JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MONIQUE DAUGE
DIDIER ROBERT

Formule de Weyl pour une classe d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre négatif sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A4_0>

FORMULE DE WEYL POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS D'ORDRE NEGATIF SUR $L^2(\mathbb{R}^n)$

par

Monique DAUGE et Didier ROBERT

§1 Introduction

Il s'agit de déterminer l'asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres d'opérateurs pseudo-différentiels compacts auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les résultats correspondants sont bien connus pour une classe d'opérateurs à résolvante compacte ([TU-SU], [RO], [HO2], [HE-RO2]). Cette classe vérifie des conditions d'hypoellipticité globale qui impliquent en particulier que les opérateurs sont semi-bornés, donc, n'ont qu'un nombre fini de valeurs propres négatives. En inversant ce genre d'opérateur, on obtient des opérateurs compacts d'un type particulier, à symbole positif à l'infini.

Ici, au contraire, nous nous intéressons à des opérateurs dont le symbole peut changer de signe à l'infini, et ainsi, admettent éventuellement une infinité de valeurs propres négatives, ou positives. Dans cette voie, nous améliorons d'une certaine façon les résultats de [BI-SO].

Ces auteurs considèrent une classe d'opérateurs à symboles $a(x,\xi)$ homogènes (ou quasi-homogènes) d'ordre $\sigma < 0$ en variable de fréquence ξ, peu réguliers en variable d'espace $x \in \mathbb{R}^n$, mais plus décroissants en x (on va préciser plus loin). L'opérateur $A = \mathrm{Op}\, a$ admet une suite décroissante de valeurs propres positives $\lambda_j^+(A)$ et une suite croissante de valeurs propres négatives $\lambda_j^-(A)$, qui, toutes deux, tendent vers 0. Il y a donc, en fait, deux fonctions de comptage, pour $\lambda > 0$:

$$N_\pm(\lambda\ ;\ A) = \#\{j \ /\ \pm\lambda_j^\pm(A) \geqslant \lambda\}$$

[BI-SO] obtient l'équivalent :

$$N_\pm(\lambda\ ;\ A) \sim \lambda^{n/\sigma}\,\gamma_\pm(a) \tag{1.1}$$

où

$$\gamma_\pm = \frac{(2\Pi)^{-n}}{n} \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} (a^\pm(x,\xi))^{-n/\sigma}\, dx\, d\xi \tag{1.2}$$

Dans ce travail, nous élargissons le cadre de [BI-SO] (nous ne supposons plus l'homogénéité) et nous démontrons une estimation avec reste.

§2 Résultats

Nous utilisons le formalisme de [BE] et [HO1]. Les classes de symboles sont définies à l'aide de fonctions poids $\phi, \varphi, m : \mathbb{R}^{2n} \to]0,+\infty[$. Nous rappelons les définitions suivantes :

(2.1) m est dite <u>(ϕ,φ)-continue</u> si $\exists C_0, C_1, C'_1 > 0$ tels que :

$|y|\ \phi(x,\xi) + |\eta|\ \varphi(x,\xi) \leqslant C_0\ \phi\varphi(x,\xi)$

entraîne : $C'_1\ m(x,\xi) \leqslant m(x+y,\xi+\eta) \leqslant C_1\ m(x,\xi)$

(2.2) m est dite <u>(ϕ,φ)-tempérée</u> si, de plus, $\exists C, M > 0$:

$m(x+y,\xi+\eta) \leqslant C m(x,\xi)\ (1+|y|\ \phi(x,\xi) + |\eta|\ \varphi(x,\xi))^M$

La classe de symboles $S(m\ ;\ \phi,\varphi)$ est définie par : $a \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$ si pour tous multi-indices $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$:

$$|\partial_\xi^\alpha\ \partial_x^\beta\ a| \leqslant C_{\alpha\beta}\ m\ \phi^{-|\alpha|}\ \varphi^{-|\beta|}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H) $\begin{cases} \phi^{-1},\ \varphi^{-1} \text{ sont bornés, } (\phi,\varphi)\text{-continus, et } (1,1)\text{-tempérés} \\ \exists\ \varepsilon_0 > 0,\ C > 0 : (1+|x|+|\xi|)^{\varepsilon_0} \leqslant C(\phi\varphi)(x,\xi) \end{cases}$

