Journées Équations aux dérivées partielles

Pham The Lai

Vesselin Petkov

Comportement asymptotique de la fonction spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété ayant des singularités coniques

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A10_0>

Conférence n° 10

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES : Comportement asymptotique de la fonction spectrale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété ayant des singularités coniques.

PHAM THE LAI et de Vesselin PETKOV

On considère une variété riemannienne compacte Y sans bord ayant des singularités coniques. On obtient une asymptotique de la fonction spectrale associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami L sur Y. On en déduit l'asymptotique de la fonction $N(\lambda)$ comptant des valeurs propres de L plus petites que λ^2.

We consider a compact riemannian manifold Y without boundary assuming that Y has conic singularities. We obtain an asymptotics of Beltrami operator L on Y. This enables us to obtain the asymptotics of the function $N(\lambda)$ computing the eigenvalues of L less that λ^2.

§1. Introduction

On considère une variété riemannienne compacte sans bord (Y,s) de dimension $n+1 \geqslant 2$ et on suppose que Y est à singularité conique c'est à dire que Y est C^∞, sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels Y est un cône. Sans restreindre la généralité, on suppose que Y a une seule singularité et s'écrit au voisinage de ce point $Y = \mathbb{R}_+ . X$, où (X,g) est une variété riemannienne compacte sans bord C^∞ de dimension n, et que la métrique de Y s'écrit :

$$(dr)^2 + r^2 g(dx)$$

Soit L l'opérateur de Laplace Beltrami sur Y et Δ l'opérateur de Laplace Beltrami sur X. Dans un système de coordonnées locales $(x_1,\dots,x_n)$ on a

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^{n} g^{-\frac12} \partial_{x_i} (g^{\frac12} g^{ij} \partial_{x_j} u)$$

$$L u = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\Delta u}{r^2} \right)$$

On considère l'espace $L^2(Y;dy)$ des fonctions de carré sommable sur Y (où $dy = g^{\frac12} r^n \, dr\, dx$ au voisinage du point conique) et l'espace d'énergie

$$H^1(Y) = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial r} \text{ et } \frac{\sqrt{-\Delta}\, u}{r} \in L^2(Y; dy) \right\}$$

Il est facile de voir que L se réalise comme un opérateur autoadjoint $\geqslant 0$ sur $L^2(Y)$, de domaine $\mathcal{D}(L) = \{ u \in H^1(Y),\ L u \in L^2(Y) \}$.

Soit $L = \int \lambda \, E(d\lambda)$ la résolution spectrale de L.

L'objet de cette note est l'étude du comportement asymptotique de la trace du noyau $E(\tau ; r, x; \rho, y)$ de la projection $E( ]-\infty, \tau^2])$. Le résultat principal est le :

Théorème 1

1) Le spectre de L est discret et est composé de valeurs propres, de multiplicités finies. Rangées en ordre croissant, les valeurs propres forment une suite (λ_j) qui tend vers $+\infty$ lorsque $j \to +\infty$.

2) Soit $\zeta(x) \in C^\infty(X)$ à support dans une carte locale de X et $\chi(r) \in \mathcal{D}(\overline{R}_+)$ égale à 1 sur un voisinage de 0. Posons $\varphi = \chi . \zeta$

Il existe $C_0 > 0$ tel que : pour $r\tau \geq C_0$, nous avons

(1) $$\varphi r^n g^{\frac{1}{2}} E(\tau; r, x; r, x) = \varphi \frac{\tau^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_{L_0(r,x;\zeta,\xi)\leq 1} . \, d\zeta \, d\xi \qquad + O\left[\frac{(r\tau)^n}{r} + r^{-(n+1)}\right]$$

où $L_0(r,x\,;\,\zeta\,,\,\xi)$ est le symbole principal de L et O est uniforme en τ, r, x.

Ce résultat implique le

Corollaire 2 Soit $N(\tau)$ le nombre des valeurs propres de L plus petites que τ^2

Alors
$$N(\tau) = \frac{\tau^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_{L_0(r,x;\zeta,\xi)} d\sigma \qquad + O(\tau^n)$$

où $d\sigma$ est le volume symplectique sur $T^*(Y)$.

Remarque Le corollaire est un résultat connu de M. Kalka - A. Ménîfoff (4) . Ces auteurs ont fait l'hypothèse supplémentaire $n > 1$.

La preuve du théorème 1 utilise d'une manière essentielle la méthode hyperbolique : on considère la solution fondamentale $u(t;r,x;\rho,y)$ de l'équation des ondes $D_t^2 - L$.

