Journées Équations aux dérivées partielles

Pierre Lévy-Bruhl

Conditions suffisantes de résolubilité locale d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes nilpotents

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A18_0>

Conférence n° 18

CONDITIONS SUFFISANTES DE RESOLUBILITE LOCALE D'OPERATEURS INVARIANTS A GAUCHE SUR DES GROUPES NILPOTENTS

par P. Lévy-Bruhl

I INTRODUCTION

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus\cdots\oplus \mathfrak{g}_r$ une algèbre de Lie nilpotente graduée :

(1.1) $$[\mathfrak{g}_i , \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \text{où : } i + j > r \Longrightarrow \mathfrak{g}_{i+j} = \{0\} .$$

On note :

(1.2) $$\mathfrak{g}^i = \bigoplus_{k\geq i} \mathfrak{g}_k$$

On désigne par G le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie G , et on identifie l'algèbre universelle enveloppante complexifiée $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G , en prolongeant l'identification de $\mathfrak{g}$ à l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur G fournie par :

(1.3) $$\forall f \in C^\infty(G),\ \forall\ a \in \mathfrak{g},\ a f(g) = \frac{d}{dt}\ (f(g \exp ta))|_{t=0}$$

Dans cette formule, exp désigne l'application exponentielle, qui est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G.

La famille de dilatations définie sur $\mathfrak{g}$ par :

(1.4) $$\delta_t|\mathfrak{g}_i = t^i\ \mathrm{Id}\ (t > 0)$$

se prolonge à $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. On note $\mathcal{U}_o = \mathbb{C}$, et , pour $m \geq 1$, $\mathcal{U}_m$ désigne la composante homogène de degré m de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. On note de plus :

(1.5) $$\mathcal{U}^m = \bigoplus_{i=o}^{m} \mathcal{U}_i .$$

On sait, par un résultat de Duflo, que tout opérateur bi-invariant sur un groupe de Lie est localement résoluble. Ce résultat cesse d'être vrai pour des opérateurs invariants d'un seul côté : c'est le cas pour l'opérateur de H. Lewy, et les généralisations de cet exemple obtenues par Corwin et Rothschild ([C.R]). On sait d'autre part depuis les travaux de Helffer et Nourrigat ([H.N]$_1$ et [H.N]$_2$), qu'un opérateur P de $\mathcal{U}_m$ est hypoelliptique si et seulement si son image $\pi(P)$ par toute représentation unitaire irréductible non triviale π de G est injective dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de cette représentation. La résolubilité locale de P résultant de l'hypoellipticité de son adjoint formel P^*, on cherchera des conditions suffisantes de résolubilité en terme d'injectivité de $\pi(P^*)$, pour certaines représentations π. Une condition nécessaire de résolubilité ([C.R]), dans des cas particuliers, est l'injectivité de $\pi(P^*)$ pour presque toute représentation π. On cherche néanmoins, dans les conditions suffisantes, à faire porter l'hypothèse sur une partie de $\hat{G}$ aussi petite que possible.

II ENONCE DES RESULTATS.

Les résultats obtenus ici sont valables pour des groupes de rang de nilpotence r égal à 2 ou 3, et nous les énoncerons successivement pour ces deux cas. Il faut tout d'abord rappeller certains points de la théorie des représentations.

Si $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et ℓ un homomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}$, (c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $\ell([\mathcal{V},\mathcal{V}])=0$), on définit la représentation unitaire $\pi_{(\ell,\mathcal{V})}$ de G comme étant l'induite à G de la représentation scalaire de $\exp \mathcal{V}$: $\exp v \longrightarrow e^{i\ell(v)}$.

