Journées Équations aux dérivées partielles

Bernard Helffer
Abderemane Mohamed

Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A4_0>

Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique

par A.Mohamed (d'après Helffer-Mohamed)

§0 Introduction

On considère sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, l'opérateur de Schrodinger avec un champ magnetique $H(\vec{a})+V$: $H(\vec{a})=\sum_{j=1}^{n}(D_j-a_j(x))^2$; $D_j=i^{-1}\partial_{x_j}$ et $i=\sqrt{-1}$.

Le potentiel electrique $V(x)$ ainsi que le potentiel magnetique $\vec{a}(x)$ sont supposes reels: $\vec{a}(x)=(a_1(x),\dots,a_n(x))$.

On supposera que $\vec{a}$ est de classe C^1 et que V est continu et de la forme:

$$(0.1)\quad \begin{cases} V(x)=V_0(x)+\sum_{j=1}^{p}V_j^2(x) \ ; \text{ avec} \\ V_0(x)>-C_0 \ ; \quad (C_0 \text{ constante donnée}). \end{cases}$$

Le champ magnetique sera identifie a la matrice reelle et anti-symetrique $B(x)$:

$$(0.2)\qquad B(x)=[b_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad ; \quad b_{ij}(x)=\partial_{x_j}a_i(x)-\partial_{x_i}a_j(x).$$

La forme variationnel $q_V(\vec{a})$:

$q_V(\vec{a})(u)=((H(\vec{a})+V)u;u)$;

(le produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ est noté $(\,.\, ; \,.\,)$, et la norme associée $\|\,.\,\|$), induit un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, que nous notons encore $H(\vec{a})+V$. L'inegalite:

$$(0.3)\qquad |(H(\vec{a})+V+\lambda)^{-1}f|\leqslant(-\Delta+\lambda)^{-1}|f| \ ; \ \forall f\in L^2(\mathbf{R}^n) \ ;$$

permet de montrer que $H(\vec{a})+V$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ à partir de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, l'ensemble des fonctions indefinement derivables à support compact (cf. [AV.-HE.-SI.]).

Notre objet est de caracteriser le spectre $\sigma(H(\vec{a})+V)$ de $H(\vec{a})+V$, et plus precisement le spectre essentiel $\sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)$.

Comme dans le cas sans champ magnetique l'ellipticite uniforme de $H(\vec{a})$ permet d'etablir l'égalité de Persson.

Théorème 0 (Persson): Soit $E=\operatorname{Inf}\sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)$; alors on a:

$$(0.4)\qquad E=\lim_{R\to+\infty}\operatorname{Inf}\left\{((H(\vec{a})+V)u;u) \ ; \ u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash Q_R), \|u\|=1\right\}$$

(Q_R etant la boule de rayon R centre en zero).

Le cas où $H(\vec{a})+V$ est à résolvante compacte correspond au cas où $E=+\infty$. Ce cas a été beaucoup étudié, on mettait des hypothèses assurant le contrôle de la dérivée de $B(x)$ par $|B(x)|$, et quand $|B(x)|$ tendait vers l'∞ on pouvait conclure en utilisant (0.4). Le résultat le plus récent en ce sens est dû à Iwatsuka ([IWA.]$_2$), (voir aussi [DUF.]) qui montre que si $B(x)$ est de classe C^2 et si :

(0.5) $\quad |B(x)| \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} +\infty$; et

(0.6) $\quad |\nabla B(x)|/|B(x)|^2 \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$;

alors $H(\vec{a})+V$ est à résolvante compacte.

Toutefois dans le cas où $\vec{a}$ et V sont des polynômes, la théorie des groupes de Lie développée par Helffer et Nourrigat ([HE.-NO.]) fournit toute une série d'exemples ne rentrant pas dans ce cadre mais à résolvante compacte.

La caractérisation du spectre essentiel de $H(\vec{a})$ n'a été etudiée que dans le cas de la perturbation du champ nul ou constant (cf [IWA]$_1$ pour le cas $n=2$ et [MOH.] pour le cas général). Notre caractérisation du spectre essentiel donné par le théorème 3, contient les résultats précédents et est, à notre connaissance nouvelle même dans le cas sans champ magnétique.