On applique une idée de V. Ivrii (2) qui consiste à construire explicitement une asymptotique de la trace $u(t;r,x;r,x)$ en terme de singularités en t au voisinage de t=o. Notre construction utilise un "figeage" à notre avis inédit et la transformation de Mellin pour la variable r. L'asymptotique construite ici, comme dans le cas de V. Ivrii, est composée de termes de singularités croissantes ; cependant sa trace est composée de termes de singularités décroissantes.

On prend un voisinage de t=o sous la forme $|t| \leq \varepsilon_0 r$ avec ε_0 suffisamment petit, ce qui explique l'expression du reste dans 1 . Nous espérons montrer prochainement que l'asymptotique reste valable pour $|t| \leq \varepsilon_0$ (indépendant de r) et améliorer le reste dans (1) sous la forme $O\left[(r\tau)^n\right]$.

§2. Localisation

2.1. On note Ω une carte de X contenant le support de ζ, $(r,x_1,\ldots,x_1)$ les coordonnées locales de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et $Q = \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Soit u la solution du problème de Cauchy :

(2) $$\begin{cases} Pu = 0 & t \in \mathbb{R} \quad , (r,x) \in Q \\ u|_{t=0} = 0 & \\ \partial_t u|_{t=0} = \delta(r-\rho)\,\delta(x-y) & (r,x) \in Q \quad (\rho,y) \in Q \end{cases}$$

on est amené à considérer sur Q l'espace

$$L^2_*(Q) = \left\{ u \; ; \; \int_Q \phi^2 |u|^2 \frac{dr}{r} < \infty \right\}$$

où ϕ est le poids $\phi(r) = r^{\frac{n-1}{2}}$

En appliquant la théorie variationnelle, on montre que le problème (2) a une solution unique dans $C([o,T], H^{o,-\bar{s}}_{r,x}(Q))$ avec $\bar{s} > \frac{n}{2}$ où

$H^{o,-\bar{s}}_{r,x}(Q)$ désigne l'espace $\{u,\ (1+\sqrt{-\Delta})^{\bar{s}} u \in L^2_*(Q)\}$

Si $u \in H^{o,-\bar{s}}_{r,x}$ pour un certain $\bar{s}$, on dira que u vérifie une <u>condition d'annulation de type de Fuchs</u> au voisinage de r=o.

2.2. Pour (ρ,y) fixé dans Q, on considère l'opérateur figé $\bar{P}$ défini par :

$$\bar{P} = D_t^2 - \frac{[rD_r - i\frac{n-1}{2}]^2 - \Delta(y,D_x)}{\rho^2} \quad ;$$

on considère la solution u du problème (2) avec P remplacé par $\bar{P}$ et avec la condition d'annulation de type de Fuchs au voisinage de r=o.

Notons $K = \bar{P}-P$, et $\bar{E}$ la paramétrix du problème

$$\begin{cases} \bar{P}w = f & w|_{t=o} = \partial_t w|_{t=o} = o \\ \text{condition de type de Fuchs pour } w \end{cases}$$

En notant $\bar{u} = \bar{E}\,\delta(r-\rho)\delta(x-y)$, il est facile de voir que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a la représentation:

(3) $$u = \sum_{k=o}^{m} (\bar{E}K)^k \bar{u} + (\bar{E}K)^{m+1} u.$$

Par le changement de fonction $v = r^{\frac{n-1}{2}} u$, $\bar{v} = r^{\frac{n-1}{2}} \bar{u}$, on voit que v s'écrit

(4) $$v = \sum_{k=o}^{m} (\bar{E}_1 K_1)^k \bar{v} + (\bar{E}_1 K_1)^{m+1} v$$

où l'on note P_1, $\bar{P}_1$ les opérateurs P et $\bar{P}$ avec n=1 et $K_1 = \bar{P}_1 - P_1$, $\bar{E}_1$ la paramétrix de $\bar{P}_1$.

Pour $K_1 = \bar{P}_1 - P_1$, on développe

$$K_1 = \sum_{\substack{1 \le j+|\alpha| \le m \\ 0 \le |\beta| \le 2}} a_{\alpha,\beta,j} (x-y)^\alpha \left(\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}\right)^j D_x^\beta + \sum_{1 \le j \le m} c_j \left(\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}\right)^j [(rD_r)^2 + 1]$$
$$+ \sum_{0 \le |\beta| \le 2} a_\beta D_x^\beta + c_{m+1}[(rD_r)^2+1]\,.$$

avec $a_\beta = O\left((|x-y| + |\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}|)^{m+1} e^{2|\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}|}\right)$; $c_{m+1} = O\left(|\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}|^{m+1} e^{2|\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}|}\right)$

(On a utilisé la formule $\frac{\rho^2}{r^2} = 1 + 2\,\mathrm{Log}\frac{\rho}{r} + \dots + \frac{2^m}{m!}\left(\mathrm{Log}\frac{\rho}{r}\right)^m$ + reste).

