JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

VESSELIN M. PETKOV

Construction d'une parametrix microlocale et propagation des singularités sur le bord pour les systèmes hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A11_0>

Conférence n° 11

CONSTRUCTION D'UNE PARAMETRIX MICROLOCALE

ET PROPAGATION DES SINGULARITES SUR LE BORD

POUR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES

par

V.M. PETKOV

L'existence d'une paramétrix microlocale dans le cas de diffraction a été examinée par plusieurs autheurs [7],[1] [11],[12],[6]. Dans ce cas la paramétrix est donnée par un intégral oscillant qui contient la fonction $A_{\pm}(z) = A_i(e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} z)$. Cette fonction n'a pas de zéros sur l'axe réel et la propagation des singularités sur le bord est liée à l'étude d'une équation pseudodifférentielle. La construction d'une paramétrix quand la frontière contient des points glissants qui ne sont pas diffractifs est plus compliquée. Il faut utiliser une fonction d'Airy $A_o(z)$ ayant une série de zéros sur l'axe réel (cf.[2] et [8]). De plus l'analyse des singularités sur le bord est liée avec l'examen d'une équation contenant des opérateurs intégraux de Fourier.

Dans cette conférence, nous allons discuter l'existence d'une paramétrix dans le cas "gliding" pour des systèmes hyperboliques. Soit

$$\Omega = \{ x \in \mathbf{R}^{n+1} , x_n > 0\} , \quad \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \{x_n = 0\} .$$

Soit $x = (x_o, x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$ et soit $\xi = (\xi', \xi_n)$ la variable conjuguée de x. Nous allons étudier les systèmes

$$Pu = \sum_{k=0}^{n} A_k(x) D_k u + C(x)u ,$$

où $$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad A_k(x)\ ,\ k=0,1,\dots,n\ ,\ C(x)$$

sont des $(m\times m)$ matrices à coefficients dans $C^\infty(\bar{\Omega})$ qui sont constantes pour $|x|$ assez grand. On suppose que $A_k^*(x) = A_k(x)$ et que $A_o(x)$ est définie positive (a^* désigne la matrice adjointe de a). Si $p_1(x,\xi)$ est le symbole principal de P, nous supposons que

$$\det p_1(x,\xi) = q_o(x,\xi)\prod_{k=1}^{\ell}(q_k(x,\xi))^{m_k}\ ,$$

où $q_k(x,\xi)$, $k=0,\dots,\ell$ sont des polynômes homogènes par rapport à ξ ayant des coefficients C^∞ , $q_o(x,\xi)$ ne dépend pas de ξ_n près de $\partial\Omega$ et $q_k(x,\xi) = q_j(x,\xi) = 0$, $\xi \neq 0$ implique $k=j$. On suppose de plus que $q_k(x,\xi)$, $k=1,\dots,\ell$ sont strictement hyperboliques par rapport à x_o et que $\partial\Omega$ n'est pas caractéristique pour $q_k(x,\xi)$, $k=1,\dots,\ell$. Sous ces conditions on obtient facilement que rang $A_n(x',0) = \text{const}$, donc le nombre de valeurs propres positives de $A_n(x',0)$ sera une constante d.

Soit $(x^{o'},\xi^{o'}) \in T^*(\partial\Omega)\setminus 0$ un point tel que l'équation $q_1(x^{o'},0,\xi^{o'},\xi_n) = 0$ par rapport à ξ_n a une racine double ξ_n^o. Alors dans un voisinage conique de $(x^{o'},0,\xi^{o'},\xi_n^o)$ le symbole $q_1(x,\xi)$ a la forme

$$q_1(x,\xi) = ((\xi_n - \lambda(x,\xi'))^2 - \mu(x,\xi'))\,e(x,\xi)\ ,$$

où $e(x,\xi)\neq 0$ et $\lambda(x,\xi')$ et $\mu(x,\xi')$ sont des symboles homogènes par rapport à ξ' respectivement d'ordre 1 et 2. On fait l'hypothèse :

$$(H_1)\quad \{\xi_n - \lambda\ ,\ \mu\}(x',0,\xi') < 0 \quad \text{si} \quad \mu(x',0,\xi') = 0\ ,$$

où $\{a,b\}$ désigne le crochet de Poisson de a et b .

L'hypothèse suivante concerne les racines réelles de $\det p_1(x,\xi) = 0$.

(H_2) Toutes les racines réelles des équations

$$q_k(x^{o'},0,\xi^{o'},\xi_n^o) = 0\ ,\ k=1,\dots,\ell\ ,$$

différentes de $\lambda\pm\sqrt{\mu}$ sont simples.

