Journées Équations aux dérivées partielles

Alain Bachelot

Équipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A13_0>

Equipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles

Alain BACHELOT

I - Introduction

On considère un système différentiel $\mathcal{L}$ de la forme

$$\mathcal{L} = I\,\partial_t + \Sigma_{i=1}^{n} A_i\,\partial_{x_i}\,,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

où les A_i sont les matrices $N \times N$ à coefficients constants. Pour $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on note

$$A(\xi) = \Sigma_{i=1}^{n} \xi_i A_i$$

On fait sur $\mathcal{L}$ l'hypothèse d'hyperbolicité suivante :

(H) Pour tout ξ la matrice $A(\xi)$ est semblable à une matrice diagonale réelle et il existe une constante $M_0 > 0$, telle que pour tout ξ et tout projecteur propre $P_j(\xi)$ de $A(\xi)$ on ait

$$|P_j(\xi)| \leqslant M_0$$

(H) est vérifiée en particulier si les matrices A_i sont hermitiennes on si les valeurs propres de $A(\xi)$ sont de multiplicité constante pour $\xi \neq 0$. Une solution libre d'énergie finie Ψ vérifie

$$\mathcal{L}\,\Psi = 0\,,\quad \Psi(0,.) = \Psi_0(.) \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N,$$

et (H) implique l'inégalité d'énergie

$$\|\Psi(t)\|_{L^2} \leqslant N\,M_0\,\|\Psi_0\|_{L^2}$$

Soit f une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^N$; on pose

$$l(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Psi(t,x), \Psi(t,x))\,dx$$

On dira que le système $\mathcal{L}$ admet une équipartition de l'énergie relativement à f, si, pour toute solution libre d'énergie finie Ψ, I(t) tend vers o quand |t| tend vers l'infini.

Le problème fondamental est de déterminer toutes les formes possibles d'équipartition de l'énergie. On montre ici qu'une condition nécessaire et suffisante sur f est la condition algébrique de <u>comptabilité</u> de la forme f avec le système $\mathcal{L}$. Cette notion a été introduite par B. Hanouzet et J.L. Joly [9] [10] qui ont établi en particulier que $|f(\Psi(t,x), \Psi(t,x))| = O(|t|^{-n})$ si et seulement si f est compatible.

<u>Définition</u> On dit qu'une forme sesquilinéaire f sur C^N est (presque partout) compatible avec le système $\mathcal{L}$, si pour (presque) tout ξ non nul de $\mathbb{R}^n$, les vecteurs propres de $A(\xi)$ sont isotropes pour f.

Une forme presque partout compatible n'est pas nécessairement compatible ; par exemple si $A(\xi) = \begin{matrix} C_1.\xi & o \\ o & C_2.\xi \end{matrix}$ où $(\vec{C}_1, \vec{C}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, il n'existe pas de forme compatible mais les matrices $\begin{pmatrix} o & \beta \\ \alpha & o \end{pmatrix}$ définissent des formes presque partout compatibles. Par contre, si la multiplicité des valeurs propres de $A(\xi)$ est constante pour $\xi \neq o$, une forme presque partout compatible est compatible.

<u>II - Principaux résultats</u>

On exprime I(t) à l'aide de l'identité de Parseval et des coordonnées polaires $\xi = \rho\,\omega$, $o < \rho$, $\omega \in S^{n-1}$.

$$(1) \qquad I(t) = c \int_{S^{n-1}} \mathcal{J}(t,\omega)\,d\omega$$

$$(2) \quad \mathcal{J}(t,\omega) = \sum_{j,h} \int_o^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_j(\omega))} f(P_j(\omega)\Psi_o(\rho\omega), P_h(\omega)\Psi_o(\rho\omega))\rho^{n-1}\,d\rho,$$

où $\lambda_j(\omega)$ et $P_j(\omega)$ désignent respectivement les valeurs propres et les projecteurs propres de $A(\omega)$. Si f est compatible, il ne figure dans la somme (2) que les termes pour lesquels $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_h(\omega)$; le lemme de Riemann Lebesgue implique alors que $\mathcal{J}(t,\omega)$ tend vers o quant $|t|$ tend vers l'infini et on applique le théorème de convergence dominée à (1).

Théorème 1 Pour que I(t) tende vers zéro pour toute solution libre d'énergie finie, quand $|t|$ tend vers l'infini, il faut et il suffit que f soit presque partout compatible avec le système $\mathcal{L}$.

On a un résultat analogue pour les systèmes $\mathcal{L}_1 = I\partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_{x_j} + i B$, où A_j et B sont des matrices hermitiennes N x N.

Si le système est fortement hyperbolique (i.e. pour tout ξ non nul les valeurs propres de $A(\xi)$ sont de multiplicité constante) on peut appliquer à (2) le théorème de la phase stationnaire et préciser la rapidité de la décroissance de I(t).