§1. Enoncé des résultats

Pour caractériser la compacité de la résolvante , on a le théorème:

Théorème 1: Sous la condition (0.1), si on a:

(1.1) $\quad V_0\in C^1$, et $V_j\in C^{r+2}$, $j=1,\dots,p$; et $b_{ij}\in C^{r+1}$,$1\leqslant i<j\leqslant n$;

(r étant un entier $\geqslant 0$)

et s'il existe une constante C_1 telle que l'on ait:

(1.2) $\quad |\partial_x^\beta B(x)|+|\nabla V_0(x)|+\sum_{j=1}^p |\partial_x^\alpha V_j(x)|\leqslant C_1\, m(x)$; $|\alpha|=r+2$ et $|\beta|=r+1$;

avec, $m(x)=1+|V_0(x)|+\sum_{j=1}^p \sum_{|\alpha|=0}^{r+1} |\partial_x^\alpha V_j(x)|+\sum_{|\beta|=0}^{r} |\partial_x^\beta B(x)|$.

Alors, il existe une constante C_2 telle que l'on ait:

(1.3) $\quad \|(m(x))^{2^{-r-1}} u\|^2 \leqslant C_2(q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2)$; $\forall\, u\in D(q_V(\vec{a}))$;

(1.4) $\quad \|(m(x)+V(x))^{2^{-r}} u\|\leqslant C_2(\|(H(\vec{a})+V)u\|+\|u\|)$; $\forall\, u\in D(H(\vec{a})+V)$.

($D(q_V(\vec{a}))$ et $D(H(\vec{a})+V)$ désignent les domaines de $q_V(\vec{a})$ et $H(\vec{a})+V$).

Corollaire 2: Sous les hypothèses du théorème1, et si:

$V(x)+m(x)_{|x|\longrightarrow+\infty} \longrightarrow +\infty$;

Alors $H(\vec{a})+V$ est à résolvante compacte.

On s'intéresse maintenant au cas où les hypothèses du théorème1 ne sont plus satisfaites.

Supposons que:

(1.5) $\quad B(x)\in C^{r+3}$.

Soit $\varphi(x)$ un poids tempéré sur $\mathbf{R}^n$ vérifiant:

$$(1.6)\quad \begin{cases} 1\leqslant\varphi(x)\ ;\ \text{et}\ \ \varphi(x)_{|x|\longrightarrow+\infty}\longrightarrow+\infty \\ \exists\,\rho>0 \text{ et } C_3>0 \text{ tels que: } |x-y|\leqslant\rho\varphi(x)\Rightarrow C_3^{-1}\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\leqslant C_3\varphi(y). \end{cases}$$

On suppose qu'il existe C_4 tel que:

$$(1.7)\quad |\nabla V_0(x)|+\sum_{j=1}^{p}\sum_{|\alpha|=r+2}|\partial_x^\alpha V_j(x)|+\sum_{|\alpha|=r+1}^{r+3}\varphi^{|\alpha|-r-1}(x)|\partial_x^\alpha B(x)|\leqslant C_4\varphi^{-1}(x);$$

Théorème 3: Sous les hypothèses (1.1),(1.5),(1.6) et (1.7), on a:

$\sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)=\overline{S}_\infty$

(S_∞ est défini ci-dessous).

Pour un y fixé on défini les potentiels polynômiaux $\vec{b}_y(x)$ et $V_y(x)$:

$\vec{b}_y(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{r}(\alpha!(2+|\alpha|))^{-1}\,x^\alpha(\partial_x^\alpha B(y)).x$; et

$V_y(x)=V_0(y)+\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{r+1}x^\alpha\partial_x^\alpha V_j(y)/\alpha!\right)^2$.

S_∞ est alors défini par: $S_\infty=\bigcup_{z_\infty\in\Gamma}\sigma(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty})$;

où Γ est l'ensemble des suites $z_\infty=(y_\nu)_\nu$, telles que: $|y_\nu|_{\nu\longrightarrow+\infty}\longrightarrow+\infty$,

$\vec{b}_{y_\nu}(x)\xrightarrow[\nu\to+\infty]{}\vec{b}_{z_\infty}(x)$ et $V_{y_\nu}(x)\xrightarrow[\nu\to+\infty]{}V_{z_\infty}(x)$;

(les convergences étant celles entre polynômes).

