JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HANOUZET
JEAN-LUC JOLY

Formes bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique et problème de Cauchy

Journées Équations aux dérivées partielles, nº 1 (1985), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985___1_A6_0>

FORMES BILINEAIRES COMPATIBLES AVEC UN SYSTEME HYPERBOLIQUE ET PROBLEME DE CAUCHY

B.HANOUZET et J.L.JOLY.

On s'intéresse au problème de Cauchy pour un système hyperbolique semi-linéaire de la forme :

$$(0) \qquad \mathcal{L}u \equiv I\,\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} A_i\,\partial_{x_i} u = q(u)$$

où $\qquad A_i \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$

$\qquad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \longrightarrow \mathbb{C}^N$

$\qquad q : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$

et on suppose que chaque composante de q est un polynôme homogène de degré 2.

Dans la première partie, en liaison avec le comportement asymptotique de $q(u)(t,x)$ quand $|t|$ tend vers l'infini et u est une solution libre de (0), on définit des formes bilinéaires compatibles avec l'opérateur $\mathcal{L}$.

Dans la deuxième partie on étudie plus particulièrement le cas de l'opérateur des ondes : on montre que, dans certains cas, le problème de Cauchy pour (0) n'admet pas de solutions régulières globales quand le deuxième membre dans (0) n'est pas compatible avec l'opérateur $\mathcal{L}$.

On se contente ici de présenter les résultats. Pour les démonstrations on renvoie à [5] dans lequel on trouvera aussi des résultats d'explosion pour quelques systèmes.

I. - Formes bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique.

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel de la forme :

$$\mathcal{L} = I\,\partial_t + \sum_{i=1}^{n} A_i\,\partial_{x_i}$$

et on suppose que $\mathcal{L}$ est hyperbolique c'est-à-dire que la matrice

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i$$

se diagonalise sous la forme

$$(1) \qquad A(\xi) = \sum_{k=1}^{p} C_k(\xi)\, \pi_k(\xi)$$

avec $p \leq N$, p indépendant de $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $C_k(\xi) \in \mathbb{R}$, $\pi_k(\xi) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ vérifiant

$$(2\text{-a}) \qquad \pi_k(\xi)\, \pi_\ell(\xi) = \delta_{k\ell}\pi_k(\xi), \; I = \sum_{k=1}^{p} \pi_k(\xi) \;;$$

$$(2\text{-b}) \qquad C_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{R}), \; \pi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathcal{M}_N(\mathbb{C}));$$

$$(2\text{-c}) \qquad C_k \neq C_\ell \quad \text{si} \quad k \neq \ell \, .$$

Remarquons que le rang de chaque projecteur π_k est alors constant car il est s.c.i. en vertu de (2-b) et parce que la somme des rangs vaut N d'après (2-a). Remarquons aussi que (2-c) signifie qu'il existe $\xi \neq 0$ tel que $C_k(\xi) \neq C_\ell(\xi)$ et que par conséquent l'entier p qui figure dans (1) est minimum.

Si de plus $\mathcal{L}$ vérifie

$$(3) \qquad C_1(\xi) > C_2(\xi) \dots > C_p(\xi) \qquad \xi \neq 0$$

on dit que $\mathcal{L}$ est fortement hyperbolique. Dans ce cas les p valeurs propres distinctes ont une multiplicité constante.

Soit $\varphi \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$; la solution du problème de Cauchy

$$(4) \qquad \mathcal{L}\, u = 0 \;\; ; \; u\,(0,x) = \varphi(x) \; ,$$

s'écrit
$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{p} u_k(t,x)$$

avec :

$$u_k(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\langle x,\xi\rangle - t\, C_k(\xi))}\, \pi_k(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Soit q une forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$; à (u,v) couple de solutions de (4) correspondant aux conditions initiales φ et ψ dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$, la forme q associe la fonction q(u,v) définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$q(u,v)(t,x) = \sum_{k,\ell=1}^{p} q(u_k(t,x),\ v_\ell(t,x))$$

avec

(5-a) $$q(u_k(t,x),v_\ell(t,x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\phi_{k\ell}(t,x,\xi,\eta)} q(\pi_k(\xi)\hat{\varphi}(\xi),\pi_\ell(\eta)\hat{\Psi}(\eta))d\xi d\eta$$