On sait d'après la théorie de Kirillov que si $\mathcal{V}$ est isotrope maximale pour ℓ, $\pi_{(\ell,\mathcal{V})}$ est irréductible, et ne dépend, à équivalence unitaire près, que de ℓ. On la notera π_ℓ. Toute représentation unitaire irréductible est de ce type, et π_ℓ est équivalente à $\pi_{\ell'}$, si et seulement si ℓ et ℓ' sont sur la même orbite de la représentation coadjointe :

$$(2.1) \qquad (\pi_\ell \sim \pi_{\ell'}) \Longleftrightarrow (\exists\, h \in \mathfrak{g},\ \ell' = (\exp \operatorname{ad} h)^* \ell).$$

II 1) Le cas du rang 2 .

Pour $\eta \in \mathfrak{g}_2^*$, on définit la forme bilinéaire alternée B_η sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ par :

$$(2.2) \qquad B_\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) .$$

Soit $\mathcal{Z}$ l'ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*_2$ sur lequelle B_η est de rang maximum, et soit d la dimension du radical de B_η pour η dans $\mathcal{Z}$.

<u>Théorème 1</u>. On suppose $d \geq 1$. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ tel que :

$$\forall \ell = (\ell^1, \eta) \in \mathfrak{g}_1^* \times {}^c\mathcal{Z} \setminus \{0\}\ ,\ \pi_\ell(P^*) \text{ injectif dans } \mathcal{S}_{\pi_\ell}$$

Alors P est localement résoluble.

<u>Remarques</u>. Dans le cas où la forme B_η est de rang constant pour η non nul, l'hypothèse est l'hypothèse " Ro-dégénérée" de Helffer et Nourrigat, ou, selon d'autres terminologies, d'ellipticité transverse, ou ellipticité dans les directions génératrices (Rothschild et Tartakoff (R.T)).

Si m = 2, le théorème est d'ailleurs vrai sous cette seule hypothèse : (LB_1) $\pi_\ell(P^*)$ injectif dans $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$ pour tout ℓ dégénérée sur $\mathfrak{g}_2^*$.

II 2) <u>Le cas du rang 3</u>.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$. Pour ℓ^3 dans $\mathfrak{g}_3^*$, on considère les deux espaces définis par :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} R_1^{\ell^3} = \{X \in \mathfrak{g}_1 \ /\ \forall\ Y \in \mathfrak{g}_2\ ,\ \ell^3([X,Y]) = 0\} \\ R_2^{\ell^3} = \{X \in \mathfrak{g}_2 \ /\ \forall\ Y \in \mathfrak{g}_1\ ,\ \ell^3([X,Y]) = 0\}\ . \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{I}_3$ l'ensemble défini par :

$$(2.3)\qquad \mathfrak{I}_3 = \{\ell^3 \in \mathfrak{g}_3^* \ /\ \dim R_2^{\ell^3} > \inf_{\ell'^3 \in \mathfrak{g}_3^*} (\dim R_2^{\ell'^3})\}$$

$\mathfrak{I}_3$ est un ensemble algébrique, et on désigne par F la réunion de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ dont la composante sur $\mathfrak{g}_3^*$ est dans $\mathfrak{I}_3$ et de ceux dont l'orbite n'est pas de dimension maximale. F est une réunion d'orbites, et vérifie la propriété :

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \text{Soit } \ell = (\ell^1, \ell') \in \mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}^{2*}. \text{ Si } \ell \text{ est dans F, alors F contient} \\ \text{tout élément du type } (m^1, \ell'), \text{ avec } m^1 \text{ dans } \mathfrak{g}_1^*\ . \end{cases}$$

F est de plus de mesure de Lebesgue nulle. Pour ℓ^2 dans $\mathfrak{g}_2^*$ et $\ell^3 \notin \mathfrak{I}_3$, on note p_1' la dimension générique du radical de la forme définie sur $R_1^{\ell^3}$ par : $(X,Y) \longrightarrow \ell^2([X,Y])$. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u> : On suppose $p_1' > 0$. Soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ tel que :

(2.5) $\forall \ell \in F \setminus \{0\}$, $\pi_\ell(P^*)$ est injectif dans $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$.

Alors P est localement résoluble.

<u>Remarques</u>. L'hypothèse (2.5) est toujours plus forte que "Ro-dégénérée". Il résulte d'autre part d'un exemple simple [C.R], que l'injectivité de $\pi_\ell(P^*)$ pour tout ℓ non dégénérée sur $\mathfrak{g}_3$ n'implique pas la résolubilité locale de P, ce qui justifie une hypothèse du type (2.5).

III <u>INDICATIONS SUR LA PREUVE DES RESULTATS</u>.

Ce qui suit a pour but de dégager les idées générales de la démonstration, dont le fil directeur est le suivant : Après avoir obtenu, en un certain sens, des inverses de $\pi_\ell(P^*)$, on utilise la formule de Plancherel de G pour obtenir une solution élémentaire de P, ou résoudre directement l'équation $Pu = f$ ([LB_1],[LB_2] ou [M]). Plus précisément on montre que l'hypothèse implique l'inversibilité de $\pi_\ell(P^*)$ pour presque tout ℓ, et on utilise une complexification de certaines composantes de ℓ, qui nécessite l'introduction de certaines représentations non unitaires de G, pour éviter les points où $\pi_\ell(P)$ est non injectif, grâce à une formule intégrale de Cauchy. Le cas $r = 2$ étant voisin de la preuve de [LB_2], nous nous limitons ici au cas $r = 3$. La première étape, nécessaire aussi si $r = 2$ et $\mathcal{Z} \neq \mathfrak{g}_2^* \setminus \{0\}$, est de prouver la proposition suivante :

<u>Proposition 3.1</u> : Soit F un fermé de $\mathfrak{g}^*$, stable sous l'action de G, contenant $\mathfrak{g}_r^{\perp}$ (r = rang de nilpotence de $\mathfrak{g}$), et vérifiant la propriété (2.4). Soit $\tilde{F}$ l'ensemble des restrictions de F à $\mathfrak{g}^2$, et $\tilde{F}_1$ défini par :

$$\tilde{F}_1 = \{\ell = (\ell^1, \ell') \in \mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}^{2*} / \forall h \in \mathfrak{g}, \exists \ell'' \in \tilde{F}, ||| \ell'' - (\exp \operatorname{ad} h)^* \ell' ||| \leq 1\}$$

où $||| \cdot |||$ est la norme quasi-homogène associée à la graduation de $\mathfrak{g}^*$. Soit P dans $\mathcal{U}_m$ (m assez grand) tel que $\pi_\ell(P)$ soit injectif dans $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$ pour ℓ dans $F \setminus \{0\}$. Alors :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \exists C > 0, \ \forall \ell \in \mathfrak{g}^*, \ \ell \in \tilde{F}_1 \Longrightarrow \\ \forall u \in H_\ell^m, \ \|u\|_{H_\ell^m} \leq C \, [\|\pi_\ell(P)u\|_0^2 + \|u\|_0^2] \end{cases}$$

Dans (3.2) on définit H_ℓ^m comme suit : Soit $L^2(X)$ l'espace de la représentation π_ℓ , alors :

$$H_\ell^m = \{u \in L^2(X) \mid \forall\ A \in \mathcal{U}^m,\ \pi_\ell(A)\ u \in L^2(X)\} .$$

et, ayant fixé une base A_j de $\mathcal{U}^m$, on pose :

$$\|u\|^2_{H_\ell^m} = \sum_j \|\pi_\ell(A_j)u\|_o^2 .$$

La preuve de la proposition (3.1) utilise les techniques développées par Helffer et Nourrigat dans leurs articles sur l'hypoellipticité et dans [HN_3] . Quitte à remplacer P par $(PP^*)^\ell$, on peut supposer P formellement auto-adjoint, et de degré assez grand pour utiliser la proposition 3.1, avec $F = \mathcal{G}_1^* \times \mathcal{L}$ si $r = 2$, et F défini en II 2) si $r = 3$.

