JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

H. BAHOURI

Sur la propriété de prolongement unique pour les opérateurs de Hörmander

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A15_0>

SUR LA PROPRIETE DE PROLONGEMENT UNIQUE POUR LES OPERATEURS D'HORMANDER

H. Bahouri

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau 91128 Palaiseau Cedex (France)

INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse aux "opérateurs de Hörmander" [10] $P = \Sigma X_j^2$, où l'algèbre de Lie engendrée par les X_j est de rang maximum en tout point. Bony [5] a montré que, dans le cas analytique, le prolongement des solutions de ces opérateurs est unique. Par ailleurs, Watanabe [14] a obtenu le même résultat, dans le cas C^∞, en dimension deux. En ce qui nous concerne, nous montrerons que ce résultat n'est plus vrai dès que la dimension est supérieure ou égale à trois. En particulier, en dimension trois ou quatre, nous établirons que ces opérateurs ne possèdent jamais la propriété de prolongement unique. (Evidemment, en supposant que ces opérateurs ne sont elliptiques en aucun point de l'espace).

Les hypothèses des résultats que nous énoncerons au paragraphe 1, sont invariantes, et reposent sur des propriétés algébriques et géométriques de l'opérateur. La preuve de ces résultats, cf. à [2], [3], [6] , est fondée sur des techniques, introduites par Pliš [12-13], pour être ensuite améliorées par Hörmander [8-9] , qui sont en liaison avec la méthode de l'optique géométrique.

C'est à S. Alinhac que je dois de m'être intéressée à cette question. Je l'en remercie vivement. Je tiens également à remercier Jean-Pierre Bourguignons pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

1. GENERALITES ET RESULTATS

Dans toute la suite, $P(x,D_x)$ (où $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$) désignera un opérateur différentiel écrit sous la forme :

$$(1.1) \qquad P(x,Dx) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2(x,Dx) + p_1(x,Dx)$$

où

(1.2) Les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, sont des champs de vecteurs réels, à coefficients C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

(1.3) L'espace vectoriel engendré par les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est de dimension $n-1$ en tout point de Ω .

(1.4) L'algèbre de Lie engendrée par les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est de rang n en tout point de Ω .

(1.5) p_1 est un opérateur différentiel d'ordre un à coefficients C^∞ dans Ω .

Nous dirons que P possède la propriété de prolongement unique dans un ouvert $V \subset \Omega$ si :

$u \in C^{\infty}(v)$, et $Pu = 0$ dans V impliquent $u \equiv 0$ dans V dès que $u = 0$ près d'un point de v.

Et nous désignerons par ε_n la forme volume associée aux champs X_i, $1 \leq i \leq n-1$, qui à tout champ de vecteur X, réel C^{∞} dans Ω, associe $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \wedge X = \det(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X)$

Le résultat principal que nous obtenons est le :

<u>Théorème 1.1</u> : Soit $P(x,Dx)$ un opérateur différentiel vérifiant (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5), on suppose que :

(1.6) La forme volume associée aux X_i est de classe constante 4 au voisinage d'un point x_o de Ω.

Alors, dans tout voisinage de x_o, il existe un ouvert V et une fonction $a \in C^{\infty}(V)$ telle que $P_+ a$ n'a pas la propriété de prolongement unique dans V.

De cet énoncé, on déduit les :

<u>Corollaire 1.2</u> : En dimension 3 ou 4, la conclusion du théorème 1.1 reste vraie sans l'hypothèses (1.6).

<u>Corollaire 1.3</u> : Soit $P(x,Dx) = \sum_{i=1}^{p} X_i^2(x,Dx) + p_1(x,Dx)$ tel que $p < m-1$, la conclusion du théorème 1.1 reste vraie s'il existe $X_{p+1}, \ldots, X_{n-1}$ tels que les X_i, $1 \leq i \leq n-1$, et p_1 vérifient (1.1) ...(1.6).

<u>Exemples et remarques</u> :

(1.7) Le fait que la dimension est supérieure ou égale à trois est important ; en effet, en dimension deux, Watanabe [14] a montré que toute solution u dans $C^\infty(\Omega)$ de Pu = O est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point, lorsque P vérifie la condition d'Hörmander [10] . Notons que (1.3) et (1.4) ne peuvent avoir lieu en même temps que si la dimension est supérieure ou égale à trois.

(1.8) Dire que la forme volume ξ_n est de classe 4 en x_o, équivaut à dire que $\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n \neq 0$ en x_o et $\varepsilon_n \wedge (d\varepsilon_n)^2 = 0$ en x_o. (Pour plus de détails, voir Abraham-Marsden [1] Godbillon [7] ou Malliavin [11]).