(P) m est (ϕ,φ)-tempéré et $m \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$

(N) $\exists K, K' > 0,\ \gamma,\gamma' > 0 \qquad K'\ m^{\gamma'} < (\phi\varphi)^{-1} < K\ m^{\gamma}$

Enfin, soit $a \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$ un symbole réel. (H) et (N) impliquent que a est " d'ordre négatif ". a n'est pas assujéti à la condition de positivité (P) et peut donc changer de signe. Soit :

$$A = Op^W a \qquad \text{(quantification de Weyl)}$$

i.e :

$$Au(x) = \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\ a\left(\frac{x+y}{2},\ \xi\right)\ u(y)\ dy\ d\!\!\!{}^-\xi$$

A est compact auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\lambda_j^{\pm}(A)$ et $N_{\pm}(\lambda\ ;\ A)$ sont définis comme au §1.

La formule de Weyl classique établit un lien entre $N(\lambda)$ et la fonction de volume du symbole. Ici, nous introduisons deux fonctions de volume :

$$V_{\pm}(\lambda\ ;\ a) = \int_{\pm a \geqslant \lambda} dx\ d\!\!\!{}^-\xi\ , \qquad \lambda > 0.$$

Pour ces fonctions, nous avons besoin du contrôle suivant de la dérivée : soit f une fonction décroissante : $]0,+\infty[\ \to [0,+\infty[$; on dit que f vérifie la <u>propriété (T)</u> s'il existe λ_0, γ_1, $\gamma_2 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]0,\lambda_0] \\ \gamma_1\ f(\lambda) \leqslant -\lambda f'(\lambda) \leqslant \gamma_2\ f(\lambda) \end{cases}$$

<u>(2.3) Théorème</u>

Sous les hypothèses (H), (P) et (N), soit $a \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$ un symbole réel et $A = Op^W a$. On suppose de plus que les fonctions $V_+(\bullet\ ;\ m)$, $V_+(\bullet\ ;\ a)$ et $V_-(\bullet\ ;\ a)$ vérifient (T). Alors, il existe $\zeta > 0$ tel que :

(1) $N_+(\lambda\ ;\ A) = V_+(\lambda\ ;\ a) + O(\lambda^{\zeta}\ V(\lambda\ ;\ m))$, quand $\lambda \to 0_+$

(2) Si, de plus, $V_+(\lambda\ ;\ m) = O(V_+(\lambda\ ;\ a))$, alors :

(2.4) $$N_+(\lambda\ ;\ A) = V_+(\lambda\ ;\ a)\,(1+O(\lambda^{\zeta})),\quad \lambda \to 0_+$$

et : $$\lambda_j^+(A) = \Lambda^+(j\ ;\ a)\,(1+O(j^{-\zeta})),\quad j \to +\infty$$

où $\Lambda^+(t\ ;\ a)$ est la fonction inverse de $V_+(.\ ;\ a)$, qui est bien définie pour t assez grand.

Nous avons les énoncés correspondants pour N_- et V_- .

(2.5) Remarques

(1) Une condition du type (T) sur les volumes se retrouve dans [TU-SU].

(2) Si $a = a_0 + a_1$ avec $a_1 \in S(m(\phi\varphi)^{-\varepsilon}\ ;\ \phi,\varphi)$ et $\varepsilon > 0$, $V_\pm(\lambda\ ;\ a)$ peut être remplacé par $V_\pm(\lambda\ ;\ a_0)$.

§3 Exemples

Les fonctions de volume définies par des symboles homogènes ou quasi-homogènes, soit par rapport à toutes les variables, soit par rapport à un groupe de variables donnant le comportement dominant, vérifient la condition (T).

3.A : Homogénéité dominante.

$a = a_0 + a_1$ où a_0 est homogène en ξ de degré $\sigma < 0$, pour $|\xi| \geq 1/2$ et il existe $s < \sigma$ tel que :

(i) $\partial_x^\alpha\, a_0(x,\xi) \leq C_\alpha(1+|x|)^{s-|\alpha|}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|=1$

(ii) $\partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta\, a_1(x,\xi) \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|)^{s-|\alpha|}\,(1+|\xi|)^{s-|\beta|}$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Nous pouvons appliquer le théorème (2.3) avec

$\phi(x,\xi) = (1+|\xi|)$, $\varphi(x,\xi) = (1+|x|)$, $m(x,\xi) = (1+|x|^2)^{s/2}\,(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}$.