En utilisant l'homogénéité, il suffit d'étudier les opérateurs $\pi_\ell(P)$ pour $\|\ell^3\| = 1$.

En appliquant la proposition (3.1) à $\mathcal{G}_1^* \times \mathcal{G}_2^* \times \mathfrak{Z}_3 \subset F$, on obtient :

(3.3) $\exists\ M_1 > 0 , \exists\ A > 0 , (d(\ell^3,\mathfrak{Z}_3) \le M_1) \Longrightarrow (\|\pi_\ell(P)^{-1}\| \le A)$.

Pour $\ell^3 \notin \mathfrak{Z}^3$, on construit des bases $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{G}_i$:

$$\mathcal{B}_i = \{W_1^i,\dots,W_{d_i}^i\ ,\ \mathcal{U}_1^i,\dots,\mathcal{U}_s^i\}$$

avec :

$$(3.4)\quad \begin{cases} (W_1^i,\dots,W_{d_i}^i) \text{ base orthonormée de } R_i^{\ell^3} \\ (U_1^i,\dots,U_s^i) \text{ base du supplémentaire orthogonal de } R_i^{\ell^3} \text{ dans } \mathcal{G}_i \\ \forall\ i , j \in [1,s] \ ,\ \ell^3([U_i^1\ ,\ U_j^2]) = \delta_{ij} . \end{cases}$$

Au voisinage de tout point ℓ^3, on peut faire un tel choix dépendant analytiquement de ℓ^3. On se place sur un tel ouvert. (Ils sont par (3.3) en nombre fini).

Soit $\ell^2 = (\ell'^2, \ell''^2)$ relativement aux (W_i^1 , U_j^1). On vérifie que toute représentation est unitairement équivalente à une représentation de la forme : $\pi_{(\ell^1,(\ell'^2,0),\ell^3)}$. Soit alors $B_{\ell'^2}$ la forme bilinéaire définie sur $R_1^{\ell^3}$ par :

(3.5) $$B_{\ell'^2}(X,Y) = \ell'^2([X,Y]).$$

Cette forme est de rang maximum sur un ouvert de Zariski, et on prouve grâce à la proposition 3.1 que $\pi_{\ell^1,\ell'^2,\ell^3}(P)$ est inversible sur un voisinage du complémentaire de cet ouvert de Zariski, les normes des inverses y étant uniformément majorées. Il en est de même pour $\|\ell'^2\| \geq M_2$.

Pour (ℓ'^2,ℓ^3) fixé, $\ell^3 \notin \mathfrak{Z}_3$, rang $B_{\ell'^2}$ maximum, on construit une base $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ de $\mathfrak{g}_1$: $\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \{\widetilde{W}_1,\ldots,\widetilde{W}_{p'_1},X_1,\ldots,X_\mu,Y_1,\ldots Y_\mu , U_1^1,\ldots,U_s^1\}$

avec :

(3.6) $$\begin{cases} \{\widetilde{W}_1,\ldots,\widetilde{W}_{p'_1}\} \text{ base orthonormée du radical de } B_{\ell''} \\ \{X_1,\ldots,Y_\mu,U_i^1\} \text{ base du supplémentaire orthogonal.} \\ \forall\, i,\, j \in [1,\ldots,\mu] ,\ B_{\ell'^2}(X_i,Y_j) = \delta_{ij} \ . \end{cases}$$

Au voisinage de tout point (ℓ'^2,ℓ^3) fixé comme ci-dessus, on peut faire un tel choix analytique en (ℓ'^2,ℓ^3), et on vérifie que toute représentation est à équivalence unitaire près du type $\pi_{(\ell'^1,0,\ell'^2,0,\ell^3)} = \pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}$ où ℓ'^1 est la composante de ℓ^1 sur $\{W_1,\ldots,W_{p'_1}\}$.

