JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Comportement asymptotique du spectre des bouteilles magnétiques

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985___1_A2_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU SPECTRE DES BOUTEILLES MAGNETIQUES

Exposé de Yves COLIN DE VERDIERE

Ce résumé fournit une présentation très sommaire de résultats en cours de rédaction ([CV 4]). On trouvera dans [CV 3] une étude du cas bidimensionnel.

L'origine de mon intérêt pour ce problème est due à mon ami Jacques VEY qui attira mon attention sur l'article [A-H-S] . Ce n'est que récemment à la suite d'une interaction avec J.-P. DEMAILLY lors de mon exposé [CV 2] que nous avons débloqué la situation. Il a ainsi de son côté obtenu les résultats de [DY 1], [DY 2] . J'ai réussi à trouver le comportement asymptotique du spectre de certaines bouteilles magnétiques sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$.

1. - BOUTEILLES MAGNETIQUES.

Soit (X, g) une variété riemannienne (pas nécessairement complète), B une 2-forme réelle fermée sur X telle que la classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière. Il existe alors un fibré en droites complexes L au-dessus de X muni d'une structure hermitienne et d'une connexion hermitienne ∇ dont la courbure est iB . Localement, sur un ouvert U de X , $L = \mathbb{C} \times U \xrightarrow{pr_2} U$ et $|(z,x)| = |z|$. La connexion ∇ est donnée par $\nabla_X f = df(X) - i\alpha(X)f$ où α est une 1-forme réelle sur U telle que $d\alpha = B$. On introduit alors sur $C_0^\infty(X;L)$ la forme quadratique $q(f) = \int_X \|\nabla f\|^2 dx$ où la norme $\|\cdot\|$

est la norme d'application linéaire $\nabla f(x) : T_x X \to L_x$. Si $(e_i(x))$ est un champ local de repères orthonormés, on a : $q(f) = \sum_{i=1}^{d} \int_X |\nabla_{e_i} f|^2 dx$. Cette forme quadratique est fermable sur $L^2(X;L)$ et on lui associe par le procédé de Friedrich's un opérateur autoadjoint H_B : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique B .

Si $X = \mathbb{R}^d$ et $\alpha = \sum_{j=1}^{d} a_j dx_j$, on a :

$$H_B = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - a_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{d} X_j^2$$

avec $[X_j, X_k] = ib_{j,k}$, $B = \sum b_{j,k} dx_j \wedge dx_k$.

Remarques. Si $\alpha_1 = \alpha + df$ est une autre primitive de B , on obtient un opérateur H' unitairement équivalent à H ; H_{-B} est antiunitairement équivalent à H_B .

On dit que (X, B) est une bouteille magnétique si les deux conditions suivantes sont réalisés :

(B_1) H_B est essentiellement autoadjoint avec comme domaine $C_0^\infty(X;L)$.

(B_2) H_B est à résolvante compacte.

On peut voir dans [A-H-S] des conditions suffisantes pour que $(\mathbb{R}^d, B)$ soit une bouteille magnétique et une étude de la nécessité de certaines de ces conditions dans [D1] et [I] . A notre connaissance le problème des bouteilles magnétiques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ n'a pas été abordé.

2. - ENONCE D'UN RESULTAT.

Donnons maintenant notre résultat sur les bouteilles magnétiques sur $\mathbb{R}^d$. Soit $r \leq d/2$ le rang maximum de la 2-forme $B(x)$: en tout point il existe une base orthonormée telle que

$$B(x) = b_1(x)\, dx_1 \wedge dx_2 + b_2(x)\, dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + b_r(x)\, dx_{2r-1} \wedge dx_{2r}$$

avec $0 \leq b_1(x) \leq \ldots \leq b_r(x)$. Les $(b_i(x))$ sont déterminés sans ambiguité par l'écriture ponctuelle précédente. Notons alors $B = \sum b_{ij}(x)\, dx_i \wedge dx_j$ le champ magnétique de $\mathbb{R}^d$ et faisons les hypothèses suivantes qui impliquent (B_1) et (B_2) :

(B_3) il existe $m > 0$ tel que $\sum_{i,j} |b_{ij}(X)| \geq c^{te}(1 + \|X\|)^m$

(B_4) pour le même m et pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| \leq 2$, on a : $|D^\alpha b_{ij}(x)| \leq c^{te}(1 + \|X\|)^{m-|\alpha|}$.

Notons alors $\frac{u}{\operatorname{sh} u}$ la fonction naturelle prolongée par 1 en $u = 0$, on a le :

THEOREME. <u>Sous les hypothèses</u> (B_3) <u>et</u> (B_4) , <u>si on note</u> $Z_B(t) = \operatorname{Tr}(e^{-tH_B})$ $(= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tE_n}$ <u>où</u> (E_n) <u>est la suite des valeurs propres de</u> $H_B)$, <u>on a</u> :

$$Z_B(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{t b_j(x)}{\operatorname{sh} t b_j(x)} \right) dx .$$

En particulier, cela permet par le théorème taubérien de Karamata d'obtenir l'équivalent de la fonction $N_B(\lambda) = \operatorname{Card}\{n \mid E_n \leq \lambda\}$.