Théorème 2 On suppose que $\mathcal{L}$ est fortement hyperbolique. Soient une forme sesquilinéaire compatible f et Ψ_0 dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$. Alors

$$|d_t^k \; I(t)| = O(|t|^{-n-k}), \; |t| \to \infty$$

et si de plus o n'est pas dans le support de Ψ_0, I(t) appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a un énoncé semblable si $\Psi_0 \in (C^{\ell}_{compact}(\mathbb{R}^n))^N, l > \frac{n}{2}$ et $k < 2l-n$.

Si la dimension de l'espace est impaire on peut exprimer I(t) par une intégrale de Fourier en ρ en remplaçant (2) par

$$3)\; I(t,\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j,h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\rho(\lambda_j(\omega)-\lambda_j(\omega))} f(P_j(\omega)\Psi_0(\rho\omega), P_h(\omega)\Psi_0(\rho\omega))\rho^{n-1}\, d\rho$$

On applique alors le théorème de Paley-Wiener à (3).

Théorème 3 (Equipartition en temps fini)

On suppose que le système $\mathcal{L}$ est fortement hyperbolique et que n est impair. Soient f une forme sesquilinéaire compatible et Ψ_0 dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ de support contenu dans $\{x/|x| \leqslant R\}$. Alors I (t) est nul pour $|t| \geqslant 2R\,\delta^{-1}$ où

$$\delta = \operatorname{Inf}\,\{|\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega)|\,;\lambda_j \neq \lambda_h,\ \omega \in S^{n-1}\}$$

Plus précisément il y a équipartition en temps fini pour la composante Ψ de vélocité $|\lambda_j|$ pour $|t| \geqslant R\,\lambda_j^{-i}$ où $\lambda_j = \operatorname{Inf}\,\{|\lambda_j(\omega)|\,,\ \omega \in S^{n-1}\}$.

Les hypothèses du théorèmes 3 sont suffisantes mais non nécessaires. Si $A(\xi)$ est la matrice diagonale $(\delta_{ij} < C_i, \xi>)$ où $C_i \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, et $f_k(u,v) = \sum a_{ij}^k\, u_i\, v_j$, $a_{ij}^k = o$ si $C_i = C_j$, f_k est presque partout compatible mais n'est pas compatible et néanmoins $I(t) = o$ pour $|t| \geqslant 2R\delta^{-1}$. Les formes f_k apparaissent dans le système de la théorie cinétique des gaz, $\mathcal{L}\ \Psi = (f_1(\Psi,\Psi,...,f_n(\Psi,\Psi))$, sous le nom d'opérateurs de collision.

Remarque Dans les applications il arrive que les vecteurs de Ker $A(\xi)$ ne soient pas isotropes pour f. Les résultats précédents restent valables pour les solutions sans partie stationnaire, i.e. telles que pour tout $\xi \neq o$ la projection de $\Psi_0(\xi)$ sur Ker $A(\xi)$ soit nulle.

III - Applications et exemples

De nombreux cas particuliers d'équipartition de l'énergie pour des systèmes de la Physique ont été étudiés mais un procédé systématique de détermination de toutes les formes possibles d'équipartition ne semble pas connu. Le théorème 1 donne une telle méthode, générale et très simple : il suffit de vérifier la condition algébrique de compatibilité ; de plus le théorème 3 assure qu'en dimension impaire, l'équipartition a lieu en temps fini.

1°) <u>Système de Maxwell</u> Le champ électromagnétique (E,H) dans le vide vérifie les équations

$$\partial_t E = \mathrm{rot}\, H,\ \partial_t H = -\mathrm{rot}\, E$$

(4) $\quad \mathrm{div}\, E = \mathrm{div}\, H = o$

En tenant compte grace à (4) de la remarque, on peut appliquer les théorèmes 1,2,3 aux formes $|E|^2 - |H|^2$ et $<E,H>$ et obtenir l'équipartition entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique, et l'orthogonalité des deux champs ([4]).

2°) <u>Système de Dirac</u> $\partial_t \Psi + (\alpha . \nabla - i\beta M)\Psi = o$; les formes compatibles sont de la forme

$$c(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_3|^2 - |\Psi_4|^2) + C'(\Psi_1 \Psi_3 + \Psi_2 \Psi_4 - \Psi_3 \Psi_1 - \Psi_4 \Psi_2)$$

avec c=o si M=o. L'équipartition pour c=1, c'=o exprime l'équipartition de la charge ([3]).

3°) <u>Un système n'admettant pas d'équipartition : l'équation des neutrinos</u>

$\partial_t \Psi + A(d)\Psi = o$; $A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\,\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix}$; la seule forme compatible est la forme nulle.

4°) <u>Equations des ondes et de Klein Gordon</u> $\quad u + m^2 u = o$. On obtient l'équipartition de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en appliquant le théorème 1 à

$$I(t) \int |u_t|^2 - |\nabla_x u|^2 - m^2 |u|^2 dx \text{ ; si } m = o$$

on peut appliquer le théorème 3 ([6]).