Suivant après la procédure d'Ivrii, pour calculer $\bar{v}$, on annule $\bar{v}$ pour $t<o$, on note $\bar{v}_o$ la fonction ainsi obtenue et on effectue la transformation de Fourier $x \to \xi$, Mellin $r \to \zeta$ et Fourier-Laplace $t \to z$ pour $\mathrm{Im}\, z < o$.

La transformation Mellin pour une classe de distributions est introduite par l'un de nous et ses propriétés importantes sont rappelées au §4.

On obtient facilement

$$\bar{P}_1 \bar{v}_o = -\rho^{\frac{n-1}{2}} \delta(r-\rho)\,\delta(x-y)$$

La transformation de Mellin-Fourier-Laplace notée $\mathcal{MF}$ transforme $\delta(r-\rho)\,\delta(x-y)$ en $\rho^{-i\zeta-1}\,e^{-iy\xi}$, l'opérateur E_1 est transformé en la multiplication par $\frac{\rho^2}{p}$

où $p = \zeta^2 + \Delta(y,\xi) - \rho^2 z^2$ et $x-y$ en $i\partial_\xi - y$, $\operatorname{Log}\frac{r}{\rho}$ en $i\partial_\zeta - \operatorname{Log}\rho$

On attribue à un terme de type $E_1\,(x-y)^\alpha\left(\operatorname{Log}\frac{\rho}{r}\right)^j D_x^\beta$ le poids $\omega = 2+|\alpha|+j-|\beta|$ et à un terme de type $E_1\left(\operatorname{Log}\frac{\rho}{r}\right)^j\left(r D_r^2+1\right)$ le poids $\omega = 2+j-\ell$.

Il est facile alors de montrer par récurrence que $\overline{v}_0$ a une asymptotique dont chaque terme a une transformation $\mathcal{MF}$ de la forme

(5) $$-\rho\rho^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-iy\xi}\,\rho^{-i\zeta}\,p^{-\ell}\,C_\ell$$

où C_ℓ est un polynôme homogène en ζ, ξ, de degré c_ℓ vérifiant

$$2\ell - c_\ell = \omega + 2 \qquad \text{, poids du terme correspondant.}$$

Soit $\lambda_\pm(\rho,y,z,\xi)$ les racines par rapport à ζ de l'équation p=o telles que $\pm\operatorname{Im}\lambda_\pm > 0$.

Le théorème 4, du §4 permet de montrer, par l'inverse de Mellin, que la trace $r=\rho$ d'un terme (5) est donnée par le résidu :

$$i\left(\partial_z^{\ell-1}\left[C_\ell\,(z-\lambda_-)^{-\ell}\right]\right)_{z=\lambda_+}$$

On voit donc que $\overline{v}_0$ $(r=\rho)$ a une asymptotique dont chaque terme a une transformation de Fourier-Laplace

$$-i\rho\,\rho^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-iy\xi}\,\lambda_+^{-\ell}\,D_\ell$$

avec D_ℓ positivement homogène en ξ de degré d_ℓ vérifiant

$$\ell - d_\ell = \omega + 1$$

En revenant à $\overline{u}$, on voit que $\overline{u}$ a une asymptotique dont chaque terme a une transformation de Fourier $t \to \tau$, $x \to \xi$

$$-i\rho\,\theta\,e^{-iy\xi}\,D_\ell\left\{\left[\rho^2(\tau-i0)^2-\Delta(y,\xi)\right]^{-\frac{\ell}{2}} - \left[\rho^2(\tau+i0)^2-\Delta(y,\xi)\right]^{-\frac{\ell}{2}}\right\}$$

où θ est la fonction égale à 1 sur $\Delta(y,\xi) \leq \rho^2\tau^2$, nulle ailleurs.

En revenant à x et en prenant la trace x=y , on obtient des termes de types

(6) $$-i\rho \; a_k(\rho, y; \rho, y)\,(\rho|\tau|)^{n-1-k} \qquad 0 \leq k \leq m+1$$

avec a_k des fonctions bornées.

