

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PATRICK GÉRARD

Régularité de moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A9_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE DE MOYENNES DE SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Patrick GERARD

O. Position du problème.

Dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, on considère un opérateur différentiel (ou pseudodifférentiel classique) $P = P(x, y, D_x, D_y)$, d'ordre m .

Si $u = u(x, y)$ est une solution de l'équation

$$(1) \quad Pu = f,$$

on s'intéresse à la régularité de $v(x) = \int u(x, y) dy$, lorsque cette intégrale est bien définie (par exemple: u est à support compact en y). On s'attend à ce que l'information microlocale apportée par (1), jointe à l'opération d'intégration dans la fibre, permette de gagner de la régularité sur v , par rapport à ce que l'on sait a priori sur u .

De façon précise: existe-t-il $\delta > 0$ tel que l'hypothèse :

$$u \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d) \text{ et } Pu \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d), u \text{ à support compact en } y,$$

$$\text{entraîne : } v = \int u dy \in H^{m-1+\delta}(\mathbb{R}^n) \quad ?$$

Notons que, sous cette forme, le problème est de nature complètement microlocale, et P n'y intervient que par son symbole principal $p = p(x, y, \xi, \eta)$, fonction homogène de degré m sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d)$.

On peut bien sûr donner une version plus intrinsèque du problème en considérant un espace fibré F au-dessus d'une variété X , u étant une distribution-densité sur F , solution d'une équation aux dérivées partielles; la quantité étudiée est alors $v = \pi_* u$, image directe de u par la projection canonique $\pi: F \rightarrow X$.

Nous présentons ici (au §2) une condition suffisante (générique)

sur le symbole p pour que le gain δ soit optimal (pour des opérateurs de type principal du moins) et égal à $1/2$. Pour motiver les hypothèses et orienter éventuellement vers des résultats plus complets, nous rappelons au §1 le cas simple où $P=P(y, D_x)$ est une famille d'opérateurs à coefficients constants en x , le problème ci-dessus étant alors complètement résolu par F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame et R. Sentis dans [5] (cf. aussi [3]). Enfin, au §3, nous montrons sur un exemple simple (équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 d'espace) comment ce type de résultat, convenablement généralisé, peut être appliqué à l'étude des solutions faibles de certaines équations de la cinétique physique.

Remarque: puisque l'on se permet de considérer des opérateurs pseudo-différentiels, on peut évidemment supposer $m=1$, ce que nous ferons désormais.

1. Cas d'une famille d'opérateurs à coefficients constants.

Dans le problème ci-dessus, il semble assez raisonnable de négliger en première approximation la présence de D_y dans l'opérateur P ; en effet, la quantité $\int u dy$ ne dépend (du point de vue des singularités) que du comportement de u près de $\eta=0$. On est ainsi ramené à une famille d'opérateurs $P=P(x, D_x, y)$ dépendant du paramètre y ; le théorème ci-dessous résout complètement le problème lorsque les coefficients de P ne dépendent pas de x .

Théorème. (Golse-Lions-Perthame-Sentis [5]). On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) On a l'implication:

$$(u \in L^2, P(y, D_x)u \in L^2, u \text{ à support compact en } y) \Rightarrow \int u dy \in H^\delta.$$

(ii) $\delta \leq 1$ et, pour tout $R > 0$, il existe une constante $C(R) > 0$ telle que:

$$\lambda \{y, |y| \leq R, |p(y, \xi)| \leq \varepsilon\} \leq C(R) \varepsilon^{2\delta}, \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ uniformément en } \xi \in S^{n-1}$$

On renvoie à [5] ou à [3] pour la démonstration.

Remarques.

1. Le gain de régularité δ est donc d'autant plus grand que les tubes autour de $\{p=0\}$ sont petits relativement à λ . Lorsque p est de type principal réel (non elliptique!), on s'attend donc à ce que la situation la plus favorable soit celle où la variété caractéristique est lisse par rapport à y , auquel cas (ii) est vérifié pour $\delta=1/2$.