$\gamma_\pm(a_0)$ étant défini comme en (1.2), nous obtenons une amélioration de (1.1) :

(3.1) $$N_\pm(\lambda\ ;\ A) = \lambda^{n/\sigma}[\gamma_\pm(a_0) + O(\lambda^{\zeta})],\qquad \lambda \to 0_+$$

Notons que la condition (i) sur a_0 , avec $s < \sigma$, assure l'intégrabilité en x de $(a_0^\pm(x,\xi))^{-n/\sigma}$.

D'autre part, les conditions de décroissance en x imposées par [BI-SO] sont plus fortes que les nôtres:

si $\sigma \leq -n$, $s = -\infty$

si $\sigma > -n/2$, $s < -n/2$

3.B : Deux homogénéités égales

$a(x,\xi) = b(x)\, c(\xi)$ où b et c sont homogènes de degré $\sigma < 0$ en dehors de la boule de rayon 1/2. Nous obtenons :

(3.2) $$N_{\pm}(\lambda\ ;\ A) = \lambda^{n/\sigma}[\gamma_{\pm}(b,c)\ \mathrm{Log}\ \frac{1}{\lambda} + \delta_{\pm}(b,c) + 0(\lambda^{\zeta})]$$

où :

$$\gamma_{\pm}(b,c) = \frac{(2\Pi)^{-n}}{n|\sigma|} \int_{S^{n-1}} b^{\pm}(\tilde{x})^{-n/\sigma}\, d\tilde{x} \int_{S^{n-1}} c^{\pm}(\tilde{\xi})^{-n/\sigma}\, d\tilde{\xi}$$

et $\delta_{\pm}(b,c)$ se calcule aussi explicitement en fonction de b et c. Notons que a ne peut pas se ramener au cas d'une fonction homogène en (x,ξ) de degré 2σ en dehors d'un voisinage de 0.

3.C : Homogénéité globale

$\omega = (x,\xi)$: pour $|\omega| \geqslant 1/2$, $a(\omega) = |\omega|^{2\sigma} a(\omega/|\omega|)$. Alors :

(3.3) $$N_{\pm}(\lambda\ ;\ A) = \lambda^{n/\sigma}(\gamma_{\pm} + 0(\lambda^{\zeta}))$$

où :

$$\gamma_{\pm} = \frac{(2\Pi)^{-n}}{2n} \int_{S^{2n-1}} a^{\pm}(\tilde{\omega})^{-n/\sigma}\, d\tilde{\omega}$$

Dans (3.3), il n'apparaît pas de terme logarithmique.

(3.2) et (3.3) n'entrent pas dans le cadre de [BI-SO].

3.D : Eventuellement non homogène

La condition (T) sera vérifiée pour $V_{\pm}(\bullet,a)$ avec $a \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$ s'il existe un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^{2n}$ tel que :

$$\exists\ \eta_1,\eta_2 > 0 \qquad \eta_1\, a \leqslant \langle X,\nabla a\rangle \leqslant \eta_2\, a \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}$$
$$\exists\ \delta_2,\delta_2 > 0 \qquad \delta_1 \leqslant -\operatorname{div} X \leqslant \delta_2 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}.$$

§4 Applications et extensions

4.A : Schrödinger

Notre résultat s'applique à des opérateurs A provenant d'opérateurs de Schrödinger (principe de Birman-Schwinger).

$$A = (-\Delta+E)^{\sigma/2}\, V(-\Delta+E)^{\sigma/2}$$

avec $E > 0$, $\sigma < 0$ et V tel que, avec $s < 0$:

$$|\partial^{\alpha} V(x)| \leqslant C_{\alpha}(1+|x|)^{2s-|\alpha|}$$

Si $s < \sigma$, cela entre dans le cadre du 3.A. Si $s > \sigma$, selon 3.D, on fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe C, C' > 0, $k_1,\dots,k_n > 0$ et $R > 0$ tels que :

$$C'\, V(x) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} k_i\, x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \leqslant C\, V(x) \qquad \text{pour } |x| \geqslant R$$

Cela permet de déterminer l'asymptotique des solutions g du problème, à $E > 0$ fixé :

$$(\Delta+gV)\Psi = E\Psi, \quad \Psi \neq 0 \quad \text{et} \quad \Psi \in D(\Delta) \cap D(V)$$

dont on démontre qu'il a deux suites de solutions $g_j^{\pm}(E)$ positive et négative, chacune étant soit finie, soit non bornée.