Un calcul précis du terme principal donne $-i\rho\,(\rho|\tau|)^{n-1} a_o$ avec

(7) $$a_o = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta(y,\xi)<1} \left(1 - \Delta(y,\xi)\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

On a le :

Théorème 3

Avec ζ et χ comme dans le théorème 2, soit $\beta \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\beta = 1$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$ et $\beta = o$ pour $|t|>1$ et soit $\beta_{t_o}(t) = \beta\left(\frac{t}{t_o}\right)$

Il existe $\varepsilon_o>0$, $C_o>0$ telles que pour $r|\tau| \geqslant C_o$, on a

(8) $$\widehat{\beta_{t_o} u}\,(\tau; r, x, r, x) = -ir \sum_{k=o}^{m} a_k(r, x; r, x)(r|\tau|)^{n-1-k} + O\left[(r|\tau|)^{n-m-2}\right]$$

avec $t_o = \varepsilon_o r$, O étant uniforme en τ,r,x

Le terme principal a_o est donné par (7).

2.3. Preuve du théorème 3.

Dans le développement (3) de u, on note par U_k le groupe des termes de poids k pour $k \leq m$ et tous les autres termes étant inclus dans le reste $\tilde{U}_{m+1}$. On a

(9) $$u = U_o + U_1 + \dots + U_m + \tilde{U}_{m+1}$$

Pour $\varepsilon_o > o$ assez petit, on montre que la trace de u a la singularité normale au sens d'Ivrii dans un voisinage $|t| \leq \varepsilon_o$, c'est à dire qu'il existe $\bar{s}$, tel que

(10) $(tD_t)^j u(t; r, x; r, x) \in H^{\bar{s}}_{(-\varepsilon_o, \varepsilon_o)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, uniformément par rapport à r,x

La formule (6) montre que la trace de chaque terme U_k , $o \leq k \leq m$, a aussi la singularité normale. En tenant compte de la propagation de singularités [cf (4)], on montre que WF vérifie

$$WF(u) \cap \{ r \leq t,\ \rho \leq t,\ |t| \leq \varepsilon_o \} \subset$$
$$\left\{ (r, x; \rho, y; \zeta, \xi, \mu, \eta);\ \left|1 - \frac{\rho}{r}\right| + |x-y| + \left(r|\zeta+\mu| + |\xi+\eta|\right)\left(r^2\zeta^2 + |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\frac{t}{r} \right\}$$

En utilisant cela et une inégalité d'énergie pour le problème de Cauchy dans des espaces du type du paragraphe 2.1, on obtient ceci : (9) est une asymptotique en termes de singularités décroissantes en t, dans un voisinage $|t| \leq \varepsilon_o r$

Chaque terme de (9) est calculable par (6) et on obtient facilement (8). Finalement, on observe que la restriction $|t| \leq \varepsilon_o r$ sert seulement à l'étude du terme $\tilde{U}_{m+1}$.

(Nous espérons, dans un prochain travail, montrer que, dans (8), on a une asymptotique pour $|t| \leqslant \varepsilon_0$).

3. Preuve du théorème 1 et du corollaire 2

On montre la partie 2. Pour cela, on observe d'abord que E(τ;r,x, ρ ,y) est le noyau de E ($]\infty, \tau^2]$) relatif à la normalisation $L^2(Y,dy)$

Si l'on note par $\widetilde{E}(\tau,r,x, ,y)$ le noyau distributeur de E($]\infty, \tau^2]$), on a dans une carte Q la relation :

$$\tau^n g^{\frac{1}{2}} E(\tau; r,x,r,x) = \widetilde{E}(\tau; r,x,r,x)$$

le théorème 3 donne :

$$\int_0^\infty \widehat{\beta}_{t_0}(\tau-\mu)\, d\widetilde{E}(\mu; r,x,r,x) \sim \frac{i\tau}{\pi} \widehat{\beta_{t_0} u}(\tau; r,x,r,x)$$
$$\sim \frac{1}{\pi}\left[a_0(r,x;r,x)(r\tau)^n + a_1 (r\tau)^{n-1} + \quad \right]$$

et d'après (7) on a :

$$\frac{1}{\pi} a_0(r,x;r,x)(r\tau)^n = \frac{dV}{d\tau}$$

avec :

$$V(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{L_0(r,x;\zeta,\xi)} d\zeta\, d\xi$$

Comme $t_0 = \varepsilon_0 r$, un théorème taubérien (cf V. Ivrii (2)) donne le résultat.