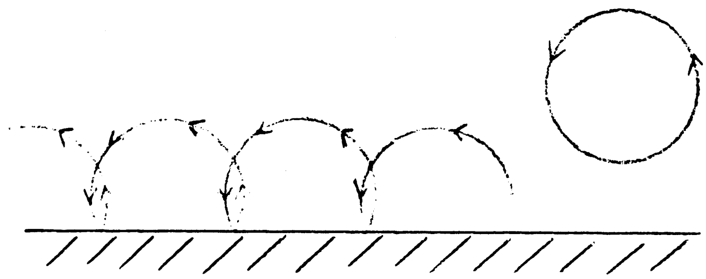
La preuve de ce théorème s'appuie sur :

a) des estimations précises sur le spectre de H_B dans un cube de $\mathbb{R}^d$ avec des conditions de Dirichlet.

b) la méthode classique ([R-S] p. 260 et suivantes) du découpage en cubes (pavage de $\mathbb{R}^d$) , puis remplacement dans chaque cube de B par le champ constant ayant pour valeurs la valeur de B au centre du cube. Les estimations (B_4) sont nécessaires pour majorer la différences entre les 2 formes quadratiques obtenues.

3. - ESTIMATIONS DANS LES CARRES.

Il est assez simple de prouver que l'opérateur de Schrödinger H_{B_0} dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à un champ constant non nul $B_0 dx \wedge dy$, admet un spectre discret $E_n = (2n+1)|B_0|$, chaque espace propre $\mathcal{H}_n$ étant de dimension infinie ; il n'en est plus de même déjà dans le demi-plan avec les conditions de Dirichlet : le spectre de H_{B_0} y est alors égal à $[B_0, +\infty[$: on ne peut pas utiliser la méthode des images à cause de la figure suivante qui représente les trajectoires d'une particule classique dans un champ constant, avec réflexion au bord du demi-plan :



Les trajectoires qui rencontrent le bord ne se referment pas bien.

Dans un carré, on peut cependant calculer le spectre avec des données au bord périodiques si $B_0 R^2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ (R = longueur du côté du carré) : il existe alors un fibré L, sur le tore $\mathbb{R}^2/(R\mathbb{Z})^2$, de courbure $B_0 dx \wedge dy$. Le spectre est alors formé des $(2n+1)|B_0|$ $(n \geq 0)$ avec une multiplicité constante $\frac{|B_0|R^2}{2\pi}$, cela permet d'obtenir le résultat crucial suivant : ici

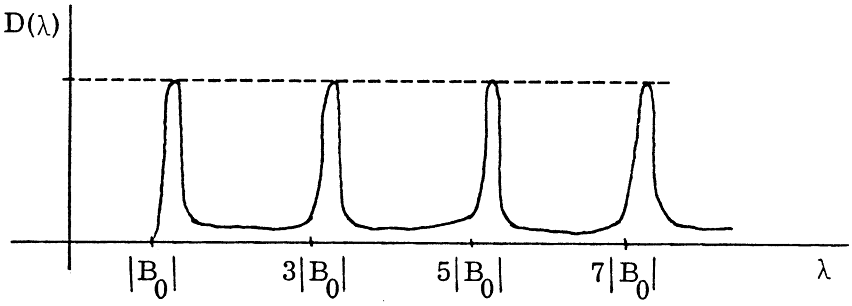
$$T(\lambda) = \mathrm{Card}\{n \geq 0 \mid 2n+1 < \lambda\},$$

et $N_{B_0,R}(\lambda)$ est la fonction de dénombrement spectral pour le problème de Dirichlet sur un carré de côté R :

THEOREME. <u>Il existe une constante</u> C <u>universelle telle que pour tout</u> $A \in]0, R/2]$, <u>on ait</u> :

$$\frac{|B_0|\,(R-A)^2}{2\pi}\, T\left(\left(\lambda - \frac{C}{A^2}\right)/|B_0|\right) \le N_{B_0,R}(\lambda) \le \frac{|B_0|\,R^2}{2\pi}\, T(\lambda/|B_0|) \ .$$

De ce théorème résulte en particulier l'allure de la densité régularisée de valeurs propres lorsque $R \gg 1$:



BIBLIOGRAPHIE

[A-H-S] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON : Schrödinger Operators with magnetic fields I, Duke Math. J. 45 (1978), pp. 847-883.

[CV 1] Y. COLIN DE VERDIERE : Calcul du spectre de certaines nil-variétés compactes de dimension 3 . Séminaire Grenoble-chambéry 83-84 (exposé n° 5).

[CV 2] Y. COLIN DE VERDIERE : Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya, Séminaire Grenoble-Chambéry 84-85 (à paraître).

[CV 3] Y. COLIN DE VERDIERE : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques bidimensionnelles. Prépublications de l'Institut Fourier n° 33 (1985).

[CV 4] Y. COLIN DE VERDIERE : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques (en cours de rédaction).

[D] A. DUFRESNOY : Un exemple de champ magnétique dans $\mathbb{R}^\nu$, Duke Math. J. 50 (1983), pp. 729-734.

[DY 1] J.-P. DEMAILLY : Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie. C.R.A.S. (à paraître).

[DY 2] J.-P. DEMAILLY : Même titre (soumis aux Annales de l'Institut Fourier).

[I] A. IWATSUKA: Magnetic Schrödinger Operators with compact Resolvent. Preprint 1985.

[M] F. MICHAU : Comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique (thèse de 3ème cycle, Grenoble 1982).

[R-S] REED-SIMON : Methods of modern mathematical physics IV.