Soit $B(x')$ une $d \times m$ matrice à coefficients C^{∞} qui satisfait aux conditions :

$$(H_3) \qquad \text{rang } B(x') = d \ , \quad \text{Ker } A_n(x',0) \subset \text{Ker } B(x')$$

Nous nous intéressons au problème suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} Pu = 0 \ , \ x \in \Omega \ , \\ B(x') \ u(x',0) = f \in \mathcal{E}'(\partial\Omega) \ , \\ u|_{x_o << 0} = 0 \ , \end{cases}$$

où $WF(f)$ est contenu dans un voisinage conique de $(x^{o'}, \xi^{o'})$.

Pour la condition au bord on fait l'hypothèse :

(H_3) Il existe un voisinage conique Γ_1 de $(x^{o'}, \xi^{o'})$ tel que le déterminant de Lopatinski correspondant au problème (1) ne s'annule pas.

Alors nous avons le théorème suivant :

Théorème 1 : Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ soient satisfaites. Alors si Γ est suffisamment petit, il existe une paramétrix du problème (1).

La construction de la paramétrix est très longue.

Nous allons commenter la question de prolongement des phases et amplitudes. La partie de la paramétrix G qui correspond à racines $\lambda \pm \sqrt{\mu}$ a la forme

$$(2) \qquad G_1 F = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A_o(\check{\rho})\check{g} + iA_o'(\check{\rho})\check{h}}{A_o(\zeta)} e^{-i\check{\theta}} \chi(\eta') \hat{F}(\eta') \, d\eta' \quad .$$

Les termes dans (2) sont déterminées de la manière suivante. Les fonctions ρ et θ , dites phases, sont déterminées pour $\rho \geqslant 0$ par les équations d'eiconal :

$$\phi^{\pm}_{x_n} - \lambda(x, \phi^{\pm}_{k'}) = \pm\sqrt{\mu(x, \phi^{\pm}_{k})} \ ,$$

où $\phi^{\pm} = \theta \pm \frac{2}{3} \rho^{3/2}$. Les fonctions θ et ρ sont homogènes par rapport à η', respectivement d'ordre 1 et $\frac{2}{3}$, et ils satisfont aux conditions :

$$\begin{cases} \text{(i)} \qquad \det \theta_{x'\eta'}(x',0,\eta') \neq 0 \quad , \\ \text{(ii)} \qquad \rho\Big|_{x_n=0} = \alpha|\eta'|^{2/3} \quad , \quad \dfrac{\partial\rho}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} < 0 \quad , \end{cases}$$

où $\alpha = \eta_o|\eta'|^{-1}$. Les amplitudes g et h sont déterminées par les équations de transport. La fonction d'Airy a les asymptotiques :

$$A_o(t) \sim C\, t^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right),\ t \to +\infty,$$

$$A_o(t) \sim C|t|^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}}} \quad , \ t \to -\infty \ .$$

Finalement, $\zeta = \alpha|\eta'|^{2/3} + i\tau|\eta'|^{-1/3}$, $\tau > 0$, $\chi(\eta')$ est une fonction C^∞ à support près de $(0,\xi^{o''})$, $\xi^{o''} = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ et $\check\theta, \check\rho, \check g, \check h$ désignent des prolongements presque analytiques pour $(x, \eta_o + i\tau|\eta'|^{-1/3}, \eta'')$.

La propriété (ii) donne

$$\rho|\eta'|^{-2/3} = \alpha + x_n\rho_1 \ , \ \rho_1 \leq -\delta_o < 0 \, .$$

En conséquence, le domaine $\alpha \geq 0$ n'est pas inclus dans l'ensemble $\rho \geq 0$, où θ, ρ, g, h sont déterminées. Pour cela on fait un prolongement C^∞ de θ, ρ, g, h pour $\rho \leq 0$, $\alpha \geq 0$. Après on prolonge θ, ρ, g, h pour $\rho \leq 0$, $\alpha \leq 0$ de telle manière que les équations d'eiconal et de transport sont satisfaites modulo $O(x_n^\infty)|\eta'|^2$. Ce prolongement est pareil à celui proposé par Taylor [11] dans le cas diffractif. Finalement il reste à effectuer un prolongement presque analytique dans le plan complexe en direction de ξ_o.

Afin de satisfaire les conditions au bord il faut choisir F comme solution d'une équation sur le bord. Il est facile de mettre cette équation sous la forme

