JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS
MONIQUE DAUGE

Régularité Gevrey pour un problème aux limites dans un ouvert à singularité conique

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A6_0>

CONFERENCE N° VI

JOURNEES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1984

REGULARITE GEVREY POUR UN PROBLEME AUX LIMITES

DANS UN OUVERT A SINGULARITE CONIQUE

par

Pierre BOLLEY, Jacques CAMUS, Monique DAUGE

Universités de NANTES et RENNES

§1. Introduction

Considérons le problème de Dirichlet associé à un opérateur différentiel proprement elliptique L d'ordre 2m sur un domaine Ω borné dans $\mathbb{R}^n$. Si les coefficients de L sont analytiques jusqu'au bord de Ω, et si Ω est à bord analytique, alors L a la régularité Gevrey d'ordre s jusqu'au bord pour tout $s \geqslant 1$ (cf [LM]), i.e.:

si $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ est tel que $Lu \in G^s(\overline{\Omega})$, alors $u \in G^s(\overline{\Omega})$; rappelons que $f \in G^s(\overline{\Omega})$ s'il satisfait aux estimations :

$$\exists C > 0 \,, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \,, \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C^{|\alpha|+1} (|\alpha| \,!\,)^s$$

Dans cet exposé, nous nous intéressons au problème :

$$(D) \quad \begin{cases} u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \\ Lu \in G^s(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

lorsque Ω admet une singularité conique, c'est-à-dire que Ω a un bord régulier, sauf au voisinage V d'un point 0, où Ω coïncide avec un cône Γ de sommet 0. Nous supposerons que la section ω de Γ sur la sphère S^{n-1} de centre 0 est à bord analytique. Enfin L est toujours supposé elliptique à coefficients analytiques sur $\overline{\Omega}$.

Par la présence du point conique, il existe toujours u solution de (D) et n'ayant pas la régularité $G^s(\overline{\Omega})$.

Par contre, grâce à la théorie de décomposition en parties régulière et singulière de [K] - voir aussi l'hypoellipticité dans les espaces à poids gradués A_{gr} de [MM] - on obtient que si $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ et est tel que $Lu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors u admet pour tout $x \geqslant m - \frac{n}{2}$ un développement asymptotique (A_x) au voisinage de 0 :

$$(A_x) \qquad u = \sum_{z \in Z,\, m-\frac{n}{2} < \operatorname{Re} z < x} \; \sum_{p=0}^{P_z} r^z \operatorname{Log}^p r \; a_{z,p}(\theta) + u_x$$

où :

* $(r,\theta) = (|X| \,,\, \frac{X}{|X|})$ désignent les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$,

* $a_{z,p} \in \overset{\circ}{H}{}^m(\omega) \cap C^\infty(\overline{\omega})$,

* $u_x = 0(r^{x+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ (reste du développement) ,

* Z est un ensemble discret de $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{N}$, ne dépendant que de l'opérateur ; pour chaque x, l'ensemble des $z \in Z$ tels que $m - \frac{n}{2} < \operatorname{Re} z < x$ est fini. La limitation inférieure de la somme par $m - \frac{n}{2}$ correspond à la régularité H^m de u.

A fortiori, quand u est solution de (D), u admet un tel développement. Nous étudierons alors les u_x. D'autre part, si u est supposée a priori $C^\infty(\overline{\Omega})$,

(A_x) coïncide avec le développement de Taylor de u en 0; nous étudierons alors la régularité G^s de u. Cette dernière étude a été faite dans le cadre analytique (s = 1) par Baouendi et Sjöstrand dans [BS].

Nous obtiendrons aussi un résultat d'hypoellipticité G^s dans des espaces à poids.

Tous nos énoncés et démonstrations incluent le cas analytique.

§2. Résultats.

Rappelons que, dans toute la suite :

* $s \geqslant 1$.

* L est proprement elliptique d'ordre 2m à coefficients analytiques sur $\overline{\Omega}$.

* Ω coïncide sur un voisinage V de 0 avec un cône Γ à section ω à bord analytique.