Que S_∞ soit un fermé n'est pas évident en dehors du cas $r=0$. Comme application de la théorie des groupes de Lie de [HE.-NO.], nous montrons:

Proposition 4: Si $V_0=0$, alors S_∞ est un fermé.

On peut préciser le résultat de $[IWA.]_2$ en établissant des estimations a priori comme dans le théorème1.

Remarque 5: Sous l'hypothèse (0.5), si $B(x)$ est de classe C^1, et s'il existe δ, $0\leqslant\delta<2$, et une constante C_5 tels que:

(1.8) $|\nabla B(x)|\leqslant C_5|B(x)|^{\delta}$;

Alors il existe C_6 tel que l'on ait:

(1.9) $\|\Phi u\|^2 \leqslant C_6(q_0(\vec{a})(u)+\|u\|^2);\ \forall u\in D(q_0(\vec{a}))$;

et, si $0\leqslant\delta<3/2$, on a en plus:

(1.10) $\|\Phi^2 u\|\leqslant C_6(\|H(\vec{a})u\|+\|u\|);\ \forall u\in D(H(\vec{a}))$

($\Phi(x)=|B(x)|^{1/2}$, si $\delta\leqslant 3/2$, et, $\Phi(x)=|B(x)|^{2-\delta}$, si $3/2\leqslant\delta<2$).

(Quand $\delta\leqslant 3/2$, (1.9) résulte de [DUF.]).

Quand il existe un couple (i,j) tel que: $b_{ij}(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

$H(\vec{a})$ est à resolvante compacte. C'est ce qui se passe quand $n=2$ et que (0.5) est vérifié.

Quand $n>2$ et que (0.5) est vérifié ainsi que (1.8) avec $\delta=2$; il existe un contre-exemple de $[IWA]_2$ où $H(\vec{a})$ n'est plus à resolvante compacte.

Remarque 6: Les résultats ci-dessus sont encore valables si on perturbe V par un potentiel σ-Δ-borné, avec $0\leqslant\sigma<1$.

---

§2 Esquisse de démonstration

+Pour le théorème1, notre démonstration s'inspire de la démonstration de Kohn ([KOH.]) de l'hypoellipticité de l'opérateur de Hörmander somme de carrés de champs de vecteurs.

Pour tout réel s, on considère l'ensemble M^s des fonctions $\ell(x)$ telles qu'il existe une constante C_ℓ de façon à avoir:

$\|m^{s-1}\ell u\|^2\leqslant C_\ell(q_V(\vec{a})(u)+\|u\|^2);\ \forall\ u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

On a: $V\in M^{1/2}$.

La métrique riemannienne g_x est tempérée: $g_x(z)=m^{-2}(x)|z|^2$.

En considérant une partition de l'unité de $\mathbf{R}^n$ associée à un recouvrement localement fini de g-boules de rayon ε assez petit, on peut régulariser m(x) de façon à ce qu'il soit de classe C^2 et que:

(2.1) $\quad |\partial_x^\alpha m(x)| \leqslant Cm(x)$; pour $|\alpha| \leqslant 2$.

On considère $H(\vec{a})+V$ comme une somme de carrés:

$H(\vec{a})+V = V_0 + \sum_{j=1}^{n+p} L_j^2$ avec $L_j = D_j - a_j(x)$, $j=1,\dots,n$ et $L_{n+j} = V_j$.

On vérifie aisément que:

(2.2) $\quad [L_i;L_j] \in M^{1/2}$;

il sufit de remarquer que:

$$\|m^{-1/2}[L_i;L_j]u\|^2 = (L_j u; m^{-1}[L_i;L_j]L_i u) - (L_i u; m^{-1}[L_i;L_j]L_j u)$$
$$+ (L_j u; [L_i; m^{-1}[L_i;L_j]]u) - (L_i u; [L_j; m^{-1}[L_i;L_j]]u);$$

comme $m^{-1}[L_i;L_j]$ est une fonction bornée ainsi que son gradient, on a (2.2).

On montre que:

$$(2.3)\quad \begin{cases} \text{Si } h(x) \in M^s \cap C^2. \text{ et si, } |\partial_x^\alpha h(x)| \leqslant Cm(x); \text{ pour } 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2, \\ \text{Alors, si } r \geqslant 1, \text{ on a: } [L_i;h] \in M^{s/2}, \text{ pour tout i.} \end{cases}$$

Alors (2.2), (2.3) et l'hypothèse (1.2) montrent que:

$$(2.4)\quad \begin{cases} \partial_x^\alpha b_{ij}(x) \in M^{2^{-|\alpha|-1}} & \text{pour } |\alpha| \leqslant r; \\ \partial_x^\alpha V_j(x) \in M^{2^{-|\alpha|}} & \text{pour } j \neq 1,\dots,p \text{ , et } 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r+1. \end{cases}$$

Les injections $M^s \subset M^t$, si $t \leqslant s$, permettent d'avoir (1.3) à partir de (2.4). La démonstration de (1.4) s'obtient à partir de (1.3) en remplaçant dans (1.3) u par $(|V|+m)^{2^{-r-1}} u$.

+Pour le théorème2, l'analogie avec les problèmes d'hypoellipticité traités dans [HE.-NO.] permettent de voir que, dans une g-boule centrée en y de rayon assez petit,(ici $g_x(z) = \varphi^2(x)|z|^2$), et sous une jauge que l'on trouve dans [HE.-NO.], l'opérateur $H(\vec{b}_y)+V_y$ est une approximation de $H(\vec{a})+V$ quand $|y|$ est assez grand.

-Pour établir l'injection: $S_\infty \subset \sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)$,

on part du fait que: si $\lambda \in \sigma(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty})$, alors, pour tout $\varepsilon>0$ fixé ,on peut trouver $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que: $\|(H(\vec{b}_{z_\infty})+V_{z_\infty}-\lambda)u\| \leqslant \varepsilon$ et $\|u\|=1$.

En considérant la suite de fonctions $(u_\nu)_\nu$: $u_\nu(x)=u(x-y_\nu)$ (où y_ν est la suite z_∞) on montre que: $]\lambda-2\varepsilon;\lambda+2\varepsilon[\cap\sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)\neq\emptyset$.

- Pour la démonstration de: $\sigma_{ess}(H(\vec{a})+V)\subseteq\overline{S_\infty}$,

on part d'un $\lambda\notin\overline{S_\infty}$. Le théorème 1 permet de voir que, pour $R>0$ assez grand, il existe $C_R>0$ tel que:

$\|(H(\vec{a})+V-\lambda)u\|\geqslant C_R\|u\|;\ \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\setminus Q_R)$;

ce qui permet de conclure.

+ Pour la remarque 5, on vérifie que la metrique : $g_x(z)=|B(x)|^{2\delta-2}|z|^2$;

est tempérée. Les estimations des: $((b_{ij}/|B|^s)[L_i;L_j]u;u)$, permettent d'etablir (1.9), (on prend $s=1$ ou $s=2\delta-3$ suivant les cas).

L'estimation (1.10) s'obtient comme (1.4) à partir de (1.9), en régularisant au départ $|B(x)|$ de façon à ce que: $|\partial_x^\alpha|B(x)||\leqslant C|B(x)|^{1+|\alpha|(\delta-1)}$; $1\leqslant|\alpha|\leqslant 2$.

Références

[AV.-HE.-SI.] J. Avron, I. Herbst and B. Simon;
Duke Math. J. 45,(1978),p.847-883.

[DUF.] A. Dufresnoy; Duke Math. J. 53,(3),(1983),p.729-734

[HE.-NO.] B. Helffer et J. Nourrigat; Progress in Math. vol.58, Birkhäuser,Boston, (1985).

[HOR.] L. Hörmander; Comm. Pure Appl. Math. 32,(3),(1979),p.359-443

[IWA.] A. Iwatsuka;
1. J. Math. Kyoto Univ. 23,(3),(1983),p.475-480
2. J. Math. Kyoto Univ. 26,(3),(1986),p.357-374

[KOH.] J. J. Kohn; C.I..M.E. (1977),p.91-149

[MOH.] A. Mohamed; à paraitre

[PER.] Y. Persson; Math. Scand. 8(1960),p.143-153

A. MOHAMED
Université de Nantes
Département de Mathématiques
UA 758 CNRS
44072 NANTES Cédex 03 FRANCE