(1.9) Dire que la forme volume ε_n est de classe 2 revient à dire que les X_i forment un système de Frobenius . Le théorème montre qu'on sait traiter le cas qui vient après celui de Frobenius pour lequel la propriété de non prolongement unique est immédiate.

(1.10) Le fait que ξ_n soit de classe constante 4 est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une hypersurface S telle que les composantes tangentielles des X_i forment un système de Frobenius.

(1.11) Notons que l'on obtient le même résultat avec deux champs (resp. trois champs) dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant (1.2), (1.3) et (1.4) (même preuve que le théorème 1.1, voir même plus simple).

(1.12) Notons que dans le cas où l'on considère plus que n - 1 champs de vecteurs réels sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant (1.2) et (1.4), nous disposons (à part, le cas trivial des opérateurs elliptiques) de plusieurs exemples dûs à Watanabe [14] , Bahouri [4], possédant la propriété du prolongement unique, à savoir ; $\partial_1^2 + x_1^{2k}\,\partial_2^2$ en dimension 2, où k est un entier positif $\partial_1^2 + \partial_2^2 + x_1^2\,\partial_3^2$ en dimension 3.

Plus généralement, on peut montrer que tout opérateur d'Hörmander elliptique hors d'une hypersurface, possède la propriété de prolongement unique.

(1.13) L'opérateur $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\partial_3)^2$, en dimension 3, vérifie les hypothèses du théorème 1.1 et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface $S : \{x_1 = 0\}$, dans le sens où, pour tout $x_o \in S$, il existe un voisinage V de x_o dans $\mathbb{R}^3$, des fonctions a et u de classe C^∞ dans V, supp $a \subset \{x_1 \geqslant 0\}$,
supp $u \cap V = \{x_1 \geqslant 0\} \cap V$ et $(\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\partial_3)^2)u + au = 0$ dans V.

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, tout opérateur de la forme $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \ldots + \partial_{n-2}^2 + (\partial_{n-1} + x_1\partial_n)^2$ vérifie les hypothèses du théorème et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface $\{x_1 = 0\}$.

L'exemple de l'opérateur $\partial_1^2 + \partial_2^2 + (\partial_3 + a\,\partial_5)^2 + (\partial_4 + b\,\partial_5)^2$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1 lorsqu'il existe $x_o \in \mathbb{R}^5$ tel que $a_{x_1}(x_o) \neq 0$ ou $b_{x_1}(x_o) \neq 0$ ou $a_{x_2}(x_o) \neq 0$ ou $b_{x_2}(x_o) \neq 0$ et $a_{x_1} b_{x_2} \equiv a_{x_2} b_{x_1}$ au voisinage de x_o.

Enfin, l'opérateur $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\partial_3 + \ldots + x_1^{j-2}\partial_j + \ldots + x_1^{n-2}\partial_n)^2$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.1 mais reste dans le cadre de la remarque (1.11) et donc ne possède pas la propriété de prolongement unique. On montre facilement qu'il n'admet pas l'unicité du problème de Cauchy par rapport à la surface $\{x_1 = 0\}$, dans le sens indiqué ci-dessus.

Bibliographie

[1] R. Abraham, J. E. Marsden : Foundations of Mechanics. The Benjamin, Cummings Publishing Company.

[2] S. Alinhac : Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal. Sem. Goulaouic-Schwartz, exposé n° 16, Ecole Polytechnique Paris (Mars 1981).

[3] S. Alinhac, C. Zuily : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à caractéristiques doubles. Comm. in P.D.E. 6(7) 799-828 (1981).

[4] H. Bahouri : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel. Thèse de 3ème cycle à Orsay (1982) et article à paraître.

[5] J. M. Bony : Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier, Grenoble (1969) 277-304.

[6] P. Cohen : The non uniqueness of the Cauchy problem . O.N. Techn. Report 93, Stanford 1960.

[7] C. Godbillon : Géométrie différentielle et mécanique analytique. Hermann.

[8] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer Verlag 1963.

[9] L. Hörmander : Non uniqueness for the Cauchy problem. Lecture Notes in Math. Springer Verlag, n° 459 (1975) 36-72.

[10] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. Uppsala, 119 (1967) 147-171.

[11] P. Malliavin : Géométrie differentielle intrinsèque. Hermann.

[12] A. Pliš : The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differenital equations. Bull. Acad. Pol. Sci. 2 (1954) 55-57.

[13] A. Pliš : Non uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type. J. Math. Mech. 9 (1960) 557-562.

[14] K. Watanabe : L'unicité du prolongement des solutions elliptiques dégénérées. Tohoku Math. Journal 34 (1982) 239-249.

***