A. Régularité à partir du C^∞.

En coordonnées polaires, L s'écrit au voisinage de 0 :

$$L(X\ ;\ D_X) = r^{-2m}\, Q(r,\theta\ ;\ r\,D_r\ ,\ D_\theta)$$

où Q est à coefficients analytiques au voisinage de r = 0 dans $\overline{\mathbb{R}^+} \times \overline{\omega}$. D'autre part, $Q(0,\theta\ ;\ D_t\ ,\ D_\theta)$ est elliptique, et nous introduisons son demi-cône caractéristique :

$$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \operatorname{Re} z \geqslant 0\ /\ \exists\,(\theta,\eta) \in \overline{\omega} \times \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}\ ,\ Q_{2m}(0,\theta\ ;\ -iz,\eta)=0\}$$

où Q_{2m} désigne la partie principale de Q.

Γ_+ ne rencontre pas $i\mathbb{R}$.

Soit $\hat{\Gamma}_+$ le cône convexe engendré par Γ_+ et $\mathbb{R}_+$. On introduit l'hypothèse (H) :

(H) l'ouverture de $\hat{\Gamma}_+$ est strictement inférieure à $\frac{\Pi}{n}$

Théorème 1.

Si (H) est vérifiée, toute solution $C^\infty(\overline{\Omega})$ de (D) est dans $G^s(\overline{V})$.

Remarques.

a) Dans [BS] est obtenu le résultat correspondant pour s = 1, sous la même hypothèse sur l'opérateur.

b) Si L est homogène à coefficients constants, on a :

$$L(D_x) = r^{-2m}\, Q(0,\theta\ ;\ r\,D_r\ ,\ D_\theta)$$

et on a encore la conclusion du théorème 1 en remplaçant (H) par l'hypothèse (H') plus faible :

(H') chaque composante connexe de Γ_+ **est d'ouverture** $< \frac{\Pi}{n-1}$.

Cette hypothèse est toujours vérifiée quand n = 2.

Exemples d'opérateurs vérifiant (H).

a) le laplacien et ses itérés.

b) en dimension 2, la partie principale de L en 0 peut se factoriser sous la forme $\prod_{j=1}^{2m} (D_{x_1} + a_j D_{x_2})$.

On peut montrer que (H) est vérifiée dans les deux situations suivantes :

i) $a_j = e^{i\zeta_j}$ avec $\frac{\Pi}{4} < |\zeta_j| < \frac{3\Pi}{4}$,

ii) $a_j = i\, b_j$ avec b_j réel.

Signalons que l'un des intermédiaires de démonstration utilisés sera la caractérisation suivante des fonctions G^s par des estimations sur les restes u_k de leur développement de Taylor en 0 :

Proposition

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. u est $G^s(\overline{V})$ si et seulement si on a les estimations :

$\exists C > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $|\alpha| \leq k$:

$\| r^{|\alpha|-k} D^\alpha u_k \|_{L^2(V)} \leq C^{k+1} (k\,!)^{s-1} |\alpha|\,!$

B. Estimation des restes.

Nous ne faisons plus d'hypothèses de régularité sur u, hormis $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$. On a déjà signalé que u admet un développement asymptotique (A_x). Voici une définition généralisant naturellement l'estimation ci-dessus :

Définition

Nous dirons qu'une fonction u admet un développement asymptotique en 0 de type G^s si pour tout x > 0 u admet un développement du type (A_x) et si il existe une suite $x_k \in [k,k+1[$, $k \in N$ vérifiant :

$\exists C > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$

$\| r^{|\alpha|-k} D^\alpha u_{x_k} \|_{L^2(V)} \leq C^{k+1} (k\,!)^{s-1} |\alpha|\,!$

Théorème 2

Si n = 2 et si L est homogène à coefficients constants, alors toute solution du problème (D) admet un développement asymptotique en 0 de type G^s.

Remarques:

a) On a encore le même résultat en dimension $n \geqslant 3$ si $L = \Delta$.

b) Pour $s = 1$, le théorème 2 donne une convergence par paquets du développement asymptotique et a été démontré sous cette forme dans [D].

