systems in one space dimension. *Duke Math. Journal* 49 (1982).
- [12] N. Ritter : Progressing wave solutions to non linear hyperbolic Cauchy problems. Thèse M.I.T. (1984).
- [13] M. Sablé-Tougeron : Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires. *Ann. Inst. Fourier* 36.1 (1986).

Jean-Yves CHEMIN
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex