JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

TADATO MATSUZAWA

Hypoellipticité et hyperfonctions

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A15_0>

HYPOELLIPTICITE ET HYPERFONCTIONS

par T. MATSUZAWA

Dans cet exposé, nous allons donner une nouvelle caracterisation des hyperfonctions et quelques applications. Dans ce qui suit, nous allons considérer une hyperfonction comme la valeur initiale de la solution de l'équation de la chaleur. Cette idée est inspirée par la caractérisation de L. Hörmander donnée dans son livre [1], chap. 9.

Commençons par la définition de l'espace des fonctions analytiques près d'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1. Soit K compact dans $\mathbb{R}^n$. On désigne par A(K) l'ensemble des fonctions analytiques près de K, i.e. $\varphi(x) \in A(K)$ si φ est analytique dans un voisinage de K et s'il existe deux constantes C de h positives telles que l'on ait

$$(1) \qquad \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha \varphi_j(x)|}{h^{|\alpha|}\alpha!} \leqslant C.$$

L'espace A(K) est muni de la topologie de convergence $\varphi_j \to o$:

$$(2) \qquad \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \frac{|D^\alpha \varphi_j(x)|}{h^{|\alpha|}\alpha!} \to o\,, j \to \infty$$

pour un h positif qui dépend de la série $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \subset A(K)$.

Cette définition de A(K) a été donnée par M. Martineau [3], 1960-61.

On désigne par A'(K) l'espace dual de A(K) qui peut être considéré comme l'espace des hyperfonctions à support compact dans K. Nous désignons par A l'ensemble des fonctions entières dans C^n.

Avec cette définition nous avons le théorème suivant :

Théorème 1. Soit $u \in A'(K)$. Alors pour tout $k > o$ il existe une constante $C = C(h,u)$ telle que

(3) $\quad |u(\varphi)| \leqslant C \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha}} \dfrac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|} \, \alpha!}, \quad \varphi \in A.$

La condition (3) est équivalente à celle-ci : pour tout voisinage complexe $C^n \supset \omega \supset K$ on a

(4) $\quad |u(\varphi)| \leqslant C_\omega \sup_\omega |\varphi|, \ \varphi \in A.$

Ensuite, on se rappelle le noyau de la chaleur $E(x,t)$:

$$E(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4t) & t > o, \\ o & t < o, \end{cases}$$

<u>Proposition 1.</u> (c.f. [1], Proposition 9.1.2.)
Soit $\varphi \in A$ et soit

$$\varphi_t(x) \int_{R_y^n} E(x-y,t)\, \chi(y)\, \varphi(y)\, dy \ , \ t > o,$$

où $\chi \in C_o^\infty(R^n)$, $\chi = 1$ près de K.

Alors, on a $\varphi_t(x) \to \varphi(x)$ dans A(K) lorsque $t \to o_+$.

On voit aisément que $E(.,t) \in A$ pour tout $t > o$, et pour $u \in A'(K)$ nous posons

(5) $\quad U(x,t) = u_y\,(E\,(x-y,\,t))\ t > o\,,\, x \in \mathbb{R}^n.$

<u>Théorème 2.</u> Soit $u \in A'(K)$. Alors $U(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t)\,;\, x \in \mathbb{R}^n, t > o\}$, et $U(.,t) \in A$ pour tout $t > o$. De plus, $U(x,t)$ satisfait aux conditions suivantes :

(6) $\quad (\partial/_{\partial t} - \Delta)\, U(x,t) = o$ dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$;

Pour tout $\varepsilon > o$, on a

(7) $\quad |U(x,t)| \leqslant C_2\, e^{\varepsilon/t}$ dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$;

Pour tout $\delta > o$ on a

(8) $\quad U(.,t) \to o$ uniformément dans $\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \mathrm{dis}\,(x,K) \geqslant \delta\}$ lorsque $t \to O_+$;

(9) $U(.,t) \to u$ dans $A'(K)$ lorsque $t \to 0_+$, i.e.

(9') $$u(\varphi) = \lim_{t \to 0_+} \int U(x,t)\, \chi(x)\, \varphi(x)\, dx\,,\ \varphi \in A\,,\ \text{où } \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \chi = 1$$

près de K.