(3) $$\left(\gamma_o + i\gamma_1|D'|^{-1/3} K_o(D')\right)X = g \ ,$$

où $\gamma_o, \gamma_1 \in S^o_{1,o}(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{K_o(D')X} = \frac{A'_o}{A_o}(\zeta)\hat{X}$, $\hat{X}$ étant la transformation de Fourier. Il découle de l'hypothèse (H_3) que γ_o est microlocalement elliptique ; compte tenu de cela, on se ramène à l'équation

$$(4) \qquad QX = (I + i\gamma_2 |D'|^{-1/3} K_o(D'))X = g_1 .$$

Soit (,) le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et soit $\| \ \|_o$ la norme dans cet espace. En multipliant (4) par X on obtient

$$\|X\|_o^2 \leq \varepsilon \|X\|_o^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|g_1\| + C_2 \| |D'|^{-1/3} K_o(D') X\|_o \|X\|_o$$

avec $0 < \varepsilon < 1/4$, où C_2 ne dépend que de l'opérateur $\gamma_2 \in OpS^o_{1,o}$. Pour $|\eta'|^{-1}$ et α suffisamment petits on arrange l'inégalité

$$2C_2 |\eta'|^{-1/3} |K_o(\zeta)| \leq 1 ;$$

grâce à l'estimation $\operatorname{Im} \frac{A_o}{A_o'}(\zeta) \geq C_1 \tau (1 + (\eta')^2)^{-1/6}$, démontrée par Eskin [3] dans le cas où $\eta_o \geq 0$ et $\tau \leq C_o(1 + |\eta'|^{1/6}(1 + |\zeta|)^{-1/2}$. De telle manière on obtient l'estimation

$$\|X\|_o \leq C_3 \|QX\|_o$$

et la solvabilité de (4) découle d'un argument standard.

L'étude des singularités de X est plus difficile. On se propose de donner seulement quelques indications sur l'examen de ce problème en renvoyant le lecteur à [10] pour plus de détails.

Soit $\chi_1(t) \in C^\infty$ une fonction telle que $\chi_1(t) = 1$ si $t \geq \delta_1 > 0$ et $\chi_1(t) = 0$ si $t \leq \frac{\delta_1}{2}$. On écrit

$$\chi_1(\alpha|\eta'|^{2/3})\frac{A'_o}{A_o}(\zeta) = \frac{\chi_1(\alpha|\eta'|^{2/3})(A_1'(\zeta) - A'(\zeta))}{A_1(\zeta)\left(1 - \chi_1(2\alpha|\eta'|^{2/3})\frac{A}{A_1}(\zeta)\right)} ,$$

où $A(z)$ et $A_1(z)$ sont des fonctions d'Airy telles que

$$A_o(z) = A(z) - A_1(z) , \quad A_1(z) = \overline{A(\bar{z})}$$

(cf. [2],[8]).

On introduit l'opérateur

$$\widehat{\mathcal{B}X} = \chi_1(2\alpha|\eta'|^{2/3}) \frac{A}{A_1}(\zeta)\, \hat{X} \quad .$$

et l'opérateur pseudodifférentiel à symbole

$$I + \gamma_2|\eta'|^{-1/3}\Big[(1 - \chi_1(\alpha|\eta'|^{2/3})\, K_o(\zeta) + \chi_1(\alpha|\eta'|^{2/3})\, \frac{A_1'}{A_1}(\zeta)\Big]$$

Si δ_1 est suffisamment petit on a $L \in OPS^o_{1/3,o}$ et de plus, L est elliptique pour α et $|\eta'|^{-1}$ assez petits. Soit

$$\widehat{\mathcal{A}X} = i|\eta|^{-1/3}\left(\frac{A_1'}{A_1} - \frac{A'}{A}\right)(\zeta)\, \hat{X}$$

un opérateur pseudodifférentiel à symbole dans $S^o_{1/3,o}$.

Après un calcul facile, on se ramène à l'équation

$$(I - \mathcal{B})\, Y - L^{-1}\, \gamma_2\chi_1(D_oD')^{-1/3})\, \mathcal{A}\mathcal{B}Y = g_2 \quad . \tag{5}$$

Eskin [2] a étudié une équation semblable, avec $\gamma_2 = 0$.

En général, nous ne pouvons pas éviter le terme contenant $\mathcal{A}\mathcal{B}$. L'apparition de ce terme est liée au fait que nous ne pouvons pas arranger la condition $h|_{x_n=0} = O(\alpha^\infty)|\eta'|^{-1/3}$. Cette difficulté est typique pour des systèmes (cf.[12]).

Soit $\kappa : (y',\eta') \to (x',\xi')$ la transformation canonique, déterminée par $\alpha|\eta'|^{2/3} \geq c_o > 0$ par la fonction génératrice $\varphi(x',\eta') = \langle x',\eta'\rangle - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}|\eta'|$.

Il est facile d'observer que κ est associée à l'opérateur $\mathcal{B}$. Le point essentiel dans l'étude des singularités est de démontrer le

Théorème 2. Soit $\Sigma \subset T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0$ un domaine ouvert, conique par rapport à η' et invariant par rapport à κ^{-1}. Alors la relation $WF(g_1) \cap \Sigma = \emptyset$ implique $WF(X) \cap \Sigma = \emptyset$, où X est la solution de (4).