4.B : Equation $L\Psi = \lambda B\Psi$

où, grosso modo, $L = Op^W \ell$ et $B = Op^W b$ avec L positif inversible et $a = b/\ell$ vérifie les hypothèses du théorème (2.3). On obtient alors l'asymptotique des " valeurs propres " λ, qui forment deux suites, chacune étant finie ou non bornée,grâce à l'étude du problème équivalent :

$$C \circ B \circ C\, \Psi = \frac{1}{\lambda}\, \Psi \quad \text{avec } C = L^{-1/2}\ .$$

4.C : Extension

Notre résultat s'étend à des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés compactes et nous permettra une étude asymptotique des décalages de phase en théorie de la diffusion.

§5 Preuve du résultat principal

Dans ce paragraphe et le suivant, nous indiquons l'enchaînement des principaux arguments aboutissant à la preuve de (2.3).

La première idée est de faire du calcul fonctionnel : comme $N_+(\lambda\ ;\ A) = \mathrm{Tr}\ \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty[}(A)$, on voudrait approximer $\mathbb{1}_{[\lambda,+\infty[}$ par des fonctions régulières s'approchant de plus en plus de la fonction caractéristique quand $\lambda \to 0$. Mais, ainsi, les dérivées de telles fonctions sont des puissances négatives de λ et cela aboutit à des estimations pour le reste que nous ne savons pas utiliser. Par contre ce processus fonctionne bien pour des opérateurs pseudo-différentiels hypoelliptiques (voir §6), ce qui permet d'aboutir, par inversion, à l'estimation suivante, du type de Hörmander, pour un inverse d'opérateur " globalement hypoelliptique " .

(5.1) Proposition

Soit b un poids vérifiant (P) et (N) ; nous avons en particulier :

$$(\phi\varphi)^{-1} \leqslant K(b)\, b^{\gamma}$$

et il existe $b_1 \in S(m(\phi\varphi)^{-1}\ ;\ \phi,\varphi)$ tel que $B_0 := Op^W(b+b_1)$ soit positif. Alors, pour $0 < \theta < \gamma/2$ et $\lambda \leqslant 1/2$, nous avons :

$$|N_+(\lambda\ ;\ B_0) - V_+(\lambda\ ;\ b)| \leqslant (2+C_1\, \lambda^{\theta})\, [V(\lambda-\lambda^{1+\theta}\ ;\ b) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta}\ ;\ b)] + C_2$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de K(b) et d'un nombre fini de semi-normes de b et b_1 dans leurs espaces de symboles (la dépendance est polynômiale).

La deuxième idée est de se ramener à ce cas à l'aide d'une régularisation hypoelliptique (s'inspirant en cela d'une remarque de G. Grubb dans [GR]).

Etudions le cas de $N_+(\lambda\ ;\ A)$. Soit χ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\chi(\lambda) = 0$ si $\lambda \leqslant 1$ et $\chi(\lambda) = 1$ si $\lambda \geqslant 2$. Pour $\varepsilon > 0$, posons :

$$a_\varepsilon = a\, \chi(a/\varepsilon m) + \varepsilon m[1-\chi(a/\varepsilon m)].$$

Ainsi :

(5.2) $\quad a_\varepsilon \geqslant \varepsilon m$ et $a_\varepsilon \in S(m\ ;\ \phi,\varphi)$

(5.1) pourra donc s'appliquer à a_ε. D'autre part :

(5.3) $\quad a_\varepsilon = a$ dans la région $\{a \geqslant 2\ \varepsilon m\}$

(5.4) $\quad a \leqslant a_\varepsilon + \varepsilon m$.

Donc (a_ε) est une bonne approximation de a quand $\varepsilon \to 0$ dans la zone où a est positif. Par contre, dans la zone où a est négatif, on s'écarte beaucoup. Ainsi, on va tirer de cette approximation :

(5.5) $\quad N_+(\lambda\ ;\ A) \leqslant V_+(\lambda\ ;\ a) + 0(\lambda^\zeta\ V_+(\lambda\ ;\ m))$

et non l'inégalité inverse. Comme on obtient de même l'inégalité (5.5) pour N_- et V_-, il suffit, pour compléter la preuve de (2.3) de prouver l'inégalité inverse pour les sommes $N_+ + N_-$, $V_+ + V_-$:

(5.6) $\quad (V_+ + V_-)(\lambda\ ;\ a) \leqslant (N_+ + N_-)(\lambda\ ;\ A) + 0(\lambda^\zeta\ V_+(\lambda\ ;\ m))$

L'avantage est que, dans (5.6), tout se passe comme si on avait affaire à un opérateur positif : la régularisation approxime l'opérateur partout et un raisonnement analogue à celui fait pour (5.5) permet d'aboutir à (5.6). Indiquons donc la manière de déduire (5.5) de (5.1).

Comme $a_\varepsilon \geqslant \varepsilon m > 0$, $\sqrt{a_\varepsilon} \in S(\sqrt{m}\ ;\ \phi,\varphi)$ et il existe $d_{1,\varepsilon} \in S(m(\phi\varphi)^{-1}\ ;\ \phi,\varphi)$ tel que :

$$\mathrm{Op}^W\ a_\varepsilon + \mathrm{Op}^W\ d_{1,\varepsilon} = (\mathrm{Op}^W\ \sqrt{a_\varepsilon})^2 > 0.$$

Ainsi, en notant $b_\varepsilon = a_\varepsilon + d_{1,\varepsilon}$, $B_\varepsilon := \mathrm{Op}^W\ b_\varepsilon$ est positif et a pour " symbole principal " a_ε. On peut lui appliquer (5.1), qui donne :

(5.7) $\quad N_+(\lambda\ ;\ B_\varepsilon) \leqslant V(\lambda\ ;\ a_\varepsilon) + (2+C_1(\varepsilon)\,\lambda^\theta)\,[V(\lambda-\lambda^{1+\theta}\ ;\ a_\varepsilon) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta}\ ;\ a_\varepsilon)] + C_2(\varepsilon)$

où les $C_j(\varepsilon)$ ont un comportement <u>polynômial</u> en ε^{-1}.

Il faut relier $V_+(\lambda\ ;\ a_\varepsilon)$ à $V_+(\lambda\ ;\ a)$. Dans la zone où a est positif, $|a-a_\varepsilon| \leqslant \varepsilon m$ et ailleurs, $a_\varepsilon \leqslant \varepsilon m$. C'est pourquoi on peut montrer que, pour un $\gamma_0 > 0$ convenable :

$$|V_+(\lambda\ ;\ a_\varepsilon) - V(\lambda\ ;\ a)| \leqslant C\ \varepsilon^{\gamma_0}\ V_+(\lambda\ ;\ m)$$

Cette inégalité permet de remplacer $V_+(\bullet,a_\varepsilon)$ par $V_+(\bullet,a)$ dans (5.7), avec l'erreur $\varepsilon^{\gamma_0}\ V_+(\lambda\ ;\ m)$.

La propriété (T) sur $V_+(.,a)$ permet la majoration :

$$\begin{aligned}|V(\lambda-\lambda^{1+\theta}\ ;\ a) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta}\ ;\ a)| &\leqslant C\ \lambda^\theta\ V(\lambda\ ;\ a)\\ &\leqslant C\ \lambda^\theta\ V(\lambda\ ;\ m)\end{aligned}$$

De tout cela on tire que :

(5.8) $\quad N_+(\lambda\ ;\ B_\varepsilon) \leqslant V_+(\lambda\ ;\ a) + C(1+C_1(\varepsilon)\,\lambda^\theta)\,(\varepsilon^{\gamma_0} + \lambda^\theta)\ .\ V(\lambda\ ;\ m) + C_2(\varepsilon)$

Noter que l'on utilise la propriété (T) sur $V_+(\bullet,a)$ et non sur $V_+(\bullet,a_\varepsilon)$ (qui n'a pas de raison de la vérifier).

Maintenant, on établit que $N_+(\lambda\ ;\ A)$ est majoré par $N_+(\lambda\ ;\ B_\varepsilon)$ modulo une erreur convenable.