(5-b) $$\Phi_{k\ell}(t,x,\xi,\eta) = \langle x,\xi+\eta\rangle - t(C_k(\xi)+ C_\ell(\eta)).$$

Le comportement asymptotique de $q(u,v)(t,x)$ quand $|t| \longrightarrow \infty$ dépend alors des ensembles critiques des phases $\Phi_{k\ell}$. Si on s'intéresse au comportement ponctuel c'est-à-dire à

$$\|q(u,v)\ (t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

l'ensemble critique qui intervient est :

$$\begin{aligned} S_1^{k\ell} &= \{(\xi,\eta) \neq 0 : \exists (t,x) \text{ tel que } \nabla_{\xi\eta}\ \Phi_{k\ell} = 0\} \\ &= \{(\xi,\eta) \neq 0 \ ; \nabla C_k(\xi) = \nabla C_\ell(\eta)\} \end{aligned}$$

Si on s'intéresse au comportement de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(u,v)\ (t,x)dx$$

l'ensemble critique qui intervient est alors

$$\begin{aligned} S_2^{k\ell} &= \{(\xi,\eta) \neq 0; \exists (t,x) \text{ tel que } \nabla_{x\xi\eta}\ \Phi_{k\ell} = 0\} \\ &= \{(\xi,\eta) \neq 0; \ \xi+\eta = 0,\ \nabla C_k(\xi) = \nabla C_\ell(\eta)\} \end{aligned}$$

D'après (5-a) le comportement asymptotique (ponctuel ou intégral) de $q(u,v)$ sera a priori meilleur si q vérifie la propriété suivante

$$(C_i) \quad \forall k, \forall \ell, \forall(\xi,\eta) \in S_i^{k\ell};\ q(\pi_k(\xi),\ \pi_\ell(\xi)) = 0$$

pour $i = 1$ ou $i = 2$, auquel cas on dit que <u>q est compatible avec le système $\mathfrak{L}$</u> (au sens C_1 ou C_2). Bien sur, la compatibilité au sens C_1 implique la compatibilité au sens C_2. Si $\mathfrak{L}$ est fortement hyperbolique la compatibilité au sens C_2 équivaut à : q vérifie :

$$(C_3) \qquad \forall\ k,\ \forall\ \xi \neq 0,\ q(\pi_k(\xi),\ \pi_k(\xi)) = 0$$

Dans le cas de la forte hyperbolicité la condition (C_3) équivaut à l'isotropie, pour q, des vecteurs propres de $A(\xi)$, $\xi \neq 0$. Dans le cas général où $A(\xi)$ vérifie (1) cette condition est moins restrictive comme le montre l'exemple 2 ci après où ces différentes notions de compatibilité coïncident .

On a aussi coïncidence de ces différentes notions dans le cas usuel suivant :

Théorème I.1.

On suppose $\mathcal{L}$ fortement hyperbolique et

(6-a) $\forall\, \xi \neq 0, \ \forall\, k, \ C_k(\xi) \neq 0$

(6-b) $\forall\, k \ , \ \forall\, \xi \neq 0$, rang $(\text{Hess } C_k(\xi)) = n-1$

Alors q est compatible avec $\mathcal{L}$ au sens C_1, C_2 ou C_3 si et seulement si les vecteurs propres de $A(\xi), \xi \neq 0$, sont des vecteurs isotropes de q.

Dans le cas d'un système différentiel du premier ordre à coefficients constants

$$A(\partial) = \sum_{i=1}^{n} A_i \,\partial_{x_i} \ , \ A_i \in \mathcal{M}_{N\times M}\,(\mathbb{C})$$

la notion de forme quadratique compatible a déjà été utilisé par TARTAR [15] et MURAT [12] pour établir des propriétés de compacité par compensation. Dans ce cas on dit que q est compatible avec le système si le noyau de $A(\xi)$, $\xi \neq 0$, est formé de vecteurs isotropes de q. Sous cette même condition HANOUZET et JOLY [6] , [7] ont montré qu'une forme compatible avec un système permettait de définir une application $(u,v) \longrightarrow q(u,v)$ continue de

$$\{u \in (H^s_{loc})^N \ , \ A(\partial)\, u \in (H^t_{loc})^M\}^{\,2}$$

dans un espace de Sobolev convenable, et ceci même pour des valeurs strictement négatives de s. Ce dernier type de résultat a ensuite été généralisé aux espaces de Sobolev H^s_p , aux espaces de Besov...(voir BACHELOT [1]) ainsi que pour des systèmes à coefficients variables (HANOUZET [4])