On prouve enfin, en utilisant encore la proposition (3.1) que $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}(P)$ est inversible pour $\|\ell'^1\| \geq M_3$.

Modulo l'homogénéïté, on est ramené à étudier l'inversibilité de $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}(P)$ sur un compact de la section des orbites que l'on vient de construire. Les opérateurs $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}(P)$ sont, (localement), des opérateurs à coefficients polynomiaux, dont les coefficients sont analytiques en (ℓ'^1,ℓ'^2,ℓ^3), et ils sont, d'après (H.N), d'indice nul de $H^m_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}$ dans L^2 . On vérifie que les représentations $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}$ sont encore définies pour $\ell_1'^1$ complexe, en tant que représentations non unitaires de G . ($\ell_1'^1$ existe car par hypothèse $p'_1 \geq 1$). Les représentations pour lesquelles $\pi(P)$ peut n'être pas inversible sont assez régulières pour que l'on prouve :

<u>Lemme 3.1</u> : Soit $(\ell'^1, \ell'^2, \ell^3)$ tel que $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}(P)$ soit non inversible. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un cercle Γ de centre ℓ'^1 dans $\mathbb{C}$, de rayon compris entre ε et $\varepsilon/2$ sur lequel $\pi_{(z,\ell'^1_2,\ldots,\ell'^1_{p'_1},\ell'^2,\ell^3)}$ est inversible.

On obtient de plus un contrôle de la norme de cet inverse en fonction de ε.

Dans le cas où les espaces $H^m_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}$ sont fixes, ce qui est toujours vrai si $r = 2$, et qui résulte aussi de l'hypothèse de [C.R.], les $\pi_{(\ell'^1,\ell'^2,\ell^3)}(P)$ forment une famille holomorphe de type A, et la preuve est identique à celle de [LB2] .

On prouve que, si φ est dans $C_0^\infty(G)$, et si L est une puissance assez grande de la somme des carrés des générateurs de $\mathfrak{G}_3$, on définit une distribution E_φ par une formule du type :

$E_\varphi(\Psi) = \int \mathrm{Tr}\,[\pi_\ell(\Psi)\ \pi_\ell(P)^{-1}\ \pi_\ell(L\varphi)]\ d\mu(\ell)$, où $d\mu$ est la mesure de Plancherel, en remplaçant dans la région où $\pi_\ell(P)$ n'est pas inversible

$\pi_\ell(\Psi)\ \pi_\ell(P)^{-1}$ par $\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \mathrm{Tr}\,[\pi_{(z'_1,\ell'^2,\ell^3)}(\Psi)\ [\pi_{(z'_1,\ell'^2,\ell^3)}(P)]^{-1}]\ \frac{dz_1^1}{z_1^1-\ell'^1_1}$

où $z'_1 = (z_1^1, \ell'^1_2,\ldots,\ell'^1_{p'_1})$. La distribution E_φ vérifie alors $PE_\varphi = L\varphi$, ce qui prouve que P est localement résoluble puisque L l'est, (étant bi-invariant).

<u>Bibliographie</u> :

[C.R] L.Corwin-L.P. Rothschild : Necessary conditions for local solvability of homogeneous left invariant differential operators on nilpotent Lie groups. Acta. Mat. 147 3-4 (1981) .

[HN_1] B. Helffer-J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des groupes de rang de nilpotence 3,Comm. in PDE 3 (1978) .

[HN_2] B. Helffer-J. Nourrigat : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent. Comm. in PDE 4 (1979).

[HN_3] B. Helffer, J. Nourrigat : Manuscrit

[LB_1] P. Levy-Bruhl : Application de la formule de Plancherel à la résolubilité d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes Nilpotents. Bull Sc. Math. 2 (1981).

[LB_2] P. Levy-Bruhl : Note aux C.R.A.S. 19.1. 1981 .

[M] G. Métivier : Séminaire Bourbaki 583 (1981).