Grâce à (5.4), on a :

$$0 < \varepsilon m \leqslant a_\varepsilon + 2\varepsilon m - a,$$

d'où l'on déduit comme précédemment qu'il existe $d_{2,\varepsilon} \in S(m(\phi\varphi)^{-1} ; \phi,\varphi)$ tel que :

(5.9) $$0 < A_\varepsilon + 2\varepsilon M - A + D_{2,\varepsilon}$$

où les majuscules (M) désignent les opérateurs dont le symbole de Weyl est la minuscule correspondante (m).

En reprenant la définition de $b_\varepsilon = a_\varepsilon + d_{1,\varepsilon}$ et en posant $d_\varepsilon = d_{2,\varepsilon} - d_{1,\varepsilon}$, (5.9) donne que :

$$A \lesssim B_\varepsilon + 2\varepsilon M + D_\varepsilon$$

donc :

(5.10) $$N_+(\lambda ; A) \leqslant N_+(\lambda ; B_\varepsilon + 2\varepsilon M + D_\varepsilon) \ .$$

Pour pouvoir passer de la somme à chacun de ses composants, on utilise l'inégalité suivante, de type Weyl-Ky Fan : $\forall \eta \in [0,1]$:

(5.11) $$N_+(\lambda ; A + B) \leqslant N_+(\lambda\,\eta ; A) + N_+(\lambda(1 - \eta) ; B)$$

qui se démontre par une caractérisation du type de Ky Fan pour les valeurs propres positives d'un opérateur auto-adjoint.

Pour étudier les contributions de $2\varepsilon M$ et D_ε (erreur) on remarque que si f vérifie la propriété (T), on obtient par intégration, pour $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_0$:

(5.12) $$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\gamma_1} \leqslant \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \leqslant \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\gamma_2}$$

On en déduit immédiatement que, avec (5.1) :

(5.13) $$N_+(\lambda ; 2\varepsilon M) \leqslant C\,\varepsilon^{\gamma_1}\, V(\lambda ; m)$$

Grâce à l'hypothèse (N) sur m, on obtient que $d_\varepsilon \in S(m^{1+\gamma} ; \phi,\varphi)$; on en déduit que :

(5.14) $$N_+(\lambda ; D_\varepsilon) \leqslant C'_0(\varepsilon)\, V_+(\lambda ; m^{1+\gamma}) \leqslant C_0(\varepsilon)\,\lambda^\tau\, V(\lambda ; m) \ .$$

avec $\tau = \gamma_1\,\gamma(1+\gamma)^{-1}$ et $C_0(\varepsilon)$ polynômial en ε^{-1}.

De (5.13) et (5.14), avec (5.11) pour $\eta = 1/2$, on déduit :

(5.15) $$N_+(\lambda ; 2\varepsilon M + D_\varepsilon) \leqslant C(\varepsilon^{\gamma_1} + \lambda^\tau\, C_0(\varepsilon))\, V(\lambda ; m)$$

Or, avec (5.10) et (5.11) :

$$N_+(\lambda ; A) \lesssim N_+(\lambda(1-\eta) ; B_\varepsilon) + N_+(\lambda\,\eta ; 2\varepsilon M + D_\varepsilon).$$

On prend $\eta = \varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$ sera choisi ensuite. (5.15) et (5.12) donnent :

$$N_+(\lambda\,\eta ; 2\varepsilon M + D_\varepsilon) \leqslant C(\varepsilon^{\gamma_1} + \lambda^\tau\,\varepsilon^{\alpha\tau}\, C_0(\varepsilon))\,\varepsilon^{-\alpha\gamma_2}\, V(\lambda ; m) \ .$$

On choisit α tel que $\gamma_1 - \alpha\,\gamma_2 \equiv \gamma_3 > 0$. Ainsi (5.8) et les dernières inégalités donnent :

$$N_+(\lambda\ ;\ A) \leqslant V_+(\lambda\ ;\ a) + C(\varepsilon^{\gamma_0} + \varepsilon^{\gamma_3} + C_1(\varepsilon)\,\lambda^{\theta} + C_3(\varepsilon)\,\lambda^{\tau})\ .\ V(\lambda\ ;\ m) + C_2(\varepsilon).$$