Dans la cas d'un système strictement hyperbolique un premier exemple de comportement asymptotique est donné par HANOUZET ET JOLY [7] . En utilisant la méthode de la phase stationnaire on obtient le résultat suivant :

Théorème I.2.

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur fortement hyperbolique vérifiant (6-a-b) et q compatible avec $\mathcal{L}$. Soit u et v deux solutions libres pour les données initiales φ et Ψ dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$ telles que $0 \notin \mathrm{Supp}\,\hat{\varphi}$, $0 \notin \mathrm{Supp}\,\hat{\Psi}$. Alors :

(7) $$q(u,v) = 0\,(|t|^{-n}),\ |t| \longrightarrow \infty \quad .$$

On peut voir aussi que la condition (7), vérifiée pour tout paquet d'ondes régulier, est nécessaire à la compatibilité.

Des exemples de comportement asymptotique de type intégral sont donnés par BACHELOT [2] dans l'étude de l'équirépartition d'énergie pour un système hyperbolique hermitien. La notion de compatibilité s'avère le bon outil pour obtenir l'équirépartition d'énergie par une méthode générale et unifiée. Donnons un exemple de résultat.

Théorème I.3. (BACHELOT)

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur hyperbolique hermitien, q une forme sesquilinéaire compatible avec $\mathcal{L}$ (il suffit de supposer que p.p.en ξ , les vecteurs propres de $A(\xi)$ sont isotropes pour q) u une solution libre d'énergie finie alors

$$\int q(u,u)\ (t,x)dx \longrightarrow 0 \quad |t| \longrightarrow \infty$$

Il semble que la compatibilité de q avec $\mathcal{L}$ devrait jouer un rôle dans l'obtention de solutions globales du problème de Cauchy (0) et dans le problème de Scattering associé . Donnons deux exemples de cette situation.

Exemple 1

On consière le problème de Cauchy

$$(8)\qquad \begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = a(u_t^2 - |\nabla_x u|^2) \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \Psi(x) \end{cases}$$

le problème (8) est du type (0) en ∇u et on vérifie que

$$q(\nabla u) = a(u_t^2 - |\nabla_x u|^2)$$

est la seule forme quadratique compatible avec l'opérateur des ondes $\Box$. Une remarque de NIRENBERG (voir KLAINERMAN [10] ou JOHN [9]) permet de démontrer l'existence de solutions globales de (8) pour les données φ et ψ régulières, suffisamment petites dans des normes convenables. Il suffit de poser $v = e^{-au} - 1$ et (8) se transforme en un problème linéaire :

$$\begin{cases} \Box v = 0 \\ v(0,x) = e^{-a\varphi(x)} - 1 \\ v_t(0,x) = -a\Psi(x)e^{-a\varphi(x)} \end{cases}$$

Exemple 2

On suppose que l'opérateur $\mathcal{L}$ est découplé, $A(\xi)$ étant de la forme

$$(9)\qquad A(\xi) = \begin{pmatrix} \langle C_1,\xi \rangle & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \langle C_N,\xi \rangle \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, quoique $\mathcal{L}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème I.1 pour $n \geq 2$, on a cependant l'équivalence des compatibilités au sens C_1, C_2 ou C_3. Dans le cas $n = 1$, TARTAR [16] et dans le cas $n \geq 2$, ILLNER [8] et HAMDACHE [3] ont prouvé que le problème de Cauchy (0) possédait, pour q compatible avec $\mathcal{L}$, une solution globale pourvu que la donnée initiale soit petite dans une norme convenable et qu'il existait un opérateur de diffusion.

Dans le deuxième paragraphe nous allons voir que la compatibilité est en quelque sorte nécessaire à l'obtention de solutions globales pour $\Box u = q(\nabla u)$.