5°) <u>Equations du second ordre</u> Soit Ψ la solution de $\partial_t^2 \Psi + (A(d))^2 \Psi = o$,

$A(d) = \Sigma_{i=1}^n A_i \partial_{x_i}$, $\Psi(o,x) = \Psi_o(x)$, $\Psi_t(o,x) = \Psi_1(x)$; $A(d)\Psi_o, \Psi_1 \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$,

où les A_i sont des matrices hermitiennes $N \times N$ à coefficients constants. L'énergie cinétique K et l'énergie potentielle P sont données par

$$K(t) = \int |\partial_t \Psi(t,x)|^2 dx \,,\; P(t) = \int |A(d)\Psi(t,x)|^2 dx.$$

<u>Théorème 4</u> On suppose que pour presque tout ξ, Ker $A(\xi) = o$. Alors en notant $E = K(t) + P(t)$ l'énergie conservée on a

$$\lim_{|t| \to \infty} K(t) = \lim_{|t| \to \infty} P(t) = \frac{1}{2} E.$$

On suppose de plus que n est impair et que les valeurs propres $\lambda_j(\xi)$ de $A(\xi)$ sont de multiplicité constante et vérifient

(5) $\quad o < \lambda_1(\xi) < \ldots < \lambda_p(\xi) \,,\; |\xi| = 1.$

Alors si le support des données initiales est dans $\{x/|x| \leqslant R\}$, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique d'une solution de vélocité $|\lambda_j|$ sont égales pour $|t| \geqslant R\,\lambda_j^{-1}$, où $\lambda_j = \text{Inf}\,\{\lambda_j(\omega)\,;\, \omega \in S^{n-1}\}$.

On a un résultat analogue pour les équations $\partial_t^2\, \Psi - (A(d)+iB)^2\, \Psi = o$ ou $\partial_t^2 \Psi - (A(d))^2 + B^2 \Psi = o$ où B est une matrice hermitienne. Le théorème 4 s'appliquent à deux équations d'ondes vérifiant (5) :

6°) <u>Ondes élastiques en milieu unisotrope</u> [5]. Avec les notations usuelles le champ de déplacement dans un milieu homogène élastique anisotrope obéit à l'équation

$$\partial_t^2 u_i - \rho^{-1}\; C_{ijk\ell}\; \partial^2_{x_j x_\ell}\; u_k = o \,,\; i = 1,2,3.$$

Le théorème 4 implique l'équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$K(t) = \sum_{i=1}^{3} \int \rho\, |\partial_t\, u_i|^2 dx \,,\; P(t) = \sum_{i=1}^{3} \int C_{ijk\ell}\, \partial_{x_j} u_i\, \partial_{x_\ell} u_k\, dx.$$

7°) <u>Ondes magnétoélastiques</u> [4]. Le vecteur déplacement u pour un milieu conducteur isotrope homogène élastique soumis à un champ magnétique constant, uniforme H, vérifie

$$\rho\, \partial_t^2 u = \mu^2 \nabla^2 u + (\lambda+\mu)\, \nabla\, (\nabla . u) + \frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \times h) \times H,$$

où

$$h = \nabla \times (u \times H).$$

Il y a équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle totale somme de l'energie potentielle mécanique et de l'énergie d'intéraction magnétique :

$$K(t) = \rho \int |\partial_t u|^2\, dx\ ;\ P(t) = \int \mu |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)\, |\nabla \circ u|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi}\, |h|^2\, dx.$$

Indications bibliographiques

[1] A. BACHELOT , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, série I, n°11, (1985) p. 573-576 et publication d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux I n° 8517.

[2] D.G. COSTA, J. Math. Anal. App. 58 (1977) p. 56-62.

[3] D.G. COSTA, W.A. STRAUSS, Quant. Appl. Math. 39 (1981), p. 351-361.

[4] G. DASSIOS, Quant. Appl. Math. 37 (4) (1980) p. 465-469 et 39 (4) (1982) p. 479-490.

[5] G. DASSIOS, M. GRILLAKIS, J. Diff. Equ. 51 (1984) p. 408-418..

[6] R.J. DUFFIN, J. Math. Anal. Appl., 32 (1970) p. 386-391.

[7] J.A. GOLDSTEIN, S.J. ROSENCRANS, J. Diff. Equ. 36 (1980) p. 66-73.

[8] J.A. GOLDSTEIN, J.T. SANDEFUR, Jr. in Nonlinear Partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar Volume III, H. Brezis, J.L. Lions (Eds), Pitman, 1982, p. 209-219.

[9] B. HANOUZET, J.L. JOLY, Research Notes in Math. 89, Pitman, 1983, p. 208-217.

[10] B. HANOUZET, J.L. JOLY, C.R. Acad. Sci. Paris, 301 série I, (1985) p. 491-494 et Publications d'Analyse appliquée de l'Université de Bordeaux I, n° 8516, à paraître aux Annales de l'Institut Poincaré (Analyse non linéaire).

UNIVERSITE DE BORDEAUX - UER de Mathématiques et Informatique - Unité associé au CNRS n°226 - Département de Mathématiques Appliqués
351 Cours de la Libération - 33405 TALENCE Cédex