2. Une façon rigoureuse de constater que $\delta=1/2$ est le gain optimal dans ce cas est de raisonner comme suit:

par hypothèse, on peut supposer que $\partial_{x_n} p \neq 0$ microlocalement, donc que l'opérateur P est (microlocalement) hyperbolique par rapport à $x_n=0$;

on peut alors résoudre (microlocalement) le problème de Cauchy

$Pu=0$, $u|_{x_n=0} = u_0$, avec $u_0(x',y) = v(x')\psi(y)$, où $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, d'intégrale égale à

1, v étant donnée arbitrairement dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Alors $u \in L^2$, et donc, si p donne lieu à un gain de δ dérivées par moyennisation, on a $\int u dy \in H^\delta$, de trace v sur $x_n=0$, et le théorème de trace pour les espaces de Sobolev impose $\delta \leq 1/2$.

3. Le théorème ci-dessus a été initialement motivé par le cas de l'opérateur de transport $P = \partial_t + y \cdot \partial_x$, qui vérifie (ii) avec $\delta=1/2$. En appliquant la construction ci-dessus à cet opérateur, on retrouve la formule classique de relèvement de la trace de H^s à $H^{s+1/2}$:

$$w(t,x) = \int v(x-ty)\psi(y)dy.$$

4. Si l'on s'intéresse à un résultat analogue dans les autres espaces L^p , on constate qu'il n'y a de régularisation ni dans L^1 ni dans L^∞ (cf. [5]). Les autres cas s'en déduisent par interpolation, et L^2 est donc l'espace où la moyennisation "régularise le mieux".

5. Le théorème ci-dessus admet un certain nombre de généralisations à des familles générales d'opérateurs $P = P(x,y,D_x)$. (cf. [3])

2. Le cas général sous une hypothèse de transversalité.

L'hypothèse de transversalité citée dans la remarque 1 ci-dessus admet une version invariante qui conduit au théorème suivant:

Théorème. Soit $p=p(x,y,\xi,\eta)$ un symbole réel homogène de degré 1 sur $T^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$. On suppose que, sur la variété caractéristique $\{p=0\}$, le champ hamiltonien de p est transversal à la variété $\{\eta=0\}$ des covecteurs horizontaux. Alors, si P est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal p , on a l'implication:

$$(u \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d), Pu \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d), u \text{ à support compact en } y) \Rightarrow \int u dy \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n).$$

Esquisse de la preuve:

a) Réduction microlocale.

Il suffit évidemment d'étudier u près de chaque point $(x_0, y_0, \xi_0, 0)$ caractéristique pour p . On peut donc par exemple supposer que $\partial p / \partial y_1 \neq 0$. Alors $p=e(y_1+a)$, où $e=e(x,y,\xi,\eta)$ est elliptique d'ordre 1, et $a=a(x,y',\xi,\eta)$ est réel d'ordre 0. On est alors ramené à $u \in L^2, (y_1+a(x,y',D_x,D_y))u \in H^1$.

b) Réduction à un problème d'évolution.

Par transformation de Fourier en y_1 , on a:

$$\hat{u} \in L^2, (D_{\eta_1} + A(\eta_1))\hat{u} \in L^2(H^1), \text{ où } \hat{u}(x,y',\eta_1) = \int e^{-iy_1\eta_1} u(x,y) dy_1, \text{ et}$$

$A(\eta_1)=a(x,y',D_x,D_y,\eta_1)$ est une famille régulière et bornée d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0, à symbole principal réel. Alors $\int u dy_1$ n'est autre que $\hat{u}|_{\eta_1=0} = \hat{u}_0$. On procède alors suivant la méthode d'énergie

classique:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_0\|^2 &= 2\operatorname{Im} \int_0 (\wedge^{1/2} D_{\eta_1} \hat{u}, \wedge^{1/2} \hat{u}) d\eta_1 \\ &= 2\operatorname{Im} \int_0 (\wedge (D_{\eta_1} + A) \hat{u}, \hat{u}) d\eta_1 - 2\operatorname{Im} \int_0 (\wedge^{1/2} A \hat{u}, \wedge^{1/2} \hat{u}) d\eta_1, \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant le fait que A est à symbole principal réel.

c) Conclusion.