Or, comme $Km^{\gamma} \geqslant (\phi\varphi)^{-1}$, il existe $\tau' > 0$ tel que :

$$V(\lambda\ ;\ m) \geqslant C\,\lambda^{-\tau'} \qquad \text{(avec } C > 0).$$

Donc, avec $\omega = \inf(\theta,\tau,\tau')$, $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$ et $\gamma_4 = \inf(\gamma_0,\gamma_3)$, on obtient :

$$N_+(\lambda\ ;\ A) \leqslant V_+(\lambda\ ;\ a) + C(\varepsilon^{\gamma_4} + C_4(\varepsilon)\,\lambda^{\omega})\ V(\lambda\ ;\ m)$$

Comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $C_4(\varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-N}$ pour ε assez petit, en choisissant $\varepsilon = \lambda^{\beta}$ avec $\beta = \omega(\gamma_4 + N)^{-1}$ on obtient (5.5) avec $\zeta = \gamma_4\,\beta$.

§6 Formule de Weyl et calcul fonctionnel pour des opérateurs hypoelliptiques.

Dans (5.1), B est l'inverse d'un opérateur $P = Op^W\,p$. A un terme d'ordre inférieur près, on se retrouve dans la situation où $p \in S(p\ ;\ \phi,\varphi)$ et p vérifie l'inverse de la condition (N), à savoir :

(S) $\qquad \exists\, C,C' > 0,\ \exists\, \delta,\delta' > 0 : Cp^{\delta} \leqslant \phi\varphi \leqslant C'\,p^{\delta'}$

On pose :

$$\tilde{N}(\lambda\ ;\ P) = \#\,\{j \in \mathbb{N}\ /\ \lambda_j(P) \leqslant \lambda\}$$
$$\tilde{V}(\lambda\ ;\ p) = \int_{p \leqslant \lambda} dx\, d\xi$$

Nous allons voir qu'on attache au couple (ϕ,φ) un réel ρ, qui sous l'hypothèse (H) peut être pris égal à 2, et qui, si de plus $\phi = \varphi$, peut être pris égal à 3/2. Ceci dit, on a :

(6.1) Théorème

$\forall\ \theta \in\,]0, \frac{\delta}{\rho}[\ ,\ \exists\ C_1\ ,\ C_2$ ne dépendant que d'un nombre fini de semi-normes de p tels que, $\forall\ \lambda > 0$:

$$|\tilde{N}(\lambda\ ;\ P) - \tilde{V}(\lambda\ ;\ p)| \leqslant (2 + C_1\,\lambda^{3\theta - 2\delta})\,[\tilde{V}(\lambda + \lambda^{1-\theta}\ ;\ p) - \tilde{V}(\lambda - \lambda^{1-\theta}\ ;\ p)] + C_2\ .$$

Remarquons que si $\phi = \varphi$, nous atteignons la même limite que Hörmander [HO2] : $\theta \leqslant 2\,\delta/3$, sous des hypothèses qui sont à peu près celles de Tulovskiǐ-Šubin [TU-SU] (qui arrivent à $\theta \leqslant \delta/2$).

(6.1) se démontre en évaluant Tr $f_{\lambda,\theta}(P)$ où $f_{\lambda,\theta}$ vaut 1 pour $\mu \leqslant \lambda - \lambda^{1-\theta}$ et 0 pour $\mu \geqslant \lambda + \lambda^{1-\theta}$; $f_{\lambda,\theta}$ est C^{∞} et $|(\mu\,\partial_{\mu})^k\, f_{\lambda,\theta}| \leqslant C_k\,\lambda^{\theta k}$. On suppose pour simplifier que $f_{\lambda,\theta} = 0$ si $\mu \leqslant 1$. Nous utilisons alors le résultat suivant :

(6.2) Proposition

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nulle au voisinage de 0. f(P) est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est approximé par $\sum_j p_{f,j}$ où :

$$p_{f,0} = f(p),\ p_{f,1} = 0,\ p_{f,j} = \sum_{2 \leqslant k \leqslant [3j/2]} \frac{d_{jk}}{k!} f^{(k)}(p)$$

où les d_{jk} sont des fonctions polynômiales universelles de p et de ses dérivées (cf [HE-RO1]). Voici l'estimation du reste :

$\exists N_1, N_2 > 0,\ \forall N \geqslant N_1,\ \exists C(p,N)$ tel que avec $K(N) := [\delta(N-N_1)]$:

$$\| f(P) - Op^W(\sum_{j=0}^{N} p_{f,j})\|_{Tr} \leqslant C(p,N) \int_0^{+\infty} \lambda^{-K(N)-1/2} |(\lambda\, \partial_\lambda)^{\rho N+1+N_2} f(\lambda)|\, d\lambda \tag{6.3}$$

C(p,N) ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de p.