C. Hypoellipticité Gevrey à poids.

Pour le problème de Dirichlet :

$$(P)\quad \begin{cases} \gamma_j\, u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,\ j=0,\dots,m-1 \ ;\ u \in H^m_{loc}\ (\overline{\Omega}\setminus\{0\}) \\ Lu = f \end{cases}$$

on a un résultat classique d'augmentation de régularité dans les espaces W^k_γ suivants, $k \in \mathbb{N}$, ou $k = \infty$:

$$u \in W^k_\gamma(\Omega) \Longleftrightarrow \forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant k \qquad r^{\gamma+|\alpha|}\ D^\alpha\ u \in L^2(\Omega)$$

On a :

si $u \in W^0_\gamma(\Omega)$ est solution de (P) avec $f \in W^\infty_{\gamma+2m}$, alors $u \in W^\infty_\gamma$. On peut rapprocher ce résultat de l'A-hypoellipticité de [MM], car $A = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{R}} W^\infty_\gamma$.

Les classes Gevrey à poids pour $s \geqslant 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ peuvent être définies comme l'espace $G^s_\gamma(\overline{V})$ des $u \in W^\infty_\gamma$ vérifiant :

$$\exists C > 0\ ,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \| r^{\gamma+|\alpha|}\ D^\alpha\ u \|_{L^2(V)} \leqslant C^{|\alpha|+1}\ (|\alpha|\ !\ )^s$$

Théorème 3

Si u est solution de (P) avec $f \in G^s_{\gamma+2m}(\overline{\Omega})$ et si $u \in W^0_\gamma(\Omega)$, alors $u \in G^s_\gamma(\overline{V})$.

§3. Structure des démonstrations.

Voici d'abord les principaux intermédiaires de démonstration du théorème 1.

A. Localisation

Comme le problème est local au voisinage de 0, on peut, en tronquant, passer de $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant (D) à $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant (D_R) pour un $R > 0$:

$$(D_R)\quad \begin{cases} u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Gamma) \\ \text{supp}\ u \subset \Gamma_{3R} \\ Lu \in G^s(\overline{\Gamma}_{2R}) \end{cases}$$

où : $\Gamma_R = \{X \in \Gamma \ /\ |X| < R\}$

Pour montrer le th. 1, il suffit de prouver que $u \in G^s(\overline{\Gamma}_R)$

B. Développement de Taylor d'une fonction G^s.

Voici la caractérisation que nous utiliserons :

Théorème 3.1.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ à support dans $\overline{\Gamma}_{3R}$. Soit $\gamma \in]-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1[$.
Alors $u \in G^s(\overline{\Gamma_R})$ si et seulement si on a les estimations (E_1) et (E_2) suivantes :

(E_1) $\quad \exists C_1, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \|r^{\gamma-k} u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1^{k+1} (k!)^{s-1}$

(E_2) $\quad \exists C_2, \ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha, \ |\alpha| \leq k, \ \|r^{\gamma-k+|\alpha|} D^\alpha u_k\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq C_2^{k+1} (k!)^{s-1} \alpha!$

(E_1) est globale sur Γ ; (E_2) n'est donnée que sur Γ_R. L'argument principal de la preuve de ce résultat est la formule de Taylor avec reste intégral en 0 appliquée à $D^\alpha u_k$ par rapport à l'opérateur de dérivation ∂_r.

C. Estimations sans dérivées.

A l'aide de la transformation de Mellin, d'une manière assez analogue à [BS], utilisant en particulier le théorème de Phragmen-Lindelöf, on obtient (E_1) :

Théorème 3.2.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ et vérifiant (D_R). Soit $\gamma \in]-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1[$. Alors u vérifie l'estimation (E_1).

D. Caractère G^s ponctuel.

On dit que $g \in G^s(0)$ si $\exists C, \forall \alpha \ |D^\alpha g(0)| \leq C^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s$.
A l'aide, en particulier, des inégalités de Markov et Bernstein (cf [BS]), on obtient :

Théorème 3.3.

Soit $u \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ vérifiant l'estimation (E_1).
Alors $u \in G^s(0)$.

A ce niveau, dans le cas où $s = 1$ (cf [BS]) la démonstration est terminée, car $u \in G^1(0)$ et vérifie (E_1), donc son développement de Taylor en 0 converge et sa limite est u lui-même. Donc u est analytique. Pour $s > 1$, nous devons continuer l'étude et démontrer (E_2).

E. Estimation a priori.

C'est une estimation dans des espaces à poids avec contrôle de la constante en fonction du poids et de l'ordre de dérivation.

On reprend les notations du §2.C.