Par b) $\int u dy_1 \in H^{1/2}(dx dy')$, et est par hypothèse à support compact en y' , donc $\int u dy \in H^{1/2}$, q.e.d.

Remarques.

1) Le fait que p soit réel joue un rôle crucial dans la preuve ci-dessus; l'exemple suivant montre que le théorème précédent est faux pour un symbole complexe:

Notons $P = y \partial_x + i \partial_y$ dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Soit $u(x, y) = 2 \int a(x-x') / (y^2 - 2ix') dx'$. Alors $Pu = 0$, et $\hat{u}(\xi, y) = e^{-y^2 \xi / 2} \hat{a}(\xi) 1_{\{\xi > 0\}}$, d'où l'on déduit que $u \in L^2$ dès que $a \in H^{-1/4}$. Mais $\int \hat{u}(\xi, y) dy = c 1_{\{\xi > 0\}} \hat{a}(\xi) / \xi^{1/2}$ donc $\int u dy \in H^{1/4}$ et pas mieux en général. (tronquer éventuellement u en y si l'on désire que le support en y soit compact).

2) Dans le cas $d=1$ (une seule variable de fibre), l'hypothèse de support compact en y n'est plus nécessaire (moyennant des hypothèses convenables sur le comportement de p à l'infini): on obtient alors un théorème d'existence et de régularité pour la moyenne $\int u dy$, tout-à-fait comparable au théorème de trace pour les solutions d'opérateurs strictement hyperboliques.

3) Le théorème ci-dessus et sa preuve s'étendent immédiatement au cas où P est un opérateur paradifférentiel à régularité lipschitzienne au sens de [1], [4], sous réserves que la factorisation microlocale faite en a) ait lieu avec des symboles e et a qui soient eux-mêmes à régularité lipschitzienne.

3. Un exemple d'application aux équations cinétiques.

Nous allons appliquer les méthodes ci-dessus à l'équation de Vlasov-Poisson en dimension 1 d'espace:

Dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$ on cherche $f = f(t, x, v)$ et $E = E(t, x)$ vérifiant:

$$(1) (\partial_t + v \partial_x + E \partial_v) f = 0; \quad (2) \partial_x E = \int f dv, \text{ avec des données de Cauchy } f_0 \text{ et } E_0$$

Pour une présentation des équations de Vlasov, on renvoie à [2] et à sa bibliographie.

Pour une telle équation, on montre sans difficulté l'existence de solutions faibles avec $f_0 \in L^1$. Le champ E est alors naturellement absolument continu en x . Nous nous proposons ici d'étudier les solutions faibles dans le cadre L^2 , et tout particulièrement la régularité du champ E .

Notations: on pose $H^{s-0} = \bigcap_{\epsilon > 0} H^{s-\epsilon}$; $H_{ul}^s(\mathbb{R}) = \{u \in H_{loc}^s(\mathbb{R}), \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|u\|_{H^s(n, n+1)} < +\infty\}$

Théorème. Si $f_0 \in L^1 \cap L^2$, alors il existe une solution faible (f, E) vérifiant $f \in C_w(\mathbb{R}_t, L^1 \cap L^2)$, $E \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_t, H_{ul}^{3/2-0}(\mathbb{R}_x))$.

De plus, si $vf_0 \in L^1 \cap L^2$, alors $\partial_t E \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_t, H_{ul}^{1/2-0}(\mathbb{R}_x))$.