II. - Explosion pour des équations des ondes semi-linéaires avec second membre non compatible.

On étudie dans $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t \geq 0\}$.

Le problème de Cauchy pour l'équation semi-linéaire :

(10-a) $\qquad \Box u = q(\nabla u) \equiv a\, u_t^r + b(\nabla_x u)^r$

avec des conditions initiales de la forme :

$$(1\,\text{-b}) \qquad \begin{cases} u(0,x) = \varepsilon \varphi(x)\ , \\ u_t(0,x) = \varepsilon \Psi(x)\ , \qquad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

La question est alors la suivante : φ et Ψ étant deux fonctions régulières données, existe-t-il $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le problème (10-a-b) admette une solution globale ?

La réponse est positive si $n \geq 6$. KLAINERMAN [10] puis KLAINERMAN et PONCE [11] et SHATAH [13] ont montré, dans le cadre plus général d'un second membre à croissance quadratique, que pour φ et Ψ régulières (par exemple φ et Ψ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$...) et pour ε assez petit le problème de Cauchy (10-a-b) admet une solution unique globale régulière et bornée. Ainsi qu'on l'a vu à exemple 1, la réponse est encore positive en dimension quelconque quand $q(\nabla u)$ est compatible avec l'opérateur $\Box$, c'est-à-dire quand $b = -a$, et la solution u est régulière et bornée. Le résultat suivant montre que $b = -a$ est le seul cas permettant d'obtenir cette conclusion quand la dimension d'espace est égale à 1 ou 3.

Théorème II. 1. $n = 1$ ou $n = 3$.

On suppose que $q(\nabla u)$ n'est pas compatible avec $\Box$ c'est à dire $a + b \neq 0$. Alors il existe des fonctions régulières φ et Ψ, à support compact, telles que, quel que soit $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy (10-a-b) n'admette pas de solution globale régulière $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Ce théorème est une conséquence simple des théorèmes II.2 et II.3 ci après qui le précisent et sont, en fait plus maniables car les résultats sont énoncés sous forme de comparaison.

Supposons φ et Ψ régulières et

(11) $\quad \operatorname{supp} \varphi, \operatorname{supp} \Psi \subset \{ x \,;\, |x| \leq R \}$

alors la solution locale régulière de (10-a-b) définie sur $[0,T[\times \mathbb{R}^n$ vérifie

$$u \in C^2([0,T[\times \mathbb{R}^n)$$

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < T \;, \quad |x| \geq R + t$$

Ainsi, si $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ est solution globale de (10-a-b) avec φ et ψ vérifiant (11) on a

(12) $\quad \operatorname{supp} u \subset \{(t,x),\ t \geq 0,\ |x| \leq R + t\}$.

Enonçons maintenant les théorèmes de comparaison qui conduisent au théorème II.1.

Théorème II. 2 $n = 1$ ou $n = 3$.

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ telle que

(13-a) $\quad \Box u \geq a\, u_t^2 + b|\nabla_x u|^2,\ a > 0,\ b > -a$,

(13-b) $\quad \operatorname{supp} u \subset \{(t,x),\ t \geq 0,\ |x| \leq R + t\}$

(13-c) $\quad u(0,x) \geq 0,\ u_t(0,x) \geq 0$

alors $u(t,x) \equiv 0$ dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

<u>Théorème II.3</u>. $n = 1$ ou $n = 3$.

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ telle que

(14-a) $\square u \leq a\, u_t^2 + b|\nabla_x u|^2$, $a \geq 0$, $b < -a$

(14-b) supp $u \subset \{(t,x),\ t \geq 0,\ |x| \leq R + t\}$

(14-c) $u(0,x) \leq 0$, $u_t(0,x) \leq 0$

alors $u(t,x) \equiv 0$ dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$

On montre en fait au théorème II.2 qu'il y a explosion en un temps fini de u ou de ∇u. Ainsi, pour des conditions initiales régulières convenables, la solution locale régulière de (10-a-b) ne peut être définie au delà d'un temps d'explosion T_ε et on a :