Théorème 3.4.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $v \in W_x^\infty(\Gamma_{2R})$ solution du problème (P). Alors on a l'estimation pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\frac{1}{\alpha!} \| r^{x+|\alpha|} D^\alpha v \|_{L^2(\Gamma_R)} \leqslant$$

$$C^{|x|+|\alpha|+1} \Big[\sum_{|\beta| \leqslant (|\alpha|-2m)_+} \frac{1}{\beta!} \| r^{x+|\beta|} D^\beta (r^{2m} Lv) \|_{L^2(\Gamma_{2R})}$$

$$+ \| r^x v \|_{L^2(\Gamma_{2R})} \Big]$$

où C ne dépend ni de v, ni de x, ni de α.

La preuve est basée sur des estimations a priori (dans des couronnes) du type de celles de [B] (obtenues par ouverts emboîtés), et sur une partition dyadique, ce qui discrétise le poids à un facteur $C^{|x|}$ près.

F. Estimations des dérivées.

Pour obtenir que u est $G^s(\overline{\Gamma}_R)$, comme on a déjà que u vérifie (E_1) par le th. 3.2, il reste, au vu du th. 3.1, à montrer que u vérifie (E_2). On se ramène alors à montrer la majoration (E_3) suivante :

$$(E_3) \quad \begin{cases} \exists C > 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall \beta, \ |\beta| \leqslant k \\ \| r^{-k+|\beta|} D^\beta (r^{2m} L u_k) \|_{L^2(\Gamma_{2R})} \leqslant C^{k+1} (k!)^{s-1} \beta! \end{cases}$$

En effet, cette majoration injectée dans l'estimation du th. 3.4 pour $x = -k$ et $v = u_k$ (qui s'annule bien à l'ordre m sur $\partial\Gamma$), avec en plus, (E_1) pour le terme $\| r^{-k} u_k \|$, donne bien (E_2).

Intéressons-nous à (E_3). $r^{2m} L = Q$ par définition. Pour obtenir (E_3), on analyse $Q u_k$.

Soit $P_k g \equiv g - g_k = \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} \frac{D^\alpha g(0)}{\alpha!} X^\alpha$.

On a :

$$Q u_k = (Q u)_k + P_k(Q u) - Q(P_k u)$$

$(Q u)_k$ est estimé par (E_2) pour Q u qui est $G^s(\overline{\Gamma}_{2R})$. Pour l'autre, on remarque que :

$$Q(P_k u) - P_k(Q u) = [Q(P_k u)]_k$$

qui s'exprime donc uniquement à l'aide des dérivées de u en 0. L'estimation voulue provient alors du caractère $G^s(0)$ de u montré au th. 3.3.

Le théorème 3 se déduit directement du th. 3.4.

Pour le théorème 2, les th. 3.1. et 3.3. sont sans objet. On obtient l'estimation sans dérivées sur les restes grâce à la transformation de Mellin comme dans le th. 3.2, mais en utilisant, au lieu du théorème de Phragmen-Lindelöf, l'estimation en $A^{|z|}$ de l'inverse de $Q(0,\theta\ ;\ -iz,D_\theta)$ démontrée dans [D]. L'estimation complète des restes se déduit alors directement du th. 3.4 en remarquant que, puisque l'opérateur est homogène à coefficients constants, on a :

$$Q\ u_k = (Q\ u)_k$$

REFERENCES

[B] N. BURGER : Powers and Gevrey's regularity for a system of interior and boundary Differential Operators. Bolletino U.M.I. (6) 1-B (1982), 1-16.

[BS] M.S. BAOUENDI, J. SJÖSTRAND : Analytic regularity for the Dirichlet Problem in domains with conic singularities. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV, Vol. IV, 3 (1977) 515-530.

[D] M. DAUGE : Second membre analytique pour un problème aux limites elliptique d'ordre 2m sur un polygone. Comm. in Partial Differential Equations (1984) 9 (2) 169-195.

[K] V.A. KONDRAT'EV : Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. Trans. Moscow Math. Soc. (1967) 227-313.

[LM] J.L. LIONS, E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 3. Dunod.

[MM] R. MELROSE, G. MENDOZA : Elliptic boundary problems on spaces with conic points. Journées E.D.P. Saint Jean de Monts 1981, n° 4.