Esquisse de la preuve: nous montrons comment obtenir les estimations a priori souhaitées de f et de E .

a) La divergence du champ de transport étant nulle, toutes les normes L^p ($1 \leq p \leq \infty$) de f sont conservées au cours du temps. En particulier

$$\|f(t)\|_{L^1} = \text{cste} \text{ et } \|f(t)\|_{L^2} = \text{cste}.$$

b) Pour étudier E , on paralinéarise en x l'équation (1) dans l'esprit de [1]:

$(\partial_t + v\partial_x + T_E \partial_v)f = g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_t, H^{1-\epsilon}(\mathbb{R}_x, H^{-1}(\mathbb{R}_v)))$ pour tout $\epsilon > 0$, la norme de g dans $L^2(0, T; H^{1-\epsilon}(\mathbb{R}_x, H^{-1}(\mathbb{R}_v)))$ étant contrôlée par celle de E dans $L^2(0, T; H_{ul}^{3/2-\epsilon}(\mathbb{R}_x))$ (que nous noterons $\|E\|$). Une fois microlocalisé en (x, v)

près de $\eta=0$ (où η est la variable duale de v), on peut écrire:

$$f \in L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \text{ et } (v + D_x^{-1} D_t + D_x^{-1} T_E D_v)f \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}_v; H^{1-\epsilon}(\mathbb{R}_x)).$$

c) En considérant t comme un paramètre, on peut alors employer la méthode d'énergie en η décrite au §2.b, en utilisant le calcul paradifférentiel de régularité $C^{1-\epsilon}$ de [1]. On obtient:

$$\| \int f dv \|_{L^2(0, T; H^{1/2-\epsilon/2})} \leq C (1 + \|E\|)^{1/2}$$

d) De l'équation de Poisson (2), on déduit: $\|E\| \leq C (1 + \|E\|)^{1/2}$, ce qui

achève la démonstration.

e) Pour estimer $\partial_t E$, il suffit de dériver (2) par rapport au temps et

d'utiliser (1): $\partial_x \partial_t E = -\partial_x \int v f dv$. Par ailleurs (1) donne:

$(\partial_t + v \partial_x + E \partial_v) v f = E f \in L^1 \cap L^2$ d'après ci-dessus; si donc $v f_0 \in L^1 \cap L^2$, il suffit de reprendre les étapes a, b, c, d avec $v f$ au lieu de f . q.e.d.

Remarque:

La nécessité d'introduire ε dans la preuve précédente est technique: elle est à rapprocher du fait classique que le paraproduit par une fonction de $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'opère pas sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, mais envoie cet espace dans H^{-0} . Cela a par exemple pour conséquence que $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une algèbre, mais que $H^{n/2-0}(\mathbb{R}^n)$ en est une. Hormis ce détail, le résultat de régularité de E obtenu ci-dessus est optimal: si en effet on a $E \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_t, H_{u_1}^{3/2+\delta}(\mathbb{R}_x))$ et $\partial_t E \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_t, H_{u_1}^{1/2+\delta}(\mathbb{R}_x))$ avec $\delta \geq 0$, on en déduit $E_0 \in H_{u_1}^{1+\delta}(\mathbb{R}_x)$, donc $\int f_0 dv \in H^\delta(\mathbb{R}_x)$, ce qui nécessite $\delta=0$.

Bibliographie.

- [1] J.-M.BONY: Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations non linéaires. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 14, 1981, pp.209-246.
- [2] P.DEGOND: Régularité de la solution des équations cinétiques en Physique des plasmas. Séminaire Equations aux dérivées partielles 1985-1986, Exposé n°18, Ecole Polytechnique, Paris.
- [3] P.GERARD: Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles. Séminaire Equations aux dérivées partielles 1986-1987, Exposé n°11, Ecole Polytechnique, Paris (à paraître).
- [4] P.GERARD-J.RAUCH: Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires. A paraître aux Annales de

l'Institut Fourier.

[5] F.GOLSE-P.L.LIONS-B.PERTHAME-R.SENTIS: Regularity of the moments of the solution of a transport equation. A paraître au Journal of Functional Analysis.

Patrick GERARD
Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75 230 PARIS cedex 05