Pour le corollaire 2, on utilise une majoration uniforme :

$$E(\tau; r,x,r,x) \leqslant C\tau^{n+1} \qquad \tau \geqslant \tau_0$$

où C est indépendante de r,x, τ.

Cette majoration est une conséquence facile d'une estimation du noyau de l'opérateur de la chaleur associé à L, donnée par J. Cheeger - M. Taylor (1).

4. Transformation de Mellin

Nous énonçons le résultat suivant de la transformation de Mellin décrite dans Pham (6). C'est une adaptation des résultats de J. Leray (5) sur la transformation de Laplace.

Pour une fonction α définie sur $\mathbb{R}_+$, on note

$$\text{(11)} \qquad \mathcal{M}\alpha(\zeta) = \int_0^\infty r^{-i\zeta} \alpha(r) \frac{dr}{r}$$

Soit I un intervelle ouvert de R. On note $\mathcal{M}'$(I) l'espace des distributions $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ vérifiant : quelque soit l'intervalle $J \subset I$, il existe un polynome P et une fonction β, dépendant de J, telle que

$$\alpha = P(rD_r)\beta \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$$

$$\sup_{y\in J} \int_{\mathbb{R}_+} |r^y \beta(r)|^2 \frac{dr}{r} < \infty$$

On note $\mathcal{H}'(I)$ l'espace des fonctions holomorphes F dans $B(I) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ,\ \Im m\,\zeta \in I\}$ à croissance lente c'est à dire : quel que soit $J \subset I$, il existe un polynome P tel que

$$\sup_{y\in J} \int_{\Im m\zeta = y} \left| \frac{F(\zeta)}{P(\zeta)} \right|^2 d\zeta < \infty$$

Alors la transformation de Mellin (9) est un isomorphisme de $\mathcal{M}'(I)$ sur $\mathcal{H}'(I)$ et $\mathcal{M}^{-1}$ est donnée par

$$\mathcal{M}^{-1} F = \frac{1}{2\pi} \int_L r^{i\zeta} F(\zeta) d\zeta$$

Le chemin d'intégration L étant une droite $\Im m\,\zeta = y \in I$, l'intégrale ayant le sens suivant :

$$P(rD_r) \frac{1}{2\pi} \int_L r^{i\zeta} \frac{F(\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta$$

On note, pour $\sigma \in I$, $\mathcal{H}'(I,\sigma)$ l'espace des fonctions méromorphes F dans B(I), à croissante lente et ayant un nombre fini de pôles sur $\Im m\,\zeta = \sigma$ et on note $\mathcal{M}'(I,\sigma)$ l'espace des couples de distributions $u = (u_+, u_-)$ définies sur $\mathbb{R}_+$, image de Mellin inverse c'est à dire, pour $F \in \mathcal{H}'(I,\sigma)$:

$$u_+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im m\zeta = y_+} r^{i\zeta} F(\zeta) d\zeta \qquad u_- = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im m\zeta = y_-} r^{i\zeta} F(\zeta) d\zeta$$

où $y_\pm \in I$ avec $y_- < \sigma < y_+$

On a le :

Théorème 4

Pour $F \in \mathcal{H}'(I,\sigma)$, on a :

$$u_- - u_+ = i \sum \text{rés}\,[r^{i\zeta} F(\zeta)]$$

où $\sum$ est la somme des résidus se trouvant dans B(I).

Institut de Mathématiques et d'Informatique
Université de Nantes - ERA 946

Institut de Mathématiques - Acad. Sc. Bulgare
PO BOX 373 . 1090 Sofia - BULGARIE.

(1) J. Cheeger - M. Taylor : On the Diffraction of Waves by Conical Singularities II
Comm. Pure Appl. Math. - Vol. XXXV, 487-529 (1982)

(2) V.Y. Ivrii : Second term of the Spectral Asymptotic Expansion of the Laplace.
Functional Anal. i Pul. 14, N°2, 25-34 (1980).

(3) V.Y. Ivrii : Propagation of the singularities of the solution of a wave equation in a demain that contains corner points.
Soviet Math. Dokl. 19, N°4, 894-897 (1978).

(4) M. Kalka - A. Menikoff : The wave equation on a cone.
Comm. in Partial Diff. Equations, 7 (3), 223-278 (1982).

(5) J. Leray : Calcul, par réflexions, des fonctions M-harmoniques dans une bande plane vérifiant au bord M conditions différentielles, à coefficients constants. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 5, 16, 1041-1090 (1964)

(6) Pham The Lai : Nouveau regard sur un travail de Kondratiev.
Séminaire d'Analyse de Nantes (1982). A paraître.