En appliquant (6.2) quand $f = f_{\lambda,\theta}$, nous obtenons que :

(i) $p_{f,0}$ donne $\tilde{V}(\lambda\ ;\ p)$ modulo l'erreur $W_{\lambda,\theta} = V(\lambda+\lambda^{1-\theta}\ ;\ p) - V(\lambda-\lambda^{1-\theta}\ ;\ p)$

(ii) pour $j \geqslant 1$, $p_{f,j}$ donne une contribution majorée par $\lambda^{(3\theta-2\delta)j/2}\, W_{\lambda,\theta}$. Comme $3\theta-2\delta < 0$, la plus grande est pour j = 2.

(iii) le reste à l'ordre N est un $O(\lambda^{N(\rho\theta-\delta)+\delta_0})$, d'où la condition $\rho\theta < \delta$.

(6.2) se démontre par un procédé de calcul fonctionnel utilisé dans [HE-RO1], dont les étapes sont : construction d'une paramétrix, calcul fonctionnel holomorphe : puissances complexes de l'opérateur, transformation de Mellin.

La limitation $k \leqslant [3j/2]$ dans l'expression de $p_{f,j}$ vient d'une étude affinée des d_{jk} : ce phénomène est spécifique à la quantification de Weyl - en général, on obtient $k \leqslant 2j$.

Le réel ρ apparaît dès la construction de la paramétrix, dans la composition de celle-ci avec l'opérateur (P-z) : il provient d'une estimation précisée du reste dans la formule de composition de deux opérateurs pseudo-différentiels de symboles a_1 et a_2 avec $a_i \in S(m_i\ ;\ \phi,\varphi)$. Les semi-normes du reste à l'ordre N dans l'espace $S(m_1 m_2(\phi\varphi)^{-N}\ ;\ \phi,\varphi)$ s'estiment à l'aide des semi-normes des symboles, avec l'ordre limité à ρN pour l'un et $\rho' N$ pour l'autre ($\rho' > \rho$).
Dans la composition de la paramétrix avec (P-z), ce dernier ne fait rien perdre. Par contre, les semi-normes d'ordre ρN sur la paramétrix aboutissent à la dérivée d'ordre ρN sur f dans (6.3).

Les résultats exposés ici ont été annoncés dans la note C.R. Acad. Sc. Paris 302, Série I, (5) 175-178 (1986). Une rédaction détaillée va paraître dans les Proceedings de " Topics in pseudo-differential operators " à Oberwolfach (Lecture Notes Springer). Elle est également parue dans le Séminaire E.D.P, 1984-85 de Nantes.

REFERENCES

[BE] R. BEALS :
A general calculus of pseudodifferential operators.
Duke Math. J. 42, 1-42 (1975)

[BI-SO] M.S. BIRMAN, M.Z. SOLOMJAK :
Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic-homogeneous symbols. Vestnik Leningrad Univ. Math. 10 (1982) 237-247 et 12 (1980) 155-161

[GR] G. GRUBB :
Singular Green operators and their spectral asymptotics. Duke Mathematical Journal 51 (3) (1984) 477-528

[HE-RO1] B. HELFFER, D. ROBERT :
Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles. Journal of Functionnal Analysis 53 (3) (1983) 246-268

[HE-RO2] B. HELFFER, D. ROBERT :
Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$. Comm. in P.D.E 7 (7) 795-882 (1982)

[HO1] L. HÖRMANDER :
The Weyl Calculus of pseudodifferential operators. CPAM 32, 359-443 (1979)

[HO2] L. HÖRMANDER :
On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudo-differential operators in $\mathbb{R}^n$. Arkiv för Mathematik 17 (2) (1979) 297-313

[RO] D. ROBERT :
Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels. Comm. in Partial Differential Equations 3 (9) (1978) 755-826

[TU-SU] V.N. TULOVSKIĬ, M.A. ŠUBIN :
On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudo-differential operators in $\mathbb{R}^n$. Math. USSR Sbornik 21 (4) (1973) 565-583