La démonstration de ce théorème repose sur des estimations d'énergie. Soit $\beta \in OPS^{o}_{1,o}$ un opérateur à symbole $\beta(x',\eta')$ qui satisfait aux conditions :

(a) $$\beta(\kappa^{-1}(x',\eta')) \leqslant \beta(x',\eta') ,$$

(b) $$\text{cône supp } \beta(x',\eta') \subset \Sigma ,$$

(c) $$\beta(\hat{x}',\hat{\eta}') \neq 0 ,$$

où $(\hat{x}',\hat{\eta}')$ est un point fixé. En posant $\sigma = s + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$ et supposant que $X \in H^{s}(\mathbb{R}^{n})$ on considère l'égalité

$$(6) \qquad (\Lambda^{\sigma}\, \beta(I - \mathcal{B} - L^{-1}\gamma_2 \chi_1 \mathcal{A}\mathcal{B})X\ ,\ \Lambda^{\sigma}\beta X) = (\Lambda^{\sigma}\beta g_2\ ,\ \Lambda^{\sigma}\beta X)\ ,$$

où Λ^{σ} est l'opérateur à symbole $(1 + |\eta'|^2)^{\sigma/2}$. Le point essentiel consiste à montrer que $WF(g_2) \cap \Sigma = \emptyset$ implique $WF(X_\varepsilon) \cap \Sigma = \emptyset$, où $X_\varepsilon = \chi_1(\alpha|\eta'|^{\varepsilon})X$.

Pour cela on considère $L^{-1}\gamma_2\chi_1 \mathcal{A}\mathcal{B}$ comme une perturbation de terme principal $(I - \mathcal{B})$. La raison d'un tel raisonnement est liée à la représentation de $\mathcal{A}$ comme une somme $\mathcal{A} = R_o + R_1$, où $\text{ord } R_1 = -\frac{2}{3}$ et

$$\widehat{R_o X} = 2\,\text{Re}\left(-i|\eta'|^{-1/3}\, \frac{A'}{A}(\zeta)\right) \hat{X} .$$

De plus le symbole de R_o est positif et on peut écrire $R_o = R_o^{1/2} R_o^{1/2}$, où

$$|R_o^{1/2}(\zeta)| \leqslant c'\,\alpha^{1/4}\ ,\quad \alpha|\eta|^{\varepsilon} \geqslant c_o > 0 .$$

Après une étude des commutateurs dans (6) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 - e^{-2\sqrt{\alpha}\tau}(1 + c_o'\sqrt{\alpha})\chi_2(\alpha|\eta'|^{\varepsilon})\ (1 + |\eta'|^{\sigma})|\widehat{\beta X_\varepsilon}(\eta')|^2\, d\eta' < \infty$$

où $\chi_2(t) = 1$ pour $t \geqslant \frac{\delta_1}{2}$ et $\chi_2(t) = 0$ pour $t \leqslant \frac{\delta_1}{4}$.

En choisissant τ suffisamment grand on arrange

$$1 - e^{-2\sqrt{\alpha}\tau}(1 + c_o'\sqrt{\alpha})\chi_2(\alpha|\eta'|^{\varepsilon}) \geqslant \delta_o(1 + |\eta'|^2)^{-\delta/4}$$

avec $\delta_o > 0$ et cela rend possible de démontrer que $\beta X_\varepsilon \in H^{s+1/2-\varepsilon/2}(\mathbb{R}^n)$.

De cette manière on prouve que $\beta X_{\varepsilon} \in C^{\infty}$ et en appliquant (5) on obtient finalement $\beta X \in C^{\infty}$.

REFERENCES

[1] G. Eskin, Comm. P.D.E., 1, 1976, pp.521-560.

[2] G. Eskin, J. Anal. Math. 32, 1977, 17-62.

[3] G. Eskin, pp. 19-54 in "Singularities in Boundary Value Problems", D. Reidel Publ. Comp., 1981.

[4] V. Ivrii, Sibir Mat. J. 20,1980, pp. 722-734.

[5] V. Ivrii, Sibir Mat. J. 21, 1981, pp. 527-534.

[6] K. Kubota, Hokkaido Math. J., 10, 1981, pp. 264-298.

[7] R. Melrose, Duke Math. J., 37, 1975, pp. 605-635.

[8] V. Petkov, J. Math. Pures et Appl., 60, 1982. (à paraître).

[9] V. Petkov, C.R. Acad. Sc. Paris, 293, 1981, pp. 637-639.

[10] V. Petkov, "Parametrix and Propagation of Singularities for mixed Problems for Symmectric Hyperbolic Systems", preprint.

[11] M. Taylor, Comm. Pure Appl. Math., 29, 1976, pp. 1-38 and pp. 463-481.

[12] M. Taylor, pp. 271-316 in "Singularities in Boundary Value Problems", D. Reidel Publ. Comp., 1981.

***