Réciproquement, chaque fonction $U(x,t)$ satisfaisant aux conditions (6), (7) et (8) peut être écrite sous la forme (5) avec un unique $u \in A'(K)$.

La démonstration de la partie nécessaire est presque évidente. On y utilise le Théorème 1. Celle de la partie suffisante s'appuie sur la théorie des ultradistributions, [2]. La condition (7) joue le rôle principal dans ce théorème.

Je donnerai quelques commentaires.

(I) Soit $u \in A'(K)$. En notant que

$$E(x-z,t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left[\frac{-(x-z)^2}{4t}\right],\ Z = y + i\eta,$$

et

$$\mathcal{R}e\ -(x-Z)^2 = -(x-y)^2 + \eta^2,$$

on a l'estimation du type (7) par (4) si l'on prend $|\eta| \leq \varepsilon/2$.

(II) Nous posons

$$A'(\mathbb{R}^n) = \bigcup_K A'(K).$$

Si $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors on a $\mu \in A'(\mathbb{R}^n)$ et la condition (7) est remplacée par

(7)* $|U(x,t)| \leq C_N\, t^{-N},\ t > 0.$

(III) Si $\mu \in \mathcal{E}^{\{s\}'}(\mathbb{R}^n)$, $1 < s < \infty$, (c.f. [2]), alors on a $\mu \in A'(\mathbb{R}^n)$ et la condition (7) est remplacée par

$(7)_s$ $|U(x,t)| \leq C_\varepsilon \exp[\varepsilon/t]^{1/2s-1},\ t > 0.$

On a les inclusions

(10) $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}^{\{s\}'}(\mathbb{R}^n) \subset A'(\mathbb{R}^n),\ 1 < s < \infty.$

(IV) Dans le cas $1/2 < s < 1$ dans $(7)_s$, on obtient des ultradistributions hors de l'espace des hyperfonctions. Je donne un exemple :

(11) $\quad u(x,y) = \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \otimes \delta^{(k)}(y)$ dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$.

On a formellement

(12) $\quad (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)\, u(x,y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$.

Si l'on pose

$$\chi(x) \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & x < 0 \text{ et } x > 1 \end{cases}$$

alors $U(x,y,t) = (\chi u)_{\xi,}\ \ E(x-\xi, y-\ ,t)$ satisfait à la condition

(13) $\quad |U(x,y,t)| \leqslant C \exp(c/t),\ t > o$

pour certains constantes C et $c > o$.

D'autre part, on voit aisément que l'estimation du type (7) n'est pas possible. Cet exemple montre que l'espace des hyperfonctions est le plus grand espace d'ultra-distributions où les opérateurs elliptiques sont hypoeeliptiques analytiques.

Finalement je donnerai une autre application. Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. L'espace des hyperfonctions générales est défini par

(14) $\quad B(\Omega) = A'(\Omega) \,/\, A'(\partial\Omega)$.

Soit $a(x,\xi) \in S^m_{1,0}\ (\Omega \times \mathbb{R}^n\ )$ un symbole satisfaisant aux conditions suivantes :

(H-1) $\quad |a(x,\xi)| \geqslant c,\ x \in \Omega,\ |\xi| \geqslant B,$

(H-2) $\quad |a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\beta)| \leqslant C_o\, C_1^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!\, \beta!\, (|+|\xi|)^{m-|\alpha|},\ |\xi| \geqslant B|\alpha|.$

Alors, l'opérateur pseudodifférentiel $a(x,D)$ est bien défini de $A'(K)$ dans $B(\Omega)$ pour chaque K compact de Ω et $a(x,D)$ est hypoelliptique analytique, i.e. si $u \in A'(K)$, $K \subset\subset \Omega$, et $a(x,D)u$ est analytique dans $\Omega' \subset \Omega$, alors u est aussi analytique dans Ω'. (c.f. [4]).

[1] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators, I, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, Tokyo, 1983.

[2] H. Komatsu : Ultradistributions, I ; Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20 (1973), p. 25 - 105.

[3] A. Martineau : Les hyperfonctions de M. Sato, Sém. Bourbaki 1960 - 1961, Exposé N° 214.

[4] T. Matsuzawa : A calculus approach to hyperfunctions, Submitted to Nagoya Math. J.