$$T_\varepsilon \leq \frac{A}{\varepsilon} \quad \text{si } n = 1$$

$$T_\varepsilon \leq A\, e^{\frac{B}{\varepsilon}} \quad \text{si } n = 3$$

L'étape essentielle de la démonstration (et la plus délicate) est la preuve du théorème II.2 pour $b = 0$: si u vérifie $\square u \geq a\, u_t^2$, $a > 0$, (13-b-c) alors $u(t,x) \equiv 0$. On peut comparer ce dernier résultat à celui de JOHN [9] obtenu dans un cadre plus général qui donne pour le cas présent :
les conditions $u \in C^3(\mathbb{R}_+^4)$, $\square u = u_t^2$, $u(0,x)$ et $u_t(0,x)$ à support compact, impliquent $u(t,x) \equiv 0$. Cependant on peut noter que $q(\nabla u) = au_t^2 + b|\nabla_x u|^2$, $a > 0$, $b > 0$ ne vérifie pas les hypothèses requises pour appliquer le résultat de JOHN. Les résultats obtenus sous forme de théorèmes de comparaison nous permettent plus de souplesse. Ainsi le théorème II.2 avec $a > 0$, $b \geqslant 0$ découle immédiatement du même résultat avec $a > 0$.

On peut aussi envisager des exemples plus généraux.
Ainsi soit $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4)$ telle que

$$\Box u = a\, u_t^2 + b|\nabla_x u|^2 + f(t,x,u,\nabla u,\nabla^2 u)$$

$a > 0$, $b > -a$, $f \in C^2$, $f \geq 0$, $f(t,x,0,0,\nabla^2 u) = 0$,

$u(0,x)$, $u_t(0,x)$ à support compact et positive, alors $u(t,x) \equiv 0$ dans $\mathbb{R}_+^4$.

L'obtention des théorèmes II.2 et II.3 à partir du cas $a > 0$, $b = 0$ est faite aussi par comparaison après un changement de fonction du type de celui utilisé par NIRENBERG (voir l'exemple 1). Le théorème II.3 nécessite l'hypothèse $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ dont on peut s'affranchir pour $b < 0$, $a = 0$ (voir SIDERIS [14]).

REFERENCES

[1] A.BACHELOT . Formes quadratiques A-compatibles dans des espaces de type L^p. Pub. d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux I.84-06.

[2] A.BACHELOT . Equirépartition d'énergie pour des systèmes hyperboliques et formes compatibles. En préparation.

[3] K.HAMDACHE . On the discrete velocity models of the Boltzmann équation. à paraître.

[4] B.HANOUZET . Applications bilinéaires compatibles avec un système à coefficients variables. Comm.P.D.E. à paraître.

[5] B.HANOUZET et J.L.JOLY. Formes bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique et problème de Cauchy. En préparation.

[6] B.HANOUZET et JOLY. Formes multilinéaires sur des sous espaces de distributions Pub. de l'Ecole Polytechnique, Paris (1982) Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz - 14.

[7] B.HANOUZET et J.L.JOLY. Bilinear maps compatible with a system.Research notes in mathematics, 89, Pitman (1983) 208-217

[8] R.ILLNER Global existence results for discrete velocity models of the Boltzmann equation in several dimensions. J.Mec.Th.Appl , 1-4 (1982), 611-622.

[9] F.JOHN . Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 29-51.

[10] S.KLAINERMAN. Global existence for non linear wave equations. Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980) 43-101.

[11] S.KLAINERMAN and.G.PONCE. Global, small amplitude solutions for non linear evolution equations. Comm. Pure Appl. Math.36 (1983),133-141.

[12] F.MURAT. Compacité par compensation III.
Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa , 8 (1981) 69-102

[13] J.SHATAH. Global existence of small solutions to non linear evolutions equations. J.Diff. Eq. 46-3 (1982), 409-425.

[14] T.SIDERIS. Global behavior of solutions to non linear wave equations in three space dimensions. Comm. P.D.E. 8 (1983) 1291-1323.

[15] L.TARTAR. Compensated compactness and applications to partial differential equations. Research Notes in Mathematics, 39, Pit an (1979) 136-212 .

[16] L.TARTAR. Some existence theorems for semi-linear hyperbolic systems in on space variable. M.R.C . Univ. of Wisconsin - Madison